УДК 336.76

G. Финансовая экономика
G. Financial Economics

НЕЧЕТКИЕ ДОХОДНОСТИ В ПОРТФЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ (МЕТОД ТРЕУГОЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ)

И. В. БОЛЬШАКОВА[1)]

[1)] *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Обобщается классическая задача Марковица оптимизации инвестиционного портфеля на случай нечетких коэффициентов доходности, моделируемых нечеткими треугольными числами. Риски, связанные с инвестированием, моделируются с помощью полиматроидных ограничений диверсификации рисков. Предлагается система алгоритмов поиска нечетких оптимальных решений, основанная на пакете *Mathematica*.

Ключевые слова: модель Марковица; нечеткие треугольные числа; нечеткие доходности; полиматроид рисков.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору М. М. Ковалеву за критические замечания и помощь в реализации исследования в области портфельной оптимизации.

FUZZY RETURNS IN PORTFOLIO THEORY (METHOD OF TRIANGULAR FUZZY NUMBERS)

I. V. BOLSHAKOVA[a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The classical Markowitz problem of investment portfolio optimization is generalised to the case of fuzzy return rates modeled by fuzzy triangular numbers. The risks associated with investment are modeled using polymatroid constraints on risk diversification. A system of algorithms for searching for fuzzy optimal solutions based on the *Mathematica* package is proposed.

Keywords: Markowitz model; fuzzy triangular numbers; fuzzy returns; risk polymatroid.

Acknowledgments. The author is deeply grateful to professor M. M. Kovalev, who assists in the scientific research in the field of portfolio optimization problems and expresses the critical comments about the work done.

Введение

Общеизвестно, что финансовые решения приходится принимать в условиях неопределенности. Специально для таких случаев была разработана теория нечетких множеств, основы которой были заложены в 1965 г. – в работе Л. А. Заде [1] (см. также [2–4]). Следует отметить, что еще в 1920-х гг. польский математик Я. Лукашевич исследовал нечеткие системы. Несмотря на популяризацию этой теории в Беларуси и издание переведенных в БГУ с испанского языка монографий [5; 6], у нас к ней все еще практически не прибегают, в то время как в зарубежной практике, в которой при принятии финан-

Образец цитирования:
Большакова ИВ. Нечеткие доходности в портфельной теории (метод треугольных нечетких чисел). *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2020;2:50–59.

For citation:
Bolshakova IV. Fuzzy returns in portfolio theory (method of triangular fuzzy numbers). *Journal of the Belarusian State University. Economics.* 2020;2:50–59. Russian.

Автор:
Ирина Викторовна Большакова – старший преподаватель кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:
Irina V. Bolshakova, senior lecturer at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
ivbalshakova@gmail.com

совых решений широко применяется понятие нечеткости[1]. В данной статье теория нечетких множеств используется для задач оптимального управления финансовыми активами (см. [7; 8]).

Краткий обзор результатов

Современные системы оптимального управления финансовыми активами предприятия, банка, государства (золотовалютные резервы центрального банка) разрабатываются в рамках различных модификаций моделей оптимального портфеля Марковица – Тобина – Шарпа. Базовым в современной теории инвестиций считается подход, предложенный в 1952 г. Г. Марковицем для определения оптимального портфеля, учитывающий такие характеристики секторов инвестирования, как доходность и риск неблагоприятного изменения котировок [9]. Заслугой Г. Марковица стала теоретико-вероятностная формализация показателей доходности и риска, что позволило перевести задачу выбора оптимальной инвестиционной стратегии на строгий математический язык. Критериями выбора оптимального портфеля являются:

1) минимизация риска при заданном уровне доходности (модель 1);

2) максимизация доходности при заданном уровне риска (модель 2);

3) поиск эффективных парето-оптимальных решений в задаче с двумя критериями: минимизацией риска и максимизацией доходности (модель 3).

Модель 1 оптимального портфеля позволяет найти доли $\left(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n\right)$ капитала, вложенного/привлеченного в финансовые инструменты из n возможных, минимизирующих вариацию V эффективности портфеля:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min,$$

где V_{ij} – коэффициент ковариаций случайных величин доходности i-го и j-го инструментов, т. е. это риск от одновременного включения в портфель i-го и j-го видов инструментов при условии, что обеспечивается заданное значение M ожидаемой доходности – взвешенной средней величины возможных доходов, где весами являются доли портфеля, инвестированные в каждый из инструментов:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = M,$$

где m_j – ожидаемая доходность j-го финансового инструмента. Ожидаемая доходность единицы j-го инструмента m_j рассчитывается как математическое ожидание случайной величины. Доли всех финансовых инструментов в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

С математической точки зрения из-за свойств ковариационной матрицы – неотрицательно определенной и симметричной – задача оптимального портфеля (модель 1) относится к простому классу задач выпуклого квадратичного программирования, допускающих явные решения.

