УДК 330.4

C. Математика и количественные методы
C. Mathematical and Quantitative Methods

КЛАССИФИКАЦИЯ САТО – БЕКМАНА УЧЕТА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА: ГЕНЕЗИС, ОБОБЩЕНИЕ И ДОПОЛНЕНИЕ

Г. А. ХАЦКЕВИЧ[1], ***А. Ф. ПРОНЕВИЧ***[2]

[1]*Институт бизнеса Белорусского государственного университета,*
ул. Обойная, 7, 220004, г. Минск, Беларусь
[2]*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,*
ул. Э. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь

Рассмотрены обратные задачи восстановления динамических агрегированных производственных функций, исходя из заданных условий нейтральности научно-технического прогресса. Описаны множества производственных функций, учитывающих научно-технический прогресс, нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу. Приведена классификация Сато – Бекмана нейтральности научно-технического прогресса для линейно-однородных производственных функций. Классификация Сато – Бекмана обобщена и дополнена новыми условиями нейтральности научно-технического прогресса на общий случай аналитического задания динамической производственной функции. Рассмотрен ряд случаев нейтральности научно-технического прогресса, основанных на инвариантных зависимостях между тремя экономико-математическими характеристиками динамической производственной функции: эластичности выпуска по капиталу, эластичности выпуска по труду и фондовооруженности труда (фондоотдаче, производительности труда, средней отдаче обобщенного ресурса). По статистическим данным за 1990–2018 гг., для моделирования экономического роста Республики Беларусь разработана модель динамической производственной функции, учитывающая научно-технический прогресс, нейтральный по Хиксу.

Ключевые слова: научно-технический прогресс; производственная функция; нейтральность по Хиксу; нейтральность по Харроду; нейтральность по Солоу.

Образец цитирования:
Хацкевич ГА, Проневич АФ. Классификация Сато – Бекмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2020;2:4–17.

For citation:
Khatskevich GA, Pranevich AF. Sato – Beckmann classification of accounting for technological progress: genesis, generalisation, and extension. *Journal of the Belarusian State University. Economics.* 2020;2:4–17. Russian.

Авторы:
Геннадий Алексеевич Хацкевич – доктор экономических наук, профессор; заведующий кафедрой бизнес-администрирования.
Андрей Францевич Проневич – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем.

Authors:
Guennadi A. Khatskevich, doctor of science (economics), full professor; head of the department of business administration.
khatskevich@sbmt.by
Andrei F. Pranevich, PhD (mathematics and physics), docent; associate professor at the department of mathematics and computer science for economic systems, faculty of economics and management.
pranevich@grsu.by

SATO − BECKMANN CLASSIFICATION OF ACCOUNTING FOR TECHNOLOGICAL PROGRESS: GENESIS, GENERALISATION, AND EXTENSION

G. A. KHATSKEVICH[a], *A. F. PRANEVICH*[b]

[a]*School of Business, Belarusian State University, 7 Špaliernaja Street, Minsk 220004, Belarus*
[b]*Yanka Kupala State University of Grodno, 22 E. Ažeška Street, Hrodna 230023, Belarus*
Corresponding author: A. F. Pranevich (pranevich@grsu.by)

In this paper, we consider inverse problems of identifying dynamic aggregated production functions from given conditions of neutrality of technological progress. Sets of production functions with Hicks neutral technological progress, Harrod neutral technological progress, and Solow neutral technological progress are described. The Sato – Beckmann classification of neutrality of technological progress for linear-homogeneous production functions is given. The Sato – Beckmann classification is generalised for general case of dynamic production function. Also, we supplemented the Sato – Beckmann classification with new conditions of neutrality of technological progress and obtained the corresponding forms of dynamic production functions. Using dependencies between three economic and mathematical characteristics of dynamic production function (elasticity of output with respect to capital, elasticity of output with respect to labour, and the factor proportions, the output-capital ratio, the output-labour ratio, the average product of generalised factor), we obtain new cases of neutrality of technological progress. By statistical data for 1990–2018, we built the dynamic production function with Hicks neutral technological progress for modeling the economic growth of the Republic of Belarus.

Keywords: technological progress; production function; Hicks neutrality; Harrod neutrality; Solow neutrality.

Введение

Начиная с 1920-х гг. исследователи пытались понять, в чем состоит научно-технический прогресс (НТП) с точки зрения макроэкономической динамики, какие экономические показатели он оставляет неизменными (нейтральными, инвариантными) во времени, а какие изменяет. Одна из первых классификаций НТП была предложена в 1920 г. профессором Кембриджского университета А. С. Пигу в работе «Экономическая теория благосостояния» : «...изобретения или нововведения, уменьшающие отношение капитала к труду в той отрасли, где они внедряются, будут капиталосберегающими, изобретения или нововведения, увеличивающие это отношение, – трудосберегающими, а изобретения или нововведения, оставляющие его неизменным, – нейтральными»[1] [1, p. 719]. В 1932 г. Дж. Р. Хикс в книге «Теория заработной платы», проанализировав разработанный А. С. Пигу подход, подверг его критике и предложил свою классификацию, основанную на изменении с течением времени предельной нормы технического замещения факторов производства: «Если рассматривать два фактора, труд и капитал, то изобретения можно классифицировать в соответствии с тем, увеличивают ли они, оставляют неизменным либо уменьшают отношение предельной производительности капитала к предельной производительности труда по сравнению с ее первоначальным состоянием. Такие изобретения будем называть трудосберегающими, нейтральными и капиталосберегающими соответственно» [2, p. 121–122]. Далее Дж. В. Робинсон в своей монографии «Очерки по теории занятости» при обсуждении влияния технологий на положения долгосрочного равновесия в теории занятости применяла классификацию НТП Хикса при дополнительном условии: «фондовооруженность труда является величиной постоянной» [3, с. 96–97]. В дальнейшем данная модификация определения нейтральности НТП по Хиксу получила широкое распространение (см., например, [4–10]) и сейчас в научной литературе используется в качестве основного понятия.

Идея еще одной классификации НТП была заложена Р. Ф. Харродом в рецензии [11] на книгу Дж. В. Робинсон «Очерки по теории занятости» [3] и позднее в расширенном виде представлена в его монографии «К динамической экономической теории» [12, p. 22–27]. Подробному и глубокому изучению вопросов истории возникновения и становления понятия «нейтральность НТП по Харроду», а также возможности его использования в теории экономического роста (через дискуссии и переписку Р. Ф. Харрода с экономистами Н. Калдором, Р. Ф. Каном, Дж. М. Кейнсом, Дж. В. Робинсон, П. Сраффа, Р. Дж. Хоутри и др.) посвящена работа профессора Д. Бесоми [13].

