

ТЕХНИКА ВИНЕРА – ХОПФА
В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХС. В. РОГОЗИН¹⁾, М. В. ДУБАТОВСКАЯ¹⁾¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Факторизация Винера – Хопфа комплексных функций используется в теории вероятностей, финансовой математике, страховании, теории массового обслуживания, акустике, радиотехнике, механике жидкостей и газов, теории разрушения и т. д. Некоторые из этих приложений математики подробно описаны в разнообразных исследованиях. Настоящая статья представляет собой обзор результатов, посвященных применению метода Винера – Хопфа в экономических исследованиях.

Ключевые слова: временные ряды; процессы Леви; факторизация Винера – Хопфа; финансовая математика.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.7.01.4).

WIENER – HOPF TECHNIQUE FOR ECONOMICAL STUDY

S. V. ROGOSIN^a, M. V. DUBATOVSKAYA^a^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: S. V. Rogosin (rogosin@bsu.by)

Abstract. Wiener – Hopf factorisation of complex functions is used in probability theory, financial mathematics, insurance, queueing theory, acoustic, radio-engineering, fluid and gas mechanics, fracture mechanics, etc. Some of these applications of mathematics are described in original research papers and surveys. This article presents a survey of the results devoted to the application of the Wiener – Hopf method in the economic investigations.

Keywords: time series; Levy processes; Wiener – Hopf factorisation; financial mathematics.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.7.01.4).

Образец цитирования:

Рогозин СВ, Дубатовская МВ. Техника Винера – Хопфа в экономических исследованиях. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2024;1:25–30.
EDN: VDPOLR

For citation:

Rogosin SV, Dubatovskaya MV. Wiener – Hopf technique for economical study. *Journal of the Belarusian State University. Economics*. 2024;1:25–30. Russian.
EDN: VDPOLR

Авторы:

Сергей Васильевич Рогозин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Марина Валерьевна Дубатовская – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Authors:

Sergei V. Rogosin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
rogosin@bsu.by

Marina V. Dubatovskaya, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economics.
dubatovska@bsu.by

Введение

Метод Винера – Хопфа с момента его создания был ориентирован на решение междисциплинарных задач. Этот метод является результатом сотрудничества Н. Винера, исследовавшего случайные процессы, и Э. Хопфа, изучавшего уравнения в частных производных. Метод был впервые описан в их совместной статье [1], где авторы рассматривали интегральное уравнение типа свертки для функции $f(x)$ на полуоси

$$\int_0^{\infty} k(x-t)f(t)dt = g(x), \quad x > 0, \quad (1)$$

с заданными функциями $k(x)$ и $g(x)$.

Исследование этого уравнения главным образом происходило благодаря интересу одного из авторов к некоторому дифференциальному уравнению, описывающему радиоактивное равновесие звезд.

Уравнение Винера – Хопфа возникает в результате продолжения интегрального уравнения (1) в область $x \leq 0$

$$\int_0^{\infty} k(x-t)f(t)dt = \begin{cases} g(x), & x > 0, \\ h(x), & x \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

для некоторой функции $h(x)$. Заметим, что, хотя $h(x)$ неизвестна, она не является независимой, поскольку однозначно определяется левой частью уравнения (2), как только определена функция $f(x)$. Применяя преобразование Фурье к уравнению (2), получим уравнение типа (3). Этот подход заложил основу для изучения скалярных уравнений Винера – Хопфа.

С начала XX в. интенсивно развивалась общая теория интегральных уравнений. Однако интегральное уравнение Винера – Хопфа (1) стало важным самостоятельным предметом изучения благодаря широкому спектру применения. Метод Винера – Хопфа позволил исследователям решать аналитически трудноразрешимые ранее интегральные уравнения и уравнения в частных производных, а также многие краевые задачи. На сегодняшний день он по-прежнему выступает стандартным методом решения класса задач, связанных с каноническими физическими проблемами. Метод Винера – Хопфа остается важным (наряду с другими методами) в области чистой математики, например при разработке абстрактной теории сингулярных линейных операторов, псевдодифференциальных операторов и др. Кроме того, точные решения уравнения Винера – Хопфа в специальных случаях лежат в основе приближенных методов, применимых к более сложным задачам.