В практических приложениях часто рассматривают в качестве основной модель 3, т. е. двухкритериальную задачу максимизации ожидаемой доходности при минимальном риске

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min, \ \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \to \max, \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

и исследуют парето-оптимальные решения, т. е. эффективные портфели, которые не допускают улучшения одновременно по одному из критериев (риск или доходность) без ухудшения по другому из них.

В портфельной оптимизации по модели 3 (благодаря выпуклости обоих критериев даже при дополнительных линейных ограничениях) поиск парето-оптимальных решений (эффективных портфелей) сводится к поиску всех оптимальных решений в задаче с параметрическим квадратичным критерием

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j - k \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \to \min, \ k \in [0, +\infty).$$

[1]*Недосекин А. О.* Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний : дис. … д-ра экон. наук : 08.00.13. СПб. : Санкт-Петербург. гос. ун-т экономики и финансов, 2003. 280 с.

В этом случае в силу теоремы Гурвича [10, с. 105] работает метод свертки критериев. Находя решения для каждого k, можно получить описание эффективных портфелей через вектор-функцию

$$x(k) = (x_1(k), \quad x_2(k), \quad \ldots, \quad x_n(k)).$$

Функции $x_i(k)$ являются непрерывными кусочно-линейными с конечным числом изломов. Эффективные портфели, соответствующие точкам излома, принято называть угловыми, а параметры k, их определяющие, – угловыми точками. Все остальные эффективные портфели устанавливаются через линейную комбинацию угловых портфелей.

Пример. Предположим, что для вложений инвестора имеются на выбор следующие четыре вида финансовых инструментов: облигации казначейства США, ценные бумаги в евро, золото и акции компании *IBM*, ожидаемые эффективности которых, рассчитанные как средние значения исторических рядов доходностей, составляют 4,20, 6,96, 10,44 и 6,48 % в год соответственно, дисперсии равны 4,15, 7,09, 13,72 и 179,17 соответственно, а ковариации доходностей составляют 1,23 для первого и второго активов, 0,15 – для первого и третьего, –9,80 – для первого и четвертого, 3,46 – для второго и третьего, –6,71 – для второго и четвертого, –16,97 – для третьего и четвертого. Ковариация – это статистическая мера взаимодействия двух случайных величин, в качестве которых в нашем примере выступают доходности двух инструментов i и j. Экономический смысл положительного взаимодействия заключается в том, что рост ожидаемой доходности одного инструмента влечет за собой увеличение доходности другого. Отрицательная ковариация показывает, что доходности двух инструментов связаны между собой в противоположных направлениях. Так, рост ожидаемой доходности одного инструмента будет сопровождаться снижением ожидаемой доходности другого.

Найдем оптимальное распределение долей инвестиционных средств в имеющиеся активы при максимальном уровне доходности и минимальном риске, используя ресурсы системы *Mathematica* [11]. Для этого введем исходные данные:

$$\mathit{In[1]}\texttt{:= v :=} \begin{pmatrix} 4.15 & 1.23 & 0.15 & -9.80 \\ 1.23 & 7.09 & 3.46 & -6.71 \\ 0.15 & 3.46 & 13.72 & -16.97 \\ -9.80 & -6.71 & -16.97 & 179.17 \end{pmatrix}\texttt{; m:={4.2, 6.96, 10.44, 6.48};}$$

```
x:={x1, x2, x3, x4}; i :={1, 1, 1, 1}
```

и решим параметрическую задачу Марковица:

```
In[2]:= opt[k_]:=Minimize[x.v.x-k m.x, i.x==1, x]
```

Одно из парето-оптимальных решений дает рекомендацию вложить 59,27 % в облигации казначейства США, 15,58 % – в бумаги, номинированные в евро, 18,45 % – в золото и 6,70 % – в акции компании *IBM*. Эффективность портфеля при этом составит 5,93 %, а риск – 1,42 %.

Граница парето-оптимальных портфелей при росте его ожидаемой эффективности отображается графически с помощью средств системы *Mathematica* (рис. 1).