Понятие «нейтральность НТП по Солоу», которое является симметричным по отношению к понятию «нейтральность НТП по Харроду», было введено и использовано в работе американского экономиста Р. М. Солоу [14].

[1]Здесь и далее перевод наш. – *Г. Х., А. П.*

Вехи становления и развития теории НТП, его влияние на экономический рост, а также обзор научной литературы по этому направлению приведены в монографиях [7–10; 15]. В настоящее время экономико-математический анализ НТП наиболее полно проводится с помощью теории производственных функций [8; 16; 17].

Рассмотрим динамическую агрегированную производственную функцию (ПФ)

$$Y = F(K, L, t), \tag{1}$$

где Y – выпуск продукции, K – капитал, L – труд, t – параметр времени из числового луча $\boldsymbol{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень НТП, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \boldsymbol{R}_+$, экономическая область $G \subset \boldsymbol{R}_+^2 = \{(K, L) : K \geq 0, L \geq 0\}$.

Каждая из динамических двухфакторных ПФ (1) характеризуется рядом экономико-математических показателей [16, с. 47–77; 17, с. 14–31].

1. *Средняя производительность капитала (труда)*

$$AP_K(F) = \frac{F(K, L)}{K} \left(AP_L(F) = \frac{F(K, L)}{L} \right)$$

показывает среднюю отдачу каждой единицы капитала (труда) при заданном уровне НТП.

2. *Предельная производительность капитала (труда)*

$$MP_K(F) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \left(MP_L(F) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \right)$$

приближенно передает, на сколько изменится объем выпуска продукции в случае использования дополнительной единицы капитала (труда) и неизменного количества труда (капитала) при заданном уровне НТП.

3. *Эластичность выпуска по капиталу (труду)*

$$E_K(F) = \frac{MP_K(F)}{AP_K(F)} \equiv \frac{K}{F(K, L)} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \left(E_L(F) = \frac{MP_L(F)}{AP_L(F)} \equiv \frac{L}{F(K, L)} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \right)$$

при заданном уровне НТП приближенно представляет, на сколько процентов изменится объем продукции при изменении капитала (труда) на 1 % и неизменном количестве труда (капитала).

4. *Эластичность производства, или эластичность выпуска по масштабу производства*

$$E(F) = \lim_{t \to 1} \frac{t}{F(tK, tL)} \frac{\partial F(tK, tL)}{\partial t} \equiv E_K(F) + E_L(F)$$

при заданном уровне НТП приближенно показывает, на сколько процентов изменится объем выпуска продукции, если масштаб использования факторов изменится на 1 %.

5. *Предельная норма технического замещения (труда капиталом)*

$$MRTS_{LK}(F) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} : \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}$$

является для ПФ (1) характеристикой первого порядка (относительно производных) и при заданном уровне НТП приближенно показывает, на сколько процентов нужно увеличить или уменьшить применение капитала K при уменьшении или увеличении труда L на 1 %. Графически же характеристика $MRTS$ представляется тангенсом угла наклона касательной к изокванте ПФ в точке, указывающей необходимые объемы труда и капитала для производства заданного объема продукции. Предельная норма технического замещения (замещения капитала труда) $MRTS_{KL}(F) = \dfrac{1}{MRTS_{LK}(F)}$.

6. *Эластичность замещения по Хиксу (замещения труда капиталом)*

$$\sigma(F) = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} : \frac{d\,MRTS_{LK}(F)}{MRTS_{LK}(F)} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln MRTS_{LK}(F)} \text{ при } F(K, L, t) = \text{const}$$

при заданном уровне НТП приближенно показывает, на сколько процентов изменится фондовооруженность труда $k = \frac{K}{L}$, если предельная норма технического замещения $MRTS_{LK}(F)$ изменится на 1 %.

Предполагается, что НТП воздействует на введенные экономико-математические характеристики производственного процесса и приводит к их изменению. Основой для классификации различных типов НТП является сохранение во времени определенных зависимостей между этими характеристиками. Следуя [15, с. 233], НТП будем называть N-нейтральным, если при некоторой функции N имеет место тождество:

$$N\left(AP_K, AP_L, MP_K, MP_L, E_K, E_L, MRTS_{LK}, \sigma, k\right) = 0. \quad (2)$$

Так, при $N_1 = MRTS_{LK} - h(k)$, $N_2 = MP_K - h\left(AP_K\right)$ и $N_3 = MP_L - h\left(AP_L\right)$, где h – некоторая функция, получаем НТП, нейтральный по Хиксу [2, p. 121–122; 7, с. 434], Харроду [12, p. 22–27; 7, с. 435] и Солоу [14; 15, с. 235] соответственно. Например, динамическая ПФ Кобба – Дугласа – Тинбергена [18]

$$Y = aK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t},\ a > 0,\ \alpha, \beta, \gamma \neq 0, \quad (3)$$

учитывает НТП, одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу, так как для нее предельная норма замещения труда капиталом $MRTS_{LK}(Y) = \frac{\beta}{\alpha}k$, а предельные производительности капитала и труда $MP_K(Y) = \alpha AP_K(Y)$ и $MP_L(Y) = \beta AP_L(Y)$.

Общий вид агрегированных динамических ПФ, учитывающих НТП, нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу, описывают теоремы 1 и 2, а классификация типов экономического развития представлена в табл. 1.

Теорема 1. *Динамическая агрегированная ПФ (1) учитывает:*

1) НТП, нейтральный по Хиксу, тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде [19] $Y = \Phi\left(\Psi(K, L), t\right)$, *где* Φ *– некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция переменных* Ψ *и t, а* Ψ *– линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция;*

2) НТП, нейтральный по Харроду, тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде [20] $Y = \Phi\left(K, \Psi(L, t)\right)$, *где* Φ *– некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция переменных K и* Ψ*, а* Ψ *– непрерывно дифференцируемая функция от L и t;*

3) НТП, нейтральный по Солоу, тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде [19] $Y = \Phi\left(\Psi(K, t), L\right)$, *где* Φ *– некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция переменных* Ψ *и L, а* Ψ *– непрерывно дифференцируемая функция от K и t.*

Например, однородную степени $\alpha + \beta$ ПФ Кобба – Дугласа – Тинбергена (3), учитывающую НТП, нейтральный по Солоу, по теореме 1 можно представить как сложную функцию вида (3) с внешней линейно-однородной функцией $\Phi(\Psi, L) = a\Psi^{1-\beta}L^{\beta}$ и внутренней функцией $\Psi(K, t) = K^{\frac{\alpha}{1-\beta}}e^{\frac{\gamma t}{1-\beta}}$.

