

СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ k КОММИВОЯЖЕРОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТОВ ДОСТАВКИ

С. Р. ДУТИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Строится сетевая модель задачи k коммивояжеров для оптимизации маршрутов доставки в электронной торговле. Предлагаются приближенные и точные методы поиска оптимальных или квазиоптимальных маршрутов для данной модели. Задача маршрутизации доставки имеет важное практическое значение в связи с быстрым ростом электронной торговли и является недостаточно исследованной ввиду ее новизны.

Ключевые слова: логистика электронной торговли; задача k коммивояжеров; метод ветвей и границ; муравьиный алгоритм; жадный алгоритм; кластерный алгоритм.

NETWORK MODEL AND METHODS FOR SOLVING THE k TRAVELLING SALESMAN PROBLEM FOR OPTIMISATION OF DELIVERY ROUTES

S. R. DUTIN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The article formulates a network model of the k travelling salesman problem for optimisation of delivery routes in electronic commerce. Approximate and exact methods of searching for optimal or quasi-optimal routes are proposed for the constructed model. The task of routing delivery is of great practical importance due to the rapid growth of e-commerce and it has not been sufficiently investigated due to the novelty.

Keywords: e-commerce logistics; k travelling salesman problem; branch and boundary method; ant algorithm; greedy algorithm; cluster algorithm.

Введение

Стремительный рост электронной торговли обусловил появление нового сектора транспортной логистики – доставки товаров со складов покупателям. Многие прогнозируют исчезновение в будущем традиционных супермаркетов (особенно продовольственных) и их замену цифровой торговлей и цифровой логистикой доставки. Покупатель будет выбирать товары не в магазине, а на цифровом

Образец цитирования:

Дутин СР. Сетевая модель и методы решения задачи k коммивояжеров для оптимизации маршрутов доставки. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2023;2:20–24.
EDN: PQHBZW

For citation:

Dutin SR. Network model and methods for solving the k travelling salesman problem for optimisation of delivery routes. *Journal of the Belarusian State University. Economics*. 2023; 2:20–24. Russian.
EDN: PQHBZW

Автор:

Сергей Русланович Дутин – аспирант кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук А. А. Королёва.

Author:

Sergey R. Dutin, postgraduate student at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
sergei.dutin@gmail.com

маркетплейсе, а затем службы доставки будут развозить заказы десяткам тысяч клиентов. Создатели платформы «Яндекс.Маршрутизация» заверяют, что алгоритм маршрутизации уже поддерживает 40 тыс. заказов в день и что работы по совершенствованию алгоритма продолжаются. Поэтому исследование новых моделей и алгоритмов маршрутизации является весьма актуальной научной проблемой. На сайтах многих компаний электронной доставки размещены объявления о поиске разработчика алгоритма маршрутизации, что свидетельствует и о высокой практической значимости проблемы.

Цель настоящей статьи – построить модели и разработать методы составления оптимальных планов доставки продукции (без опозданий), т. е. определить маршруты для каждого из k курьеров-водителей на каждый фиксированный отрезок времени, в течение которого заказ должен быть выполнен.

Теоретические основы

Базовая модель задач маршрутизации – это сетевая модель задачи k коммивояжеров с различными дополнительными условиями, восходящая к классической задаче коммивояжера (*travelling salesman problem*) – составлению кратчайшего маршрута объезда n городов по одному разу с возвратом в исходный пункт с известной матрицей расстояний между каждым из них (первая публикация задачи содержится в [1], детальное изложение многих результатов – в [2]). Задача коммивояжера имеет n возможных маршрутов и относится к классу так называемых NP-трудных, для которых нет эффективных (полиномиальных) алгоритмов решения. В 2000 г. Математический институт Клэя назвал задачу коммивояжера в числе семи математических проблем тысячелетия. Еще более трудной является задача k коммивояжеров, тем не менее для практического решения небольших задач построены достаточно эффективные переборные алгоритмы типа метода ветвей и границ (их обзор содержится, например, в [3]). В последнее время интерес к задаче k коммивояжеров возрос в связи с необходимостью оптимального управления службами доставки [4–7]. Поэтому возникла необходимость в построении современной модели, адекватной геолокационным технологиям работы транспортных фирм по доставке (имеется в виду конечная доставка клиентам, разбросанным на карте города). Задачи снабжения даркстортов товарами также имеют близкое содержание.