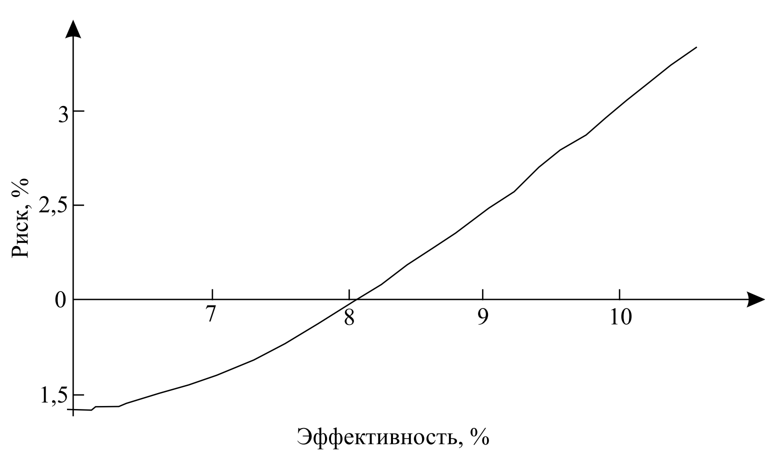

Рис. 1. Граница парето-оптимальных решений

Fig. 1. Pareto optimal solution boundary

Таким образом можно сформировать портфель практически с любой ожидаемой эффективностью, но при этом и риск будет неограниченно расти.

Кусочно-линейные функции, описывающие множество эффективных портфелей, задаются так:

```
In[3]:= Do[g [j_]:=Plot[x[[j]]/.opt[k][[2, j]], {k, 0, 180},
            AxesLabel → {"k", x[[j]]}, PlotStyle → Thickness[0.02/j]], {j, 1, 3}];
In[4]:= Show[{g[1], g[2], g[3]}, AxesLabel → {"k", "∑_i x_i = 1"}]
```

В целях выбора из множества парето-оптимальных решений единственного вводят различные дополнительные критерии. Например, если инвестор – банк, то используется критерии ликвидности, достаточности капитала и др.

С момента выхода работ Г. Марковица, Дж. Тобина, Ш. Шарпа, ставших благодаря портфельной теории лауреатами Нобелевской премии, теория оптимального управления инвестициями оформилась в мощное научное направление, разрабатываемое в десятках монографий, ряде научных журналов и тысячах статей. Несмотря на то что большинство задач портфельной теории – частные случаи оптимизационных задач распределения ресурсов (*allocation problem*), серьезные специалисты в области оптимизации к ним подключились недавно. В Беларуси первый цикл статей «Оптимальный портфель» был опубликован в 1996 г. [12]. В дальнейшем в работе [13] в модель Марковица – Тобина были добавлены дискретные переменные (финансовые активы, как правило, продаются целыми лотами), а квадратичная функция рисков ввиду трудности построения исторических рядов данных была заменена ограничениями диверсификации рисков. Было показано, что данные ограничения задают полиматроид [14]. Таким образом, в портфельной задаче в случае только активных операций однородный полиматроид, заданный одним ограничением,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = K,$$

где K – суммарный инвестируемый капитал, заменялся полиматроидом диверсификации риска

$$\sum_{i \in I} x_i \le r(I) \text{ для } I \in F,$$

где I – множество однотипных финансовых инструментов из множества всех инструментов F. В иных ситуациях использовался обобщенный полиматроид диверсификации риска

$$r^-(I) \le \sum_{i \in I} x_i \le r^+(I) \text{ для } I \in F,$$

где $r^-(I)$, $r^+(I)$ – минимально возможные объемы финансовых операций на рынках с номерами из множества I – максимально возможные объемы финансовых операций на рынках с номерами их множества I (см. [14]). Для подобных задач было предложено программное обеспечение на базе системы *Mathematica* [15].

Позднее для оптимального управления золотовалютными резервами центральных банков на базе модели 3 была построена двухэтапная модель сначала выделялось множество парето-оптимальных решений, а затем из них находились паретовские оптимумы по двум дополнительным критериям (кредитный риск и риск ликвидности) [16; 17]. Об исключительной важности задачи управления иностранными активами центральных банков свидетельствуют размеры самих золотовалютных резервов: у Центрального банка России – 0,5 трлн долл. США, у Китая – более 4,0 трлн долл. США, у Японии – 1,4 трлн долл. США, у Беларуси – 8,5 млрд долл. США.

Представляет интерес развитие классических методов финансового анализа на нечетких множествах для портфельных задач, что приведет к более адекватным моделям с учетом неопределенности будущего.