В случае когда ПФ (1) является линейно-однородной, из теоремы 1 следует теорема 2.

Теорема 2. *Линейно-однородная динамическая ПФ (1) учитывает:*

1) НТП, нейтральный по Хиксу, если и только если она может быть представлена в аналитической форме (см., например, [5]*):* $Y = A(t)\Phi(K, L)$;

2) НТП, нейтральный по Харроду, если и только если она может быть представлена в аналитической форме [21; 4]: $Y = \Phi\left(K, C(t)L\right)$;

3) НТП, нейтральный по Солоу, если и только если она может быть представлена в аналитической форме (см. [5]*):* $Y = \Phi\left(B(t)K, L\right)$, *где* Φ *– неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающие функции A, B и C такие, что* $A(0) = B(0) = C(0) = 1$ *есть индексы НТП.*

Таблица 1

Классификация типов НТП

Table 1

Classification of types of technological progress

Тип НТП	По Хиксу $\left(\frac{K}{L}=\text{const}\right)$	По Харроду $\left(\frac{Y}{K}=\text{const}\right)$	По Солоу $\left(\frac{Y}{L}=\text{const}\right)$
Трудоемкий	$\partial_t MRTS_{LK}(Y)>0$	$\partial_t MP_K(Y)<0$	$\partial_t MP_L(Y)>0$
Нейтральный	$\partial_t MRTS_{LK}(Y)=0$	$\partial_t MP_K(Y)=0$	$\partial_t MP_K(Y)=0$
Капиталоемкий	$\partial_t MRTS_{LK}(Y)<0$	$\partial_t MP_K(Y)>0$	$\partial_t MP_K(Y)<0$

Примечание. Через ∂_t обозначена частная производная по параметру t НТП.

Источник: собственная разработка по материалам монографий [7, с. 433–442; 8, с. 83–91].

Для линейно-однородных динамических ПФ (1) в [5] Р. Сато и М. Бекман в зависимости от инвариантности относительно НТП различных соотношений между основными экономико-математическими характеристиками ПФ ввели всевозможные определения N-нейтральности НТП (рассмотрены 15 случаев) и получили соответствующие им аналитические представления линейно-однородных динамических ПФ. Приведенная классификация различных типов N-нейтральности НТП была апробирована на статистических данных США, Японии и Германии [22]. Аналитические формы линейно-однородных динамических ПФ, которые одновременно учитывают разные типы N-нейтральности по классификации Сато – Бекмана, были выделены в [23].

В данной работе типы нейтральности по классификации Сато – Бекмана обобщены на случай, когда ПФ необязательно являются линейно-однородными. Рассмотрены также случаи нейтральности НТП, не учтенные в этой классификации. Способ нахождения аналитических видов динамических ПФ (1) основан на решении уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик. Статья продолжает исследования [24–28] по выделению аналитических классов ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками.

Классификация Сато – Бекмана, ее обобщение и дополнение

Наиболее полная классификация различных типов N-нейтральности НТП проведена Р. Сато и М. Бекманом в 1968 г. [5] для линейно-однородных ПФ (1) в зависимости от различных двух экономико-математических характеристик, упомянутых ранее и входящих в условие связи (2). Типы N-нейтральности НТП и аналитический вид линейно-однородной ПФ $F(K, L, t)$ представлены в табл. 2. В типах НТП 6, 7, 11 и 12 для ПФ F задана в неявной форме, а в типе 15 F не зависит от параметра t НТП.

Таблица 2

Классификация Сато – Бекмана нейтральности НТП для линейно-однородных ПФ

Table 2

Sato – Beckmann classification of neutrality of technological progress for linear-homogeneous production functions

Тип N-нейтральности	Тип N-нейтральности НТП	Аналитический вид ПФ
1	НТП, нейтральный по Хиксу $MRTS_{KL}(F)=h\left(\frac{L}{K}\right)$	$F(K,L,t)=A(t)\Phi(K,L)$
2	НТП, нейтральный по Харроду $MP_K(F)=h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$F(K,L,t)=\Phi(K,A(t)L)$

Окончание табл. 2
Ending table 2

Тип N-нейтральности	Тип N-нейтральности НТП	Аналитический вид ПФ
3	НТП, нейтральный по Солоу $MP_L(F)=h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$F(K,L,t)=\Phi(A(t)K,L)$
4	$MP_L(F)=h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$F(K,L,t)=\Phi(K,L+A(t)K)$
5	$MP_K(F)=h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$F(K,L,t)=\Phi(K+A(t)L,L)$
6	НТП, нейтральный по анти-Хиксу I $MRTS_{KL}(F)=h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$\varphi\left(\frac{F}{K}\right)+\frac{L}{F}=A(t)$
7	НТП, нейтральный по анти-Хиксу II $MRTS_{LK}(F)=h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$\varphi\left(\frac{F}{L}\right)+\frac{K}{F}=A(t)$
8	$MP_L(F)=h\left(\frac{L}{K}\right)$	$F(K,L,t)=A(t)K+\Phi(K,L)$
9	$MP_K(F)=h\left(\frac{K}{L}\right)$	$F(K,L,t)=A(t)L+\Phi(K,L)$
10	$\sigma(F)=h\left(\frac{L}{K}\right)$	$F(K,L,t)=A(t)K\exp\int\frac{dx}{x+B(t)\exp\int\frac{dx}{xh(x)}}\Big\vert_{x=\frac{L}{K}}$
11	$\sigma(F)=h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$\frac{L}{K}=A(t)\exp\int\frac{dy}{y-B(t)\exp\int\frac{h(y)dy}{y}}\Big\vert_{y=\frac{F}{K}}$
12	$\sigma(F)=h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$\frac{K}{L}=A(t)\exp\int\frac{dz}{z-B(t)\exp\int\frac{h(z)dz}{z}}\Big\vert_{z=\frac{F}{L}}$
13	$\sigma(F)=h(MRTS_{KL}(F))$	$F(K,L,t)=A(t)K\exp\int\frac{dx}{x+h(B(t)x)}\Big\vert_{x=\frac{L}{K}}$
14	НТП, нейтральный по Сато $\sigma(F)=h(E_L(F))$	$F(K,L,t)=\Phi(A(t)K,B(t)L)$
15	$MP_K(F)=h(MP_L(F))$	нет НТП

Примечание. Здесь h и φ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, F и Φ – неотрицательные линейно-однородные непрерывно дифференцируемые функции, A и B – индексы НТП.
Источник: собственная разработка на основании [5].