Кроме того, иногда задача доставки усложняется возрастанием объема грузов и ограниченностью объема автомобиля, т. е. при анализе каждого маршрута нужно еще учитывать задачу об упаковке рюкзака (методы ее решения содержатся в [3]). Оптимизация маршрутов доставки дает значительный экономический эффект (достаточно сравнить, сколько доставок совершает машина в требуемый отрезок времени: 22 или 25).

Определенный простейший эвристический софт маршрутизации доставки на рынке имеется, это *АНТОР* – программа оптимальной сортировки (порядка) обслуживания клиентов в уже готовый список для одного курьера¹, программы *API Яндекс* и *Google* для геокодирования и геолокации и программа *diaspar*, которая якобы дает оптимальный маршрут. Программа доставки *Relog*, учитывающая грузогабаритные характеристики машин и товаров, график водителя, оснащенность автомобиля, также позволяет уложиться во временные рамки доставки.

Сетевая модель оптимальной маршрутизации доставки (современная задача k коммивояжеров)

Крупный маркетплейс, осуществляющий доставку покупателям, может иметь несколько складов. В этом случае возникает задача кластеризации улиц города, т. е. их прикрепления к складам, каждый из которых за определенный квант времени должен с помощью своего парка из k курьеров (машин) выполнить n тысяч заказов.

Для достижения такой цели возможно сократить время доставок, оптимизировать их суммарное время, уменьшить общую дистанцию, проезжаемую всем автопарком. Главное ограничение в данном случае – это жесткие временные рамки доставки.

Итак, на каждый период времени доставки (например, у сети «Евроопт» он составляет 3 ч) даны примерно 15–20 клиентов на каждого из полусотни курьеров и граф (сеть) $G = (V, E)$, каждая вершина которого – это точка доставки на этот период, а каждое ребро между точками доставки дублируется схемой дорог с заданным средним временем перемещения t_{ij} от вершины i (клиент) до вершины j графа G (причем к t_{ij} добавлено время t_j обслуживания клиента j). Необходимо покрыть все вершины графа G маршрутами k курьеров-водителей (прикрепить к ним клиентов) так, чтобы суммарное время в пути, а это значит и дистанция (расход топлива), было минимальным.

¹См.: Операционная система предприятия реального времени [Электронный ресурс]. URL: diasparbusiness.com (дата обращения: 24.10.2023).

Сформулируем поставленную задачу оптимальной маршрутизации в форме задачи дискретной булевой оптимизации [3]:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} t_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = \sum_{j=2}^n x_{j1} \leq k, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$u_i + (L - 2)x_{1i} - x_{i1} \leq L - (-1), i = 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$u_i + x_{ii} + (2 - N)x_{11} \geq 2, i = 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$x_{1i} + x_{i1} \leq 2, i = 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L - 2)x_{ji} \leq L - 1, 2 \leq i \neq j \leq n, \quad (7)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1(ij) \in E, \quad (8)$$

где $x_{ij} = 1$, если водитель посещает клиентов i и j ; u_i – число клиентов, посещенных от склада u_0 до вершины клиента i , равное единице; L и N – максимальное и минимальное число клиентов, которое может (должен) посетить один водитель.

Целевая функция минимизирует суммарное время в пути всех водителей. Условие (2) гарантирует, что все k водителей начинают и заканчивают путь на складе. Равенства (3) гарантируют, что все клиенты будут обслужены. Условия (4), (5) налагают ограничения по клиентам на каждого водителя. Ограничение (6) показывает, что водитель, приехавший к клиенту, уедет и не посетит его вторично.

Отличия сформулированной сетевой задачи маршрутизации от классической задачи k коммивояжеров заключаются в следующем:

- 1) отсутствии требования непересечения маршрутов двух коммивояжеров (водителей);
- 2) наличии ограничения на длину маршрута каждого коммивояжера: она не должна превышать время обслуживания (чаще всего оно составляет 3 ч), что задается с помощью ограничений (4), (5) либо их обобщений с учетом времени нахождения в пути.

Задача (1)–(8) может решаться стандартными программами для задач булевой оптимизации.