Нечеткие данные

Нечеткие данные (информация о финансовых рынках всегда носит нечеткий характер) можно представить с помощью нечетких множеств и чисел. Пусть E – множество, $\tilde{A}$ – подмножество E. Тот факт, что элемент x множества E есть элемент подмножества $\tilde{A}$, записывают с помощью характеристической функции

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \tilde{A}, \\ 0, \text{ если } x \notin \tilde{A}. \end{cases}$$

Пусть теперь характеристическая функция принимает значения на отрезке [0; 1]. В связи с этим элемент $x \in E$ может не принадлежать $\tilde{A}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)=0\right)$, в незначительной степени быть элементом $\tilde{A}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right.$ близко к $\left.0\right)$, более или менее принадлежать $\tilde{A}$ или в значительной степени быть элементом $\tilde{A}\left(\mu_{\tilde{A}}(x)=1\right)$. Нечетким множеством $\tilde{A}$ множества E называется пара $\left(\tilde{A}, \mu_{\tilde{A}}\right)$.

Нечеткое число – это нечеткое подмножество $\tilde{A}=\left[a_1;\quad a_3\right]$ множества действительных чисел, имеющее функцию принадлежности $\mu_{\tilde{A}}$. Графическое представление нечеткого числа см. на рис. 2.

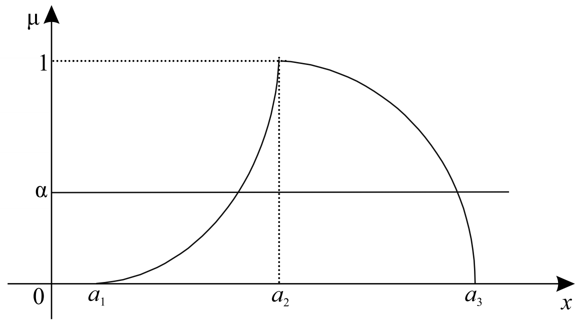

Рис. 2. Графическое представление нечеткого числа
Fig. 2. The graph of a fuzzy number

Простейший способ задания нечеткого числа – представление неточных значений величин с помощью доверительных интервалов. Действительно, есть много ситуаций, для которых с уверенностью можно утверждать, что величина (например, доходность) принадлежит некоторому отрезку $\left[a_1;\quad a_3\right]$, где a_1 – пессимистическая оценка будущей доходности, а a_3 – оптимистическая оценка. Так как на доверительные интервалы можно распространить стандартным образом операции сложения, вычитания, умножения, сравнения, максимума и минимума, то, следовательно, можно попытаться обобщить и основные оптимизационные алгоритмы портфельной теории.

Одно из самых распространенных направлений в теории нечетких множеств – моделирование нечетких ситуаций с помощью нечетких треугольных чисел (НТЧ). НТЧ $\tilde{A}=\left(a_1,\quad a_2,\quad a_3\right)$ представляет нечеткую величину, о которой эксперты уверенно утверждают, что реально величина не может быть меньше a_1 и больше a_3, но с наибольшей вероятностью будет равна a_2. Иными словами, НТЧ есть пессимистическая, наиболее вероятная и оптимистическая оценка нечеткой величины (рис. 3).

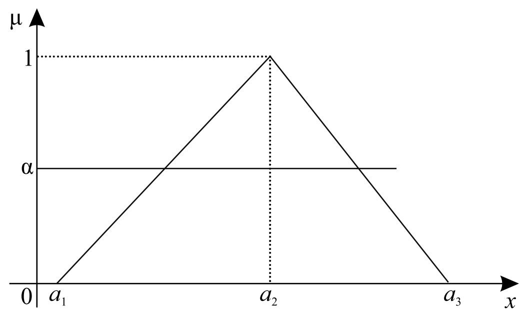

Рис. 3. Графическое представление треугольного нечеткого числа
Fig. 3. The graph of a triangular fuzzy number

Неявно доверительные интервалы (пессимистический и оптимистический прогнозы) и НТЧ (пессимистический, вероятный и оптимистический прогнозы) применяются при составлении прогнозов социально-экономического развития страны.

Основные операции над НТЧ определяются следующим образом:

1) $\tilde{A}(+)\tilde{B}=\left(a_1,\quad a_2,\quad a_3\right)(+)\left(b_1,\quad b_2,\quad b_3\right)=\left(a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad a_3+b_3\right)$;

2) $\tilde{A}(-)\tilde{B}=\left(a_1,\quad a_2,\quad a_3\right)(-)\left(b_1,\quad b_2,\quad b_3\right)=\left(a_1-b_3,\quad a_2-b_2,\quad a_3-b_1\right)$;

3) $\tilde{A}(\times)\tilde{B}=\left(a_1,\quad a_2,\quad a_3\right)(\times)\left(b_1,\quad b_2,\quad b_3\right)=\left(a_1\times b_1,\quad a_2\times b_2,\quad a_3\times b_3\right)$;

$$4)\ \tilde{A}(\div)\tilde{B} = (a_1,\quad a_2,\quad a_3)(\div)(b_1,\quad b_2,\quad b_3) = (a_1 \div b_3,\quad a_2 \div b_2,\quad a_3 \div b_1);$$

$$5)\ k(\times)\tilde{A} = k(\times)(a_1,\quad a_2,\quad a_3) = (k \times a_1,\quad k \times a_2,\quad k \times a_3), k \in R^+.$$