В классификации Сато – Бекмана особо отметим концепцию нейтральности по Сато (тип НТП 14 в табл. 2): эластичность замещения труда капиталом не изменяется с течением времени при фиксированной эластичности выпуска по труду. Данный тип нейтральности НТП описывается ПФ вида

$F(K, L, t) = \Phi(A(t)K, B(t)L)$, которая определяет капитало- и трудодобавляющий НТП [9, с. 107]. В случае, когда индексы НТП, увеличивающие капитал и труд, равны, т. е. $A(t) = B(t)$, получаем продуктоувеличивающий НТП. А если предположить, что индекс НТП $A(t) = 1$ (индекс НТП $B(t) = 1$), то получим трудодобавляющий НТП (капиталодобавляющий НТП). Таким образом, верно следующее утверждение о связи между подходом, основанном на учете автономного экзогенного НТП, и нейтральностями НТП по Хиксу, Харроду и Солоу.

Предложение [10, с. 74–75]. Пусть динамическая агрегированная ПФ (1) линейно-однородная. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) НТП является нейтральным по Хиксу в том и только в том случае, когда он продуктоувеличивающий;

2) НТП является нейтральным по Харроду тогда и только тогда, когда он трудодобавляющий;

3) НТП является нейтральным по Солоу, если и только если он капиталодобавляющий.

Обобщим первые девять типов нейтральности НТП в классификации Сато – Бекмана (табл. 3) на случай, когда ПФ необязательно линейно-однородная, т. е. на общий случай задания динамической ПФ, а также добавим ряд случаев N-нейтральностей НТП (типы 16–18 в табл. 3), рассмотренных в более поздней работе М. Бекмана [19].

Таблица 3

Обобщенная классификация Сато – Бекмана нейтральности НТП

Table 3

Generalised Sato – Beckmann classification of neutrality of technological progress

Тип N-нейтрализации	Тип N-нейтральности НТП	Аналитический вид ПФ
1	НТП, нейтральный по Хиксу $MRTS_{KL}(F) = h\left(\frac{L}{K}\right)$	$F(K, L, t) = \Psi(\Phi(K, L), t)$ [19, с. 12–15]
2	НТП, нейтральный по Харроду $MP_K(F) = h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K, \Psi(L, t))$ [20]
3	НТП, нейтральный по Солоу $MP_L(F) = h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(\Psi(K, t)L)$ [19, с. 9–11]
4	$MP_L(F) = h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K, L + K\Psi(K, t))$
5	$MP_K(F) = h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K + L\Psi(L, t)L)$
6	НТП, нейтральный по анти-Хиксу I $MRTS_{KL}(F) = h\left(\frac{Y}{K}\right)$	$\varphi\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{L}{F} + \psi(F, t) = 0$
7	НТП, нейтральный по анти-Хиксу II $MRTS_{LK}(F) = h\left(\frac{Y}{L}\right)$	$\varphi\left(\frac{F}{L}\right) + \frac{K}{F} + \psi(F, t) = 0$
8	$MP_L(F) = h\left(\frac{L}{K}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K, L) + \Psi(K, t)$
9	$MP_K(F) = h\left(\frac{K}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K, L) + \Psi(L, t)$

Окончание табл. 3
Ending table 3

Тип *N*-нейтрализации	Тип *N*-нейтральности НТП	Аналитический вид ПФ
16	$L \cdot MP_L(F) = h(F)$	$F(K, L, t) = \varphi(L\,\psi(K, t))$ [19, с. 5–7]
17	$E_L(F) = h(L)$	$F(K, L, t) = \varphi(K, t)\psi(L)$ [19, с. 8–9]
18	НТП, нейтральный по Бекману $\sigma(F) = h\left(\frac{K}{L} MRTS_{KL}(F)\right)$	$F(K, L, t) = \Psi(\Phi(A(t)K, L)t)$ [19, с. 15–19]
19	$L \cdot MP_L(F) = h\left(\frac{F}{K}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K, \ln L + K\Psi(K, t))$
20	$L \cdot MP_L(F) = h(L)$	$F(K, L, t) = \varphi(L) + \psi(K, t)$
21	$L \cdot MP_L(F) = h(K)$	$F(K, L, t) = h(K)\ln L + \Psi(K, t)$
22	$K \cdot MP_K(F) = h(F)$	$F(K, L, t) = \varphi(K\psi(L, t))$
23	$K \cdot MP_K(F) = h\left(\frac{F}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(\ln K + L\Psi(L, t)L)$
24	$K \cdot MP_K(F) = h(L)$	$F(K, L, t) = h(L)\ln K + \Psi(L, t)$
25	$K \cdot MP_K(F) = h(K)$	$F(K, L, t) = \varphi(K) + \psi(L, t)$
26	$E_L(F) = h(K)$	$F(K, L, t) = \Psi(K, t)\exp(h(K)\ln L)$
27	$E_L(F) = h\left(\frac{K}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \varphi\left(\frac{K}{L}\right)\psi(K, t)$
28	$E_L(F) = h\left(\frac{F}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(\Psi(K, t)L)$
29	$E_L(F) = h\left(\frac{F}{K}\right)$	$F(K, L, t) = K \cdot \psi(\ln L + \varphi(K, t))$
30	$E_K(F) = h(K)$	$F(K, L, t) = \varphi(L, t) \cdot \psi(K)$
31	$E_K(F) = h(L)$	$F(K, L, t) = \Psi(L, t)\exp(h(L)\ln K)$
32	$E_K(F) = h\left(\frac{K}{L}\right)$	$F(K, L, t) = \varphi\left(\frac{K}{L}\right)\psi \cdot (L, t)$
33	$E_K(F) = h\left(\frac{F}{K}\right)$	$F(K, L, t) = \Phi(K, \Psi(L, t))$
34	$E_K(F) = h\left(\frac{F}{L}\right)$	$F(K, L, t) = L \cdot \psi(\ln K + \varphi(L, t))$

Примечание. Здесь h, φ, ψ, F и Ψ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, Φ – некоторая линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, A – индекс НТП.

Источник: собственная разработка; для типов НТП 1–3 и 16–18 использованы результаты [19; 20].