Основной учитываемый показатель – время в пути t_{ij} на каждом отрезке (i, j) маршрута со складом до 1-го клиента, от 1-го до 2-го клиента и т. д. Для построения возможных маршрутов следует использовать картографические сервисы (типа навигатора «Яндекс»), по их картам можно определить границы, минимальное и максимальное время доставки (по историческим данным). Необходимо также учитывать сервисное время t_j , т. е. время вручения заказа и выполнения платежной операции.

Метод ветвей и границ

Сформулированная задача есть своеобразная модель k коммивояжеров. Перебрать вручную все варианты возможных комбинаций маршрутов и включения в них клиентов невозможно. Основной метод точного решения сформулированной задачи – это метод ветвей и границ, который заключается в частичном переборе возможных вариантов закрепления клиентов за водителями и исключении подмножеств, содержащих решения хуже уже имеющегося рекордного, которое строится каким-нибудь приближенным алгоритмом.

Оценка для подмножеств, получаемых в процессе ветвления, вычисляется как длина минимального остовного дерева на своем подмножестве клиентов либо как сумма минимальных элементов в строке и после вычитания в столбце, причем всякий раз берется подматрица матрицы расстояний для нефиксированных вершин.

Жадный алгоритм маршрутизации

Жадный (*greedy*) алгоритм маршрутизации был впервые использован при поставках грузов в армии Наполеона главным интендантом Г. Монжем, ставшим впоследствии известным математиком, и позже

получил широкое распространение и оценку точности [8]. Его суть заключается в следующем: на каждом шаге, начиная со склада v_0 , выбирается самая близкая к текущему положению 1-го автомобиля точка, процесс завершается, когда суммарное требуемое водителю время истекло, и он возвращается на склад. Затем точки, попавшие на маршрут 1-го автомобиля, и 3 графа G исключаются, и процесс повторяется для 2-го автомобиля и далее до последнего k -го автомобиля. Недостатками алгоритма являются вытянутые маршруты и довольно длинный маршрут порожнего возвращения на склад. Тем не менее алгоритм может успешно применяться для построения начального рекордного решения, необходимого методу ветвей и границ. Достоинством данного алгоритма выступают короткие пути от одного потребителя до другого, что уменьшает время простоя в пробках.

Иногда этот алгоритм сочетают с алгоритмом формирования k кластеров из клиентов для каждого водителя-курьера, затем внутри каждого кластера строят оптимальный маршрут.

Кластерный алгоритм маршрутизации

Алгоритм кластеризации заключается в объединении множества из m точек с матрицей расстояний $(t_{ij})_{n \times n}$ между ними в заданное число k кластеров, в каждом из которых будут наиболее близкие по расстоянию. Кластерные алгоритмы широко применяются в различных экономических теориях – от составления рейтингов до проведения классификации государств. В нашем случае точки – это вершины графа G , т. е. клиенты – получатели заказа, а расстояние t_{ij} между любыми двумя точками i и j есть среднее время переезда от клиента i к клиенту j , определенное по геокартам, k – будущее число кластеров (имеющееся в наличии число курьеров-водителей для данного отрезка времени). Центроидный алгоритм кластеризации работает рекурсивно начиная с k начальных кластеров, в каждом из которых точка v_0 (исходный склад) считается центром кластера. На каждой последующей итерации находится точка, наиболее близкая к центру ближайшего кластера, которая присоединяется к нему, после чего в этом кластере находится новый центр как точка, наименее удаленная от всех остальных точек кластера, и процедура, где на каждом шаге объединяются два кластера с самыми близкими центрами (разумеется, размеры кластеров контролируются), чтобы не создать кластер с чрезмерным невозможным для обслуживания числом клиентов, повторяется. Разбиение на кластеры завершено, когда все точки (клиенты) прикреплены к одному из кластеров (водителей). После этого с помощью жадного алгоритма составляется маршрут движения каждого курьера-водителя в своем кластере клиентов.

Вычислительные эксперименты показали, что последние получаемые кластеры имеют достаточно длинные маршруты. Поэтому для каждого из них был апробирован алгоритм минимального локального расстояния, когда на каждой итерации объединяются два кластера, у одного из которых есть точка, наиболее близкая к некоторой точке другого кластера. Это так называемый min-min-алгоритм, и этот алгоритм давал очень хорошие результаты.