Теория скалярных уравнений Винера – Хопфа в настоящее время является хорошо развитой, однако о матричных уравнениях Винера – Хопфа известно гораздо меньше. Они выступают естественным продолжением скалярного случая и позволяют моделировать более сложные проблемы, связанные с приложениями. На данный момент не существует общего метода решения матричных задач Винера – Хопфа. В каждом случае они строятся точно или приближенно.

Техника Винера – Хопфа в настоящее время широко используется в прикладных дисциплинах, таких как теория вероятностей, финансовая математика, страхование, теория массового обслуживания, акустика, радиотехника, механика жидкостей и газов, теория разрушения и др.

Таким образом, можно сказать, что метод Винера – Хопфа привлекателен по следующим причинам:

- возможность решать многочисленные связанные с реальными приложениями физические задачи, которые моделируются, например, уравнениями в частных производных или случайными процессами;
- использование тонких и разнообразных аналитических методов для получения решений;
- возможность построить решения задач Винера – Хопфа в виде, который позволяет оценить асимптотику во всех особых точках и на бесконечности;
- необходимость привлечения инновационных методов анализа при поиске численных решений для получения практически полезных результатов.

Метод решения уравнения Винера – Хопфа

Сформулируем основное уравнение Винера – Хопфа, полученное в результате применения преобразования Фурье к уравнению типа (2), и обсудим стандартный подход к его решению (см., например, [2]).

Обозначим верхнюю полуплоскость $H^+ = \{\operatorname{Im} z > a, a < 0\}$, нижнюю полуплоскость $H^- = \{\operatorname{Im} z < b, b > 0\}$ и полосу Винера – Хопфа $H = H^+ \cap H^- = \{a < \operatorname{Im} z < b\}$, где a и b – действительные числа (обычно небольшие). Классическая проблема Винера – Хопфа заключается в следующем: для заданных функций $K(z)$ и $C(z)$, аналитических в H , найти $\Phi_+(z)$ – неизвестную функцию, аналитическую в H^+ , и $\Psi_-(z)$ – неизвестную функцию, аналитическую в H^- , удовлетворяющие условию

$$K(z)\Phi_+(z) = \Psi_-(z) + C(z), \quad z \in H. \quad (3)$$

Функция $K(z)$ называется ядром Винера – Хопфа, соответствующим задаче (3).

Опишем обычную процедуру, используемую для решения задачи Винера – Хопфа в случае канонической скалярной факторизации. Ключевой шаг в процедуре Винера – Хопфа состоит в нахождении таких матриц K_+ и K_- (факторов Винера – Хопфа), что

$$K(z) = K_+(z)K_-(z), \quad z \in H,$$

матрицы K_+ , K_- и обратные к ним аналитические в H^+ , H^- [3]. Это произведение называется факторизацией ядра и является наиболее важной частью факторизационной процедуры. Если факторизация построена, то фактически найдено решение задачи (3), а следовательно, и интегрального уравнения (1).

Метод Винера – Хопфа в экономических и финансовых исследованиях

Метод Винера – Хопфа [1] широко применяется во многих областях прикладной математики, техники и экономики [4; 5]. В последнее время наблюдается растущий интерес к приложениям факторизации Винера – Хопфа в страховой математике, классической теории разорения, математической теории финансов.

В 1940-х гг. Н. Винер [1; 6] переформулировал задачу решения интегрального уравнения типа свертки (уравнения Винера – Хопфа) в уравнение с дискретным «временем», которое естественно связано с фильтром Винера. Последний позволяет анализировать временные ряды, в том числе ряды, возникающие при исследовании экономических процессов.

При анализе временных рядов появляется несколько проблем, которые можно решить с помощью такого подхода дискретизации. Наилучший линейный предиктор стационарного временного ряда естественным образом порождает фильтр Винера (см., например, [7; 8]). Вместе с тем для предсказания скрытых состояний на основе наблюдаемых состояний используется модель фильтра Калмана [9]. Дискретные уравнения Винера – Хопфа представляют собой систему линейных уравнений Тёплица, которые естественным образом возникают в некоторых приложениях временных рядов. Такие системы применяются для описания этапа обновления и прогнозирования с помощью стационарных уравнений фильтра Калмана, а также для предсказания поведения двумерных временных рядов [10].