Новые типы (19–34 (см. табл. 3)) N-нейтральности НТП основаны на функциональной связи между одной или двумя экономико-математическими характеристиками ПФ (1). При этом для установления аналитических форм ПФ, соответствующих N-нейтральности НТП, используем метод характеристик решения уравнений в частных производных.

Рассмотрим ряд типов N-нейтральности НТП, основанных на инвариантных зависимостях (2) между тремя экономико-математическими характеристиками ПФ (1): эластичностью выпуска по капиталу $E_K(F)$, эластичностью выпуска по труду $E_L(F)$ и фондовооруженностью труда (фондоотдачей, производительностью труда, средней отдачей обобщенного ресурса). НТП является:

1) *TEP_1-нейтральным* (*Total Elasticity of Production*), если эластичность производства $E(F) = E_K(F) + E_L(F)$ не изменяется с течением времени при фиксированной фондовооруженности труда, т. е. $E(F) = \text{const}$ при $\frac{K}{L} = \text{const}$;

2) *TEP_2-нейтральным* в случае, когда эластичность производства $E(F)$ с течением времени остается прежней при фиксированной фондоотдаче, т. е. $E(F) = \text{const}$ при $\frac{Y}{K} = \text{const}$;

3) *TEP_3-нейтральным*, если эластичность $E(F)$ не изменяется с течением времени при фиксированной производительности труда, т. е. $E(F) = \text{const}$ при $\frac{Y}{L} = \text{const}$;

4) *TEP_4-нейтральным*, если значение эластичности производства $E(F)$ сохраняется с течением времени при фиксированной средней отдаче обобщенного ресурса (в качестве такого обобщенного ресурса чаще всего рассматривается себестоимость продукции), т. е. $E(F) = \text{const}$ при $\frac{Y}{\alpha K + \beta L} = \text{const}(\alpha, \beta > 0)$.

Аналитические виды ПФ (1), учитывающие TEP_1–TEP_4-нейтральные НТП, описываются следующими утверждениями (см. теоремы 3–6, следствия 1 и 2).

Теорема 3. *Динамическая ПФ (1) учитывает TEP_1-нейтральный НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде*

$$F(K, L, t) = \Psi\left(\frac{K}{L}, t\right)\exp\left(h\left(\frac{K}{L}\right)\ln L\right), \tag{4}$$

где Ψ – некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. По определению TEP_1-нейтральности НТП получаем, что ПФ (1) учитывает TEP_1-нейтральный НТП, если и только если при некоторой непрерывно дифференцируемой функции h имеет место тождество $E(F) = h\left(\frac{K}{L}\right)$.

Необходимость. Пусть ПФ (1) учитывает TEP_1-нейтральный НТП. Докажем, что динамическую ПФ (1) можно представить в аналитической форме (4). Для этого решим уравнение в частных производных первого порядка

$$K\,\partial_K F + L\,\partial_L F = Fh\left(\frac{K}{L}\right) \tag{5}$$

с характеристической системой

$$\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L} = \frac{dt}{0} = \frac{dF}{Fh\left(\frac{K}{L}\right)}. \tag{6}$$

Из уравнений $\frac{dK}{K} = \frac{dL}{L}$ и $\frac{dL}{L} = \frac{dt}{0}$ находим первые интегралы $\frac{K}{L} = C_1$ и $t = C_2$ системы (6), где C_1 и C_2 – произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Из обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{dL}{L}=\frac{dF}{Fh\left(\frac{K}{L}\right)}$, с учетом того что $K=C_1L$, определяем первый интеграл $F\cdot L^{-h(C_1)}=C_3$, или $F\cdot L^{-h\left(\frac{K}{L}\right)}=C_3$, где C_3 – произвольная неотрицательная вещественная постоянная.

Будучи функционально независимыми, первые интегралы $\frac{K}{L}=C_1$, $t=C_2$ и $F\cdot\exp\left(-h\left(\frac{K}{L}\right)\ln L\right)=C_3$ образуют интегральный базис характеристической системы (6). Тогда соотношение

$$V\left(\frac{K}{L},\, t,\, F\cdot\exp\left(-h\left(\frac{K}{L}\right)\ln L\right)\right)=0, \tag{7}$$

где V – произвольная дифференцируемая функция трех аргументов, задает в неявном виде решение квазилинейного уравнения (5). При этом на основании теоремы 3.1 из [29, с. 340–341] заключаем, что соотношение (7) определяет общее решение квазилинейного уравнения (5). Ограничиваясь только теми функциями V, для которых функциональное уравнение (7) можно разрешить относительно третьего аргумента (см., например, [30, с. 544–551], получаем решение уравнения (5) в явном виде (4).

Достаточность. Пусть динамическую ПФ (1) возможно представить в аналитической форме (4). Тогда эластичность производства

$$E(F)=\frac{1}{F(K,L,t)}\big(K\,\partial_K F(K,L,t)+L\,\partial_L F(K,L,t)\big)=$$

$$=\frac{1}{F(K,L,t)}\Big(\big(u\cdot\Psi'(u)\exp\big(h(u)\ln L\big)+u\cdot\ln L\,h'(u)F(K,L,t)\big)-$$

$$-\big(u\cdot\Psi'(u)\exp\big(h(u)\ln L\big)+u\cdot\ln L\,h'(u)F(K,L,t)-h(u)\,F(K,L,t)\big)\Big)\Big|_{u=\frac{K}{L}}=h\left(\frac{K}{L}\right),$$

а значит, ПФ (4) учитывает TEP_1-нейтральный НТП.

Отметим, что в классе динамических ПФ (4), учитывающих TEP_1-нейтральный НТП, содержится множество однородных ПФ степени $q\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ относительно факторов производства K и L, где $\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел. При $h\left(\frac{K}{L}\right)=q$ имеем

$$F(K,L,t)=\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)\exp(q\ln L)=L^q\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)=L^q\,\Phi\left(\frac{K}{L},1,t\right)=\Phi(K,L,t),$$

где Φ – произвольная неотрицательная однородная степени, q – непрерывно дифференцируемая функция.

Класс ПФ, который учитывает TEP_2-нейтральный НТП, описывает теорема 4.

Теорема 4. *Динамическая ПФ (1) учитывает TEP_2-нейтральный НТП, если и только если ее можно представить в аналитической форме*

$$F(K,L,t)=\Phi\left(K,\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)\right), \tag{8}$$

где Φ – некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а Ψ – непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. По определению TEP_2-нейтральности НТП, получаем, что ПФ (1) учитывает TEP_2-нейтральный НТП, если и только если при некоторой непрерывно дифференцируемой функции h имеет место тождество $E(F)=h\left(\frac{F}{K}\right)$.