Операцию сравнения НТЧ можно ввести по среднему значению $\tilde{A}_{\text{ср}} = \dfrac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}$:

1) если $\tilde{A}_{\text{ср}} > \tilde{B}_{\text{ср}}$, то полагают, что $\tilde{A} > \tilde{B}$;

2) если $\tilde{A}_{\text{ср}} = \tilde{B}_{\text{ср}}$, $a_2 > b_2$, то полагают, что $\tilde{A} > \tilde{B}$;

3) если $\tilde{A}_{\text{ср}} = \tilde{B}_{\text{ср}}$, $a_2 = b_2$ и $a_3 - a_1 > b_3 - b_1$, то полагают, что $\tilde{A} > \tilde{B}$;

4) если $\tilde{A}_{\text{ср}} = \tilde{B}_{\text{ср}}$, $a_2 = b_2$ и $a_3 - a_1 = b_3 - b_1$,то полагают, что $\tilde{A} = \tilde{B}$.

Простейшая портфельная задача с нечеткими доходностями

Для иллюстрации возможностей теории нечетких чисел рассмотрим простейшую портфельную задачу, в которой доходности – нечеткие числа:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = K,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, ..., n,$$

$$(x_1,\quad x_2,\quad ...,\quad x_n) \in P(r),$$

где K – инвестируемый капитал, $P(r)$ – полиматроид диверсификации риска. Даже в такой простой постановке спрогнозировать функции $\mu_{\tilde{A}}(x_j)$ для будущих доходностей каждого финансового инструмента j практически невозможно. Проще воспользоваться НТЧ.

Пусть каждый i из m экспертов спрогнозировал будущую доходность j-го финансового инструмента в форме НТЧ $\tilde{A}_i^j = (a_1^{ij},\quad a_2^{ij},\quad a_3^{ij})$, где $a_1^{ij},\quad a_2^{ij},\quad a_3^{ij}$ – минимально возможная, наиболее вероятная и максимально возможная будущая доходность j-го инструмента соответственно. Тогда, в соответствии с нашим методом *Fuzzy-delphi*, находим обобщенное мнение экспертов в виде НТЧ:

$$\tilde{A}^j = (a_1^j,\quad a_2^j,\quad a_3^j) = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_1^{ij},\quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_2^{ij},\quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_3^{ij}\right).$$

Заметим, что, согласно методу *Fuzzy-delphi*, процесс может повторяться несколько раз с целью добиться у экспертов меньших колебаний мнений.

В результате получаем задачу оптимизации портфеля с НТЧ представления доходностей:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_1^j,\quad a_2^j,\quad a_3^j) x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = K,$$

$$x_j \geq 0,\quad j = 1, ..., n,$$

$$(x_1,\quad x_2,\quad ...,\quad x_n) \in P(r),$$

где K – инвестируемый капитал, $P(r)$ – полиматроид с субмодулярной функцией диверсификации капитала.

Известно, что в детерминированном случае с четкими доходностями сформулированная задача оптимального портфеля решается градиентным (*greedy*) алгоритмом покоординатного подъема, который в порядке убывания доходностей выбирает максимально возможные значения инструментов [14]. Если использовать операцию сравнения НТЧ, то алгоритм можно распространить и на задачу с нечеткими доходностями. Для этого разработан алгоритм *Fuzzy-greedy*, который заключается в следующем: выбирается инструмент j_1 с наибольшей доходностью $\tilde{A}^{j_1}$ и максимально возможный капитал инвестируется в данный инструмент:

$$x_{\text{opt}}^{j_1} = \max\{x^{j_1} :\quad x \in P(r)\}.$$

Затем выбирается следующий по доходности инструмент j_2, и полагаем, что

$$x_{\text{opt}}^{j_2} = \max\{x^{j_2}: \quad x^{j_1} = x_{\text{opt}}^{j_1}, \quad x \in P(r)\} \text{ и т. д.}$$

Сравнение НТЧ для поиска оптимизирующей перестановки инструментов $(j_1, \quad j_2, \quad ..., \quad j_n)$ можно производить и другими способами, например вычисляя расстояние от каждого нечеткого числа $\tilde{A}^j$ до их верхней границы:

$$\tilde{A}^* = \tilde{A}^1 \vee \tilde{A}^2 \vee \ldots \vee \tilde{A}^n.$$

Расстояние между нечеткими числами $d\left(\tilde{A}^i, \tilde{A}^j\right)$ рассчитывается обычно в метрике Хэмминга. Тогда оптимизирующая перестановка соответствует упорядочению:

$$d\left(\tilde{A}^{j_1}, \tilde{A}^*\right) \le d\left(\tilde{A}^{j_2}, \tilde{A}^*\right) \le \ldots \le d\left(\tilde{A}^{j_n}, \tilde{A}^*\right).$$