Муравьиный алгоритм маршрутизации

Муравьиный алгоритм основан на подражании движению муравьиной колонии (курьеры) к источникам пищи (клиенты) и возврату в гнездо (склад). Достоинством алгоритма выступает минимальный путь последней мили, т. е. короткие маршруты возврата порожних водителей. Впервые данный алгоритм был предложен М. Дориго в 1992 г. для решения задачи коммивояжеров [9]. Фактически муравьиный алгоритм представляет собой модификацию жадного алгоритма путем введения вероятности $P_{ij}(t)$ перехода из вершины i к вершине j , которая рассчитывается по следующей формуле:

$$P_{ij}(t) = \frac{\mu_{ij}^{\beta} \cdot \tau_{ij}^{\alpha}(t)}{\sum_k \mu_{ik}^{\beta} \cdot \tau_{ik}^{\alpha}(t)}, \mu_{ij}^{\beta} = \frac{1}{t_{ij}}, \quad (9)$$

и случайного начального блуждания колонии из k муравьев (курьеров). Каждый муравей рассчитывает вероятность перехода в следующий город на основе феромонов (т. е. вероятностей), на каждой итерации муравьи обновляют маршруты, улучшая качество решения.

Заключение

Благодаря алгоритмам, реализующим поиск хотя бы квазиоптимального маршрута в сформулированной сетевой задаче k коммивояжеров, логистам станет проще планировать маршруты курьеров, а курьерам – развозить товары. При этом главное, что для всех клиентов будет выполняться указанный интервал времени доставки.

Библиографические ссылки

1. Little J, Murty D, Sweeney D, Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operational Research*. 1963;11:972–982.
2. Gutin G, editor. *The traveling salesman problem and its variations*. Dordrecht: Kluwer Academy Publishing; 2002. 830 p.
3. Ковалёв ММ. *Дискретная оптимизация: целочисленное программирование*. Минск: БГУ; 1977. 192 с.
4. Дудник ТА, Бодров АС, Колпакова СВ, Левшина КВ. Решение задачи коммивояжера с ограничением времени доставки в условиях развития цифровых технологий на транспорте. *Мир транспорта и технологических машин*. 2021;1:64–72.
5. Зак ЮА. *Математические модели и алгоритмы построения эффективных маршрутов доставки грузов*. Москва: Русайнс; 2023. 304 с.
6. Solomon MM. Algorithm for vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operational Research*. 1987; 35:254–265.
7. Gan J, Zhang G. The k -delivery traveling salesman problem: revisited. *Lecture Notes in Computer Science*. 2019;11949:197–209.
8. Ковалёв ММ. *Матроиды в дискретной оптимизации*. Москва: URSS; 2003. 222 с.
9. Dorigo M. *Optimisation, learning and natural algorithms*. Milano: Politecnico di Milano; 1992. 102 p.

References

1. Little J, Murty D, Sweeney D, Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operational Research*. 1963;11:972–982.
2. Gutin G, editor. *The traveling salesman problem and its variations*. Dordrecht: Kluwer Academy Publishing; 2002. 830 p.
3. Kovalev MM. *Diskretnaya optimizatsiya: tselochislennoe programmirovaniye* [Discrete optimisation: integer programming]. Minsk: Belarusian State University; 1977. 192 p. Russian.
4. Dudnik TA, Bodrov AS, Kolpakova SV, Levshina KV. Solution of the travelling salesman problem with a limited delivery time in the conditions of the development of digital technologies in transport. *World of Transport and Technological Machines*. 2021;1:64–72. Russian.
5. Zak YuA. *Matematicheskie modeli i algoritmy postroeniya effektivnykh marshrutov dostavki грузов* [Mathematical models and algorithms of construction effective cargo delivery routes]. Moscow: Rusains; 2023. 304 p. Russian.
6. Solomon MM. Algorithm for vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operational Research*. 1987; 35:254–265.
7. Gan J, Zhang G. The k -delivery traveling salesman problem: revisited. *Lecture Notes in Computer Science*. 2019;11949:197–209.
8. Kovalev MM. *Matroidy v diskretnoi optimizatsii* [Matroids in discrete optimisation]. Moscow: URSS; 2003. 222 p. Russian.
9. Dorigo M. *Optimisation, learning and natural algorithms*. Milano: Politecnico di Milano; 1992. 102 p.

Статья поступила в редколлегию 23.10.2023.
Received by editorial board 23.10.2023.