Необходимость. Пусть ПФ (1) учитывает TEP_2-нейтральный НТП. Докажем, что динамическую ПФ (1) можно представить в аналитической форме (8). Для этого решим уравнение в частных производных первого порядка

$$K\,\partial_K F+L\,\partial_L F=Fh\left(\frac{F}{K}\right) \tag{9}$$

с характеристической системой

$$\frac{dK}{K}=\frac{dL}{L}=\frac{dt}{0}=\frac{dF}{Fh\left(\frac{F}{K}\right)}. \tag{10}$$

Из уравнений $\frac{dK}{K}=\frac{dL}{L}$ и $\frac{dL}{L}=\frac{dt}{0}$ находим первые интегралы $\frac{K}{L}=C_1$ и $t=C_2$ системы (10), где C_1 и C_2 – произвольные неотрицательные вещественные постоянные.

Дифференциальное уравнение $\frac{dF}{dK}=\frac{F}{K}h\left(\frac{F}{K}\right)$, введя новую переменную $\xi=\frac{F}{K}$ и разделив переменные, перепишем в виде $\frac{dK}{K}=\frac{d\xi}{\xi\left(h(\xi)-1\right)}$. Откуда $\ln K+\int\frac{d\xi}{\xi\left(1-h(\xi)\right)}=\tilde{C}_3$ или $K\cdot H(\xi)=C_3$, где положено $H(\xi)=\exp\int\frac{d\xi}{\xi\left(1-h(\xi)\right)}$ (по теореме Барроу, H – непрерывно дифференцируемая функция), а $C_3=\exp\tilde{C}_3$ ($\tilde{C}_3$– произвольные вещественные постоянные).

Будучи функционально независимыми, первые интегралы $\frac{K}{L}=C_1, t=C_2$ и $K\cdot H\left(\frac{F}{K}\right)=C_3$ образуют интегральный базис системы (10). Тогда соотношение

$$V\left(\frac{K}{L},\, t,\, K\cdot H\left(\frac{F}{K}\right)\right)=0, \tag{11}$$

где V – произвольная дифференцируемая функция трех аргументов, задает в неявном виде решение квазилинейного уравнения (9). При этом на основании теоремы 3.1 из [29, с. 340–341] заключаем, что соотношение (11) определяет общее решение квазилинейного уравнения (9). Ограничиваясь только теми функциями V, для которых функциональное уравнение (11) можно разрешить относительно третьего аргумента (см., например, [30, с. 544–551]), получаем $H\left(\frac{F}{K}\right)=\frac{1}{K}\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)$, а основываясь на теореме о существовании обратной функции (см., например, [31, с. 132–133]), имеем:

$$F(K,L,t)=KH^{-1}\left(\frac{\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)}{K}\right)=K\Phi\left(\frac{1,\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)}{K}\right)=\Phi\left(K,\Psi\left(\frac{K}{L},t\right)\right),$$

где Ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, H^{-1} – обратная к H функция, а Φ – неотрицательная линейно-однородная функция.

Достаточность. Пусть ПФ (1) имеет представление (8). Повторяя проведенные выше вычисления в обратном порядке, получаем, что функция (8) является решением уравнения (9), а значит, учитывает TEP_2-нейтральности НТП.

Используя понятие квазиоднородной ПФ [24; 25], сформулируем следствие 1.

Следствие 1. *Квазиоднородная ПФ (1) степени* $q\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ *относительно весового вектора* $g=(q,g_2)$, $g_2\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, $g_2\neq q$, *учитывает* TEP_2*-нейтральный НТП, если и только если она может быть представлена в аналитической форме:*

$$F(K,L,t)=\Phi\left(K,\,A(t)\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{q}{(q-g_2)}}\right), \tag{12}$$

где Φ *– некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а возрастающая функция* A *– индекс НТП.*

Доказательство. По теореме 4, ПФ (1) учитывает TEP_2-нейтральный НТП, если и только если ее можно представить в виде (8). Из квазиоднородности степени q относительно весового вектора $g=(g_1,g_2)$ функции (1)

$$F\left(\lambda^{g_1}K, \lambda^{g_2}L, t\right) = \lambda^q F(K, L, t),\ \forall\lambda \in (0;+\infty),$$

на основании аналитического представления (8) получаем, что левая часть

$$F\left(\lambda^{g_1}K, \lambda^{g_2}L, t\right) = \Phi\left(\lambda^{g_1}K, \Psi\left(\lambda^{g_1-g_2}\frac{K}{L}, t\right)\right),\ \forall\lambda \in (0;+\infty),$$

правая часть

$$\lambda^q F(K, L, t) = \lambda^q\,\Phi\left(K, \Psi\left(\frac{K}{L}, t\right)\right) = \Phi\left(\lambda^q K, \lambda^q\Psi\left(\frac{K}{L}, t\right)\right),\ \forall\lambda \in (0;+\infty),$$

а значит, $g_1 = q$, функция Ψ является однородной степени $m = \dfrac{q}{g_1 - g_2}$. Поэтому верно аналитическое представление

$$F(K, L, t) = \Phi\left(K, \Psi\left(\frac{K}{L}, t\right)\right) = \Phi\left(K\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{q}{g_1-g_2}}, \Psi(1, t)\right) = \Phi\left(K, A(t)\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{q}{g_1-g_2}}\right),$$

где положено, что функции $A(t) = \Psi(1, t)$. Таким образом, верно представление (12).

Аналогично теореме 4 и следствию 1 доказываются теорема 5 и следствие 2.

Теорема 5. *Динамическая ПФ* (1) *учитывает* TEP_3*-нейтральный НТП, если и только если ее можно представить в аналитической форме*

$$F(K, L, t) = \Phi\left(\Psi\left(\frac{K}{L}, t\right), L\right),$$

где Φ *– некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а* Ψ *– непрерывно дифференцируемая функция.*

Следствие 2. *Квазиоднородная ПФ* (1) *степени* $q \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ *относительно весового вектора* $g = (g_1, q)$, $g_1 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $g_1 \neq q$, *учитывает* TEP_3*-нейтральный НТП, если и только если она может быть приведена в аналитической форме:*

$$F(K, L, t) = \Phi\left(A(t)\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{q}{g_1-g_2}}, L\right),$$

где Φ *– некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а возрастающая функция* A *– индекс НТП.*

Методом, аналогичным использованному в теореме 4, доказывается теорема 6.