Пример. Рассмотрим данный подход на примере оптимизации структуры портфеля инвестора. Предположим, что у инвестора имеются на выбор четыре финансовых инструмента, ожидаемые доходности которых по экспертным оценкам исторических данных показаны в форме НТЧ в табл. 1.

Таблица 1

Ожидаемые доходности финансовых инструментов, представленные НТЧ

Table 1

Expected returns on financial instruments, represented by fuzzy triangular numbers

Вид актива	Ожидаемая доходность, % в год				Средняя доходность, % в год
	НТЧ $\tilde{A}^j$	min a_1^j	вероятная a_2^j	max a_3^j	$\tilde{A}_{\text{ср}} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}$
Акции, номинированные в евро (x_1)	$\tilde{A}^1$	4,97	6,72	7,59	6,50
Билеты казначейства США (x_2)	$\tilde{A}^2$	5,36	6,72	7,20	6,50
Золото (x_3)	$\tilde{A}^3$	9,86	10,10	11,70	10,44
Акции компании *Xerox* (x_4)	$\tilde{A}^4$	3,20	4,10	5,40	4,20

В целях диверсификации риска вложений общего капитала в 100 млн евро введены двусторонние ограничения по масштабам операций по каждому инструменту:

$$15 \le x_1 \le 30, \ 30 \le x_2 \le 65, \ 10 \le x_3 \le 25, \ 0 \le x_4 \le 10,$$

а также по масштабам операций на отдельных рынках:

$$x_1 + x_2 \le 70, \ x_3 + x_4 \ge 15.$$

Данные ограничения задают обобщенный полиматроид диверсификации риска $P\left(r^-, r^+\right)$.

Программа решения задачи с НТЧ разработана на базе системы *Mathematica*. Поскольку НТЧ доходности инвестируемых инструментов сравнимы следующим образом:

$$\tilde{A}^3 > \tilde{A}^1 > \tilde{A}^2 > \tilde{A}^4$$

и аналогичному условию удовлетворяют оптимистические прогнозы экспертов:

$$a_3^3 > a_3^1 > a_3^2 > a_3^4,$$

то оптимальные решения, ориентированные на максимально возможную и среднюю доходности совпадут:

```
In[1]:= x: = { x1, x2, x3, x4 }; i: = { 1, 1, 1, 1}; mmax: = { 0.0759, 0.072, 0.117, 0.054};
In[2]:= Maximize[ mmax.x, {i.x = = 100, 15 ≤ x1 ≤ 30, 30 ≤ x2 ≤ 65, 10 ≤ x3 ≤ 25, 0 ≤ x4 ≤ 10, x1 + x2 ≤ 70,
x3 + x4 ≥ 15}, x]
Out[2]= {8.352, { x1 → 30., x2 → 40., x3 → 25., x4 → 5.}}
```

Таким образом, оптимальное распределение инвестиционных средств по методу *Fuzzy-greedy* в бумаги, номинированные в валюте евро, составит 30 %, в билеты казначейства США – 40 %, в золото – 25 % и в акции компании *Xerox* – 5 %.

Вычислим пессимистическую и наиболее вероятную ожидаемые доходности портфеля:

```
In[4]:= m_min:={0.0497, 0.0536, 0.0986, 0.032}; m_prob:={0.0672, 0.0672, 0.101, 0.041};
In[5]:= m_min .x /. %[[2]]
Out[5]= 6.26
In[6]:= m_prob .x /. %%[[2]]
Out[6]= 7.434
```

Следовательно, доходность портфеля по пессимистическим прогнозам оценивается в 6,26 % в год, по наиболее вероятным оценкам – в 7,434 % в год, а по оптимистическим – в 8,352 % в год.

Замена в модели Марковица нечетких коэффициентов доходности дискретной случайной величиной

Портфельная теория Марковица использует основные статистические показатели, рассчитанные на основе исторических рядов доходностей: арифметическое среднее, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, корреляцию и ковариацию. Однако стоимость финансового актива в будущем – величина неизвестная, которая может колебаться в некоторых пределах и зависеть от субъективных ожиданий участников рынка. В связи с этим в моделях оптимизации портфеля вернее использовать правила теории неопределенности. Так, числовое значение доходности в каждом финансовом секторе можно заменить НТЧ, что отразит более реальный характер поставленной задачи.