Теорема 6. *Динамическая ПФ* (1) *учитывает* TEP_4*-нейтральный НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитической форме*

$$F(K, L, t) = (\alpha K + \beta L) H\left(\Phi(K, L, t)\right),$$

где Φ *– некоторая линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а* H *– неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента.*

Заключение

В статье описаны множества динамических агрегированных ПФ, учитывающих НТП, нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу (см. теоремы 1 и 2, табл. 1). Приведена классификация Сато – Бекмана нейтральности НТП для линейно-однородных ПФ (см. табл. 2). Классификация Сато – Бекмана обобщена (см. табл. 3) и дополнена новыми условиями нейтральности НТП (см. табл. 4) на общий случай аналитического задания динамической ПФ. Рассмотрен ряд случаев нейтральности НТП, основанных на инвариантных зависимостях между тремя экономико-математическими характеристиками динамической ПФ: эластичностью выпуска по капиталу, эластичностью выпуска по труду и фондовооруженностью труда (см. теорему 3), фондоотдачей (см. теорему 4 и следствие 1), производительностью труда (см. теорему 5 и следствие 2), средней отдачей обобщенного ресурса (см. теорему 6).

Полученные в работе результаты могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов, учитывающих НТП. В качестве примера приведем разработанную нами модель динамической ПФ вида (1), учитывающую НТП, нейтральный по Хиксу, с постоянной эластичностью замещения факторов производства для экономики Республики Беларусь по статистическим данным за 1990–2018 гг. на основе информации Всемирного банка[2] в индексной форме методом Кменты [32]:

$$Y = 0{,}83e^{0{,}02t}\left(0{,}3K^{0{,}8} + 0{,}7L^{0{,}8}\right)^{\frac{-1}{0{,}8}},\ R_2 = 0{,}986,\ DW = 1{,}52.$$

С точки зрения статистики R^2 и DW зависимость получилась значимой. С помощью статистического пакета *EViews* проверено выполнение модельных предпосылок, выполнена компьютерная реализация метода Кменты на языке программирования *Python*. На основании модели установлено, что экономика Республики Беларусь имеет небольшой ежегодный темп прироста индекса НТП $\lambda = 0{,}02$ и невысокую степень взаимозаменяемости труда и капитала (показатель эластичности замещения факторов производства $\sigma = \frac{1}{1+0{,}8} = 0{,}56$).

Библиографические ссылки

1. Pigou AC. *The economics of welfare*. London: Macmillan; 1920. 953 p.
2. Hicks JR. *The theory of wages*. London: Macmillan; 1932. 247 p.
3. Robinson J. *Essays in the theory of employment*. London: Macmillan; 1937. 255 p.
4. Uzawa H. Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *The Review of Economic Studies*.1961;28(2):117–124. DOI: 10.2307/2295709.
5. Sato R, Beckmann MJ. Neutral inventions and production functions. *The Review of Economic Studies*.1968;35(1):57–66. DOI: 10.2307/2974407.
6. Stiglitz JE, Uzawa H, editors. *Readings in the modern theory of economic growth*. Cambridge: MIT Press; 1969. 497 p.
7. Дадаян ВС, редактор. *Моделирование народно-хозяйственных процессов.* Москва: Экономика; 1973. 479 с.
8. Плакунов МК, Раяцкас РЛ. *Производственные функции в экономическом анализе*. *Production functions in economic analysis*. Вильнюс: Минтис; 1984. 308 с.
9. Барро РДж, Сала-и-Мартин Х. *Экономический рост.* Серова ЮА, редактор; Моисеев АН, Капустина ОВ, переводчики. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2017. 824 с.
10. Курзенев ВА, Матвеенко В. *Экономический рост.* Санкт-Петербург: Питер; 2018. 608 с.
11. Harrod RF. Essays in the theory of employment by Joan Robinson*. The Economic Journal*. 1937;47(186):326–330. DOI: 10.2307/2225532.
12. Harrod RF. *Towards a dynamic economics*. London: Macmillan; 1948. 169 p.
13. Besomi D. Harrod on the classification of technological progress. The origin of a wild-goose chase. Roncaglia A, editor. *Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review*. 1999;52:95–117.
14. Solow RM. Technical progress, capital formation, and economic growth. American Economic Association. *The American Economic Review*. 1962;52(2):76–86.
15. Ашманов СА. *Введение в математическую экономику.* Москва: Наука; 1984. 296 с.
16. Клейнер ГБ. *Производственные функции: теория, методы, применение.* Москва: Финансы и статистика; 1986. 239 с.
17. Горбунов ВК. *Производственные функции: теория и построение.* Ульяновск: Ульяновский государственный университет; 2013. 84 с.
18. Tinbergen J. Professor Douglas' production function. International Statistical Institute. *Review of the International Statistical Institute.* 1942;10(1/2):37–48. DOI: 10.2307/1401184.
19. Beckmann MJ. Invariant relationships for homothetic production functions. In: *Production theory. Proceedings of an International seminar held at the University of Karlsruhe; 1973 May – July; Karlsuhe, Germany. Lecture notes in economics and mathematical systems: mathematical economics.* Karlsruhe: University of Karlsruhe; 1974;99:3–20.
20. Morimoto Y. Neutral technical progress and the separability of the production function. *The Economic Studies Quarterly*. 1974;25(3):66–69.
21. Robinson J. The classification of inventions. *The Review of Economic Studies.* 1938;5(2):139–142.
22. Beckmann MJ, Sato R. Aggregate production functions and types of technical progress: a statistical analysis. *The American Economic Review*. 1969;59(1):88–101.
23. Gehrig W. On certain concepts of neutral technical progress: definitions, implications and compatibility. In: Puu T, Wibe S, editors. *The economics of technological progress*: *Proceedings of a conference held by the European Production Study Group in Umea; 1978 August 23–25; Umea, Sweeden.* London: The Macmillan press LTD; 1980. p. 3–21.
24. Хацкевич ГА, Проневич АФ. Квазиоднородные производственные функции единичной эластичности замещения факторов по Хиксу. *Экономика, моделирование, прогнозирование.* 2017;11:135–140.
25. Khatskevich GA, Pranevich AF. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution. *Journal of Belarusian State University. Economics*. 2017;1:46–50.
26. Khatskevich GA, Pranevich AF. Production functions with given elasticities of output and production. *Journal of Belarusian State University. Economics*. 2018;2:13–21.
27. Khatskevich G, Pranevich A, Karaleu Yu. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019;1052:276–285.
28. Хацкевич ГА, Проневич АФ, Чайковский МВ. Двухфакторные производственные функции с заданной предельной нормой замещения. *Экономическая наука сегодня.* 2019;10:171–182.