Пусть имеются финансовые инструменты с ожидаемыми доходностями, представленными НТЧ $\tilde{A}^j = \left(a_1^j, a_2^j, a_3^j\right)$, экспертные мнения о пессимистической a_1^j, наиболее вероятной a_2^j и оптимистической a_3^j доходностях обобщены (например, методом *Fuzzy-delphi*) и представлены как дискретные случайные величины (ДСВ) в табл. 2.

Таблица 2

Представление НТЧ как ДСВ

Table 2

Representation of fuzzy triangular numbers as discrete random variables

НТЧ (ДСВ)	a_1^j	a_2^j	a_3^j
Вероятность $\left(p_k\right)$	0,05	0,9	0,05

Тогда ожидаемая эффективность портфеля, мера риска (стандартное отклонение) и ковариации будут вычисляться исходя из этих троек. Способ нахождения эффективного множества инвестиций сводится к получению ожидаемой доходности, как обычного четкого числа и матрицы ковариаций, при этом НТЧ интерпретируется как ДСВ.

Подчеркнем, что данный подход необходим в случаях, когда отсутствуют исторические данные либо инвестор больше полагается на мнения экспертов.

Выводы

Используя операции над нечеткими числами, можно обобщать основные оптимизационные алгоритмы портфельной теории Марковица. На их основе созданы программы на базе системы *Mathematica* для решения следующих оптимизационных задач с нечеткими величинами доходности:

1) двухкритериальной задачи оптимальной структуры портфеля;

2) однокритериальной задачи с ограничениями в форме полиматроида диверсификации рисков.

Практическое применение этих алгоритмов, основанных на теории нечетких множеств, позволяет развивать классические методы финансового анализа [18] и получать более адекватные модели с учетом неопределенности будущего.

Библиографические ссылки

1. Zadeh LA. Fuzzy sets. *Information and control*. 1965;8(3):338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
2. Заде ЛА. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. Ринго НИ, переводчик; Колмогоров АН, Новиков СП, редакторы. Москва: Мир; 1976. 168 с.
3. Кофман А. *Введение в теорию нечетких множеств*. Москва: Радио и связь; 1982. 432 с.
4. Силов ВБ. *Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке: в макроэкономике, политике, социологии, менеджменте, экологии, медицине*. Москва: ИНПРО-РЕС; 1995. 228 с.
5. Кофман А, Алуха ХХ. *Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями*. Краснопрошин ВВ, Лепешинский НА, переводчики. Минск: Вышэйшая школа; 1992. 224 с.
6. Лафуенте ХАМ. *Финансовый анализ в условиях неопределенности*. Велесько ЕИ, Краснопрошин ВВ, Лепешинский НА, переводчики. Минск: Тэхналогія; 1998. 150 с. (Новые математические модели и методы в управлении).
7. Аванесов ЭТ, Ковалев ММ, Руденко ВГ. *Инвестиционный анализ*. Минск: БГУ; 2002. 247 с.
8. Шведов АС. *Теория эффективных портфелей ценных бумаг*. Москва: Высшая школа экономики; 1999. 144 с.
9. Markovitz H. Portfolio selection. *Journal of Finance*. 1952;7(1):77–91. DOI: 10.2307/2975974.
10. Подиновский ВВ, Ногин ВД. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва: Наука; 1982. 256 с.
11. Большакова ИВ, Мастяница ВС, составители. *Экономико-математические расчеты в системе Mathematica*. Ковалев ММ, редактор. Минск: БГУ; 2005. 128 с.
12. Ковалев М. Оптимальный портфель. Банковский бюллетень. 1996; 14, 15, 18:76–80, 93–97, 63–71.
13. Ковалев М, Абражевич И. Оптимальное управление портфелем банка. *Банковский вестник*. 1990;8:44–48.
14. Ковалев ММ. *Матроиды в дискретной оптимизации*. Минск: Университетское; 1987. 222 с.
15. Большакова И. Система «Mathematica» для оптимального управления активами и пассивами банка. *Вестник ассоциации белорусских банков*. 2004;13:47–49.
16. Толочко ЮМ. Модель выбора оптимальной валютной структуры. *Банковский вестник*. 2004;19:21–27.
17. Большакова ИВ, Осмоловский АД, Толочко ЮМ. Исследование и практическое применение в банках портфельных моделей. В: *Актуальные проблемы экономической науки и хозяйственной практики. Материалы Международной научной конференции; 15–17 апреля 2004 г.; Санкт-Петербург, Россия. Секции 5–12*. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет; 2004. с. 28–29.
18. Большакова ИВ. Портфельная оптимизация: обзор. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2017;2:4–15.