[2]Всемирный банк [Электронный ресурс]. URL: https://www.worldbank.org/ (дата обращения 15.03.2020).

29. Егоров АИ. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями.* Москва: Физматлит; 2007. 448 с.
30. Ильин ВА, Позняк ЭГ. *Основы математического анализа. Часть I.* Москва: Наука; 2000. 616 с.
31. Фихтенгольц ГМ. *Основы математического анализа. Том 1.* Санкт-Петербург: Лань; 2001. 448 с.
32. Kmenta J. On estimation of the CES production function. *International Economic Review*. 1967;8:180–189. DOI: 10.2307/2525600.

References

1. Pigou AC. *The economics of welfare*. London: Macmillan; 1920. 953 p.
2. Hicks JR. *The theory of wages*. London: Macmillan; 1932. 247 p.
3. Robinson J. *Essays in the theory of employment*. London: Macmillan; 1937. 201 p.
4. Uzawa H. Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *The Review of Economic Studies*. 1961;28(2):117–124. DOI: 10.2307/2295709.
5. Sato R, Beckmann MJ. Neutral inventions and production functions. *The Review of Economic Studies*. 1968;35(1):57–66. DOI: 10.2307/2974407.
6. Stiglitz JE, Uzawa H, editors. *Readings in the modern theory of economic growth*. Cambridge: MIT Press; 1969. 497 p.
7. Dadajan VS, editor. *Modelirovanie narodno-khozyaistvennykh protsessov* [Modeling of national economic processes]. Moscow: Ekonomika; 1973. 479 p. Russian.
8. Plakunov MK, Rayatskas RL. *Production functions in economic analysis*. Vilnius: Mintis; 1984. 308 p. Russian.
9. Barro RJ, Sala-i-Martin X. *Economic growth.* New York: McGraw-Hill; 1995. 539 p.
Russian edition: Barro RJ, Sala-i-Martin X. *Ekonomicheskii rost.* Serova YuA, editor; Moiseev AN, Kapustina OV, translators. Moscow: BINOM. Laboratoriya znanii; 2017. 824 p.
10. Kurzenev VA, Matveenko VD. *Ekonomicheskii rost* [Economic growth]. Saint-Petersburg: Piter; 2018. 608 p. Russian.
11. Harrod RF. Essays in the theory of employment by Joan Robinson. *The Economic Journal*. 1937;47(186):326–330. DOI: 10.2307/2225532.
12. Harrod RF. *Towards a dynamic economics*. 1st edition. London: Macmillan; 1948. 169 p.
13. Besomi D. Harrod on the classification of technological progress. The origin of a wild-goose chase. Roncaglia A, editor. *Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review*. 1999;52(208):95–117.
14. Solow RM. Technical progress, capital formation, and economic growth. American Economic Association. *The American Economic Review*. 1962;52(2):76–86.
15. Ashmanov SA. *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to mathematical economics]. Moscow: Nauka; 1984. 296 p. Russian.
16. Kleyner GB. *Proizvodstvennye funktsii: teoriya, metody, primenenie* [Production functions: theory, methods, application]. Moscow: Finansy i statistika; 1986. 239 p. Russian.
17. Gorbunov VK. *Proizvodstvennye funktsii: teoriya i postroenie* [Production functions: theory and construction]. Ulyanovsk: Ul'yanovskii gosudarstvennyi universitet; 2013. 84 p. Russian.
18. Tinbergen J. Professor Douglas' production function. International Statistical Institute. *Review of the International Statistical Institute.* 1942;10(1/2):37–48. DOI: 10.2307/1401184.
19. Beckmann MJ. Invariant relationships for homothetic production functions. In: *Production theory. Proceedings of an International seminar held at the University of Karlsruhe; 1973 May – July; Karlsuhe, Germany. Lecture notes in economics and mathematical systems: mathematical economics.* Karlsruhe: University of Karlsruhe; 1974;99:3–20.
20. Morimoto Y. Neutral technical progress and the separability of the production function. *The Economic Studies Quarterly*. 1974;25(3):66–69.
21. Robinson J. The classification of inventions. *The Review of Economic Studies.* 1938;5(2):139–142.
22. Beckmann MJ, Sato R. Aggregate production functions and types of technical progress: a statistical analysis. *The American Economic Review*. 1969;59(1):88–101.
23. Gehrig W. On certain concepts of neutral technical progress: definitions, implications and compatibility. In: Puu T, Wibe S, editors. *The economics of technological progress*: *Proceedings of a conference held by the European Production Study Group in Umea; 1978 August 23–25; Umea, Sweeden.* London: The Macmillan press LTD; 1980. p. 3–21.
24. Khatskevich GA, Pranevich AF. [Quasi-homogeneous production functions with unit elasticity of factors substitution by Hicks]. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie*. 2017;11:135–140. Russian.
25. Khatskevich GA, Pranevich AF. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution. *Journal of Belarusian State University. Economics*. 2017;1:46–50.
26. Khatskevich GA, Pranevich AF. Production functions with given elasticities of output and production. *Journal of Belarusian State University. Economics*. 2018;2:13–21.
27. Khatskevich G, Pranevich A, Karaleu Yu. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019;1052:276–285.
28. Khatskevich GA, Pranevich AF, Chaykovskiy MV. Two-factor production functions with given marginal rate of substitution. *Ekonomicheskaya nauka segodnya.* 2019;10:171–182. Russian.
29. Egorov AI. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya s prilozheniyami* [Ordinary differential equations with applications]. Moscow: Fizmatlit; 2007. 448 p. Russian.
30. Il'in VA, Pozniak EG. *Osnovy matematicheskogo analiza. Chast' I* [Fundamentals of mathematical analysis. Part I]. Moscow: Nauka; 2000. 616 p. Russian.
31. Fikhtengol'ts GM. *Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1* [Fundamentals of mathematical analysis. Volume 1]. Saint-Petersburg: Lan'; 2001. 448 p. Russian.
32. Kmenta J. On estimation of the CES production function. *International Economic Review*. 1967;8:180–189. DOI: 10.2307/2525600.

Статья поступила в редколлегию 19.10.2020.
Received by editorial board 19.10.2020.