References

1. Zadeh LA. Fuzzy sets. *Information and control*. 1965;8(3):338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
2. Zadeh LA. *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*. Berkeley: University of California; 1973. 171 p.

Russian edition: Zadeh LA. *Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ee primenenie k prinyatiyu priblizhennykh reshenii*. Ringo NI, translator; Kolmogorov AN, Novikov SP, editors. Moscow: Mir; 1976. 168 p.

3. Kaufmann A. *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous*. Paris: MASSON; 1977.

Russian edition: Kaufmann A. *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv*. Moscow: Radio i svyaz'; 1982. 432 p.

4. Silov VB. *Prinyatie strategicheskikh reshenii v nechetkoi obstanovke: v makroekonomike, politike, sotsiologii, menedzhmente, ekologii, meditsine* [Making strategic decisions in a fuzzy environment: in macroeconomics, politics, sociology, management, ecology, medicine]. Moscow: INPRO-RES; 1995. 228 p. Russian.
5. Kaufmann A, Aluja GL. *Introduccion de la teoria de los subconjuntos borrosos a la gestion de las empresas*. Santiago de Compostela: Editorial Milladoiro; 1986. 249 p.

Russian edition: Kaufmann A, Aluja GL. *Vvedenie teorii nechetkikh mnozhestv v upravlenii predpriyatiyami* [Introduction of the theory of fuzzy sets in enterprise management]. Krasnoproshin VV, Lepeshinskii NA, translators. Minsk: Vyshjejshaja shkola; 1992. 224 p.

6. Lafuente GAM. *Nuevas estrategias para al analisis financiero en la empresa*. Barcelona: Ariel; 2001. 480 p.

Russian edition: Lafuente GAM. *Finansovyi analiz v usloviyakh neopredelennosti* [Financial analysis under conditions of uncertainty]. Velesko EI, Krasnoproshin VV, Lepeshinsky NA, translators. Minsk: Tjehnalogija; 1998. 150 p. (Novye matematicheskie modeli i metody v upravlenii).

7. Avanesov ET, Kovalev MM, Rudenko VG. *Investitsionnyi analiz* [Investment analysis]. Minsk: Belarusian State University; 2002. 247 p. Russian.
8. Shvedov AS. *Teoriya effektivnykh portfelei tsennykh bumag* [The theory of efficient portfolios of securities]. Moscow: Higher School of Economics; 1999. 144 p. Russian.
9. Markovitz H. Portfolio selection. *Journal of Finance*. 1952;7(1):77–91. DOI: 10.2307/2975974.
10. Podinovsky VV, Nogin VD. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions to multicriteria problems]. Moscow: Nauka; 1982. 256 p. Russian.
11. Bolshakova IV, Mastyanitsa VS. *Ekonomiko-matematicheskie raschety v sisteme Mathematic* [Economic and mathematical calculations in the system Mathematica]. Kovalev MM, editor. Minsk: Belarusian State University; 2005. 128 p. Russian.
12. Kovalev M. [Optimal portfolio]. *Bankovskii byulleten'*. 1996; 14, 15, 18:76–80, 93–97, 63–71. Russian.
13. Kovalev M, Abrazhevich I. [Optimal management of the bank's portfolio]. *Bankovskii vestnik*. 1990;6:44–48. Russian.
14. Kovalev MM. *Matroidy v diskretnoi optimizatsii* [Matroids in discrete optimization; monograph]. Minsk: Universitetskoe; 1987. 222 p. Russian.
15. Bolshakova I. System «Mathematica» for optimal management of bank assets and liabilities. *Vestnik assotsiatsii belorusskikh bankov*. 2004;13:47–49. Russian.

16. Tolochko YuM. [Model for choosing the optimal currency structure]. *Bankovskii vestnik*. 2004;19:21–27. Russian.

17. Bolshakova IV, Osmolovsky AD, Tolochko YuM. [Research and practical application of portfolio models in banks]. In: *Aktual'nye problemy ekonomicheskoi nauki i khozyaistvennoi praktiki. Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii; 15–17 aprelya 2004 g.; Sankt-Peterburg, Rossiya. Sektsii 5–12* [Actual problems of economic science and economic practice. Materials of the International scientific conference; 2004 April 15–17; Saint Petersburg, Russia. Sections 5–12]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University; 2004. p. 28–29. Russian.

18. Bolshakova IV. Portfolio optimization: a survey. *Journal of the Belarusian State University. Economics*. 2017;2:4–15. Russian.

Статья поступила в редколлегию 22.07.2020.
Received by editorial board 22.07.2020.