Факторизация Винера – Хопфа является мощным инструментом при изучении различных функционалов процессов Леви, возникающих в задачах оптимизации и определяющих время первого перехода и перерегулирования, а также время последнего достижения экстремумов. В математических финансах такие функционалы можно использовать для описания выплаты по контракту, а соответствующее распределение вероятностей – для расчета цены контракта.

Процессы Леви и факторизация Винера – Хопфа

Ниже представлен пример того, как работает метод Винера – Хопфа при рассмотрении функционалов процессов Леви на основе результатов работы [11] (см. также [12]).

При описании рассматриваемого примера мы предполагаем, что X_t представляет собой одномерный вещественный процесс Леви, начинающийся с $X_0 = 0$ и определяемый тройкой величин (μ, σ, ν) , где $\mu \in \mathbf{R}$ задает линейный компонент, $\sigma > 0$ – волатильность гауссового компонента, а $\nu(dx)$ определяет меру Леви, удовлетворяющую следующему неравенству:

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\} \nu(dx) < \infty.$$

Характеристический показатель $\Psi(z)$ определяется формулой

$$\mathbf{E}\left[e^{izX_t}\right] = e^{-t\Psi(z)}, \quad z \in \mathbf{R}.$$

Формула Леви – Хинчина (см., например, [13]) дает представление о характеристическом показателе

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 - i\mu z - \int_{\mathbf{R}} (e^{iyz} - 1 - izh(x)) \nu(dx), \quad (4)$$

где $h(x)$ – сглаживающая функция, которую в общем случае можно принять равной $x \mathbf{I}_{|x|<1}$ [11]. Особый интерес представляют случаи $h(x) \equiv 0$ и $h(x) \equiv x$.

Далее определим экстремальные процессы

$$S_t = \sup \{X_s : 0 \leq s \leq t\}, \quad I_t = \inf \{X_s : 0 \leq s \leq t\}$$

и введем экспоненциальную случайную переменную $\tau = \tau(q)$ с параметром $q > 0$ (заметим, что τ не зависит от процесса X_t). Используем следующие обозначения для характеристических функций процессов S_t и I_t соответственно:

$$\varphi_q^+ = \mathbf{E} \left[e^{izS_{\tau(q)}} \right], \quad \varphi_q^- = \mathbf{E} \left[e^{izI_{\tau(q)}} \right].$$

Если эти функции задают факторизацию Винера – Хопфа, то случайные величины S_t и $X_t - S_t$ независимы, а случайные величины I_t и $X_t - I_t$ имеют одинаковое распределение. Таким образом, для $z \in \mathbf{R}$ имеем

$$\frac{q}{q + \Psi(z)} = \mathbf{E} \left[e^{izX_t} \right] = \mathbf{E} \left[e^{izS_t} \right] \mathbf{E} \left[e^{iz(X_t - S_t)} \right] = \varphi_q^+(z) \varphi_q^-(z). \quad (5)$$

Более того, случайная величина S_t (так же, как и I_t) является безгранично делимой, положительной (отрицательной) и имеет нелинейный компонент в формуле Леви – Хинчина (4). Существует несколько интегральных представлений для $\varphi_q^\pm(z)$ в терминах вероятности $P(X_t \in dx)$ или в терминах характеристического показателя $\Psi(z)$ [14].

Интегральные выражения для множителей Винера – Хопфа $\varphi_q^+(z)$, $\varphi_q^-(z)$ достаточно сложны. Однако в случае устойчивого процесса можно получить явные формулы для плотного множества значений параметров [15]. В некоторых ситуациях множители Винера – Хопфа можно вычислить явно с помощью факторизационного тождества (5).

В качестве примера рассмотрим случай, когда мера Леви имеет фазовый тип. Мету фазового типа можно считать распределением времени первого перехода конечной цепи Маркова с непрерывным временем. Процесс Леви X_t , скачки которого распределены по фазовому типу, обладает аналитическим свойством, заключающимся в том, что его характеристический показатель $\Psi(z)$ является рациональной функцией. Таким образом, функция $\frac{q}{q + \Psi(z)}$ также рациональная, следовательно, она имеет конечное число нулей (полюсов) в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Основная идея заключается в следующем: поскольку случайная величина $S_t(I_t)$ положительна или отрицательна и безгранично делима, ее характеристическая функция должна быть аналитической и не должна иметь нулей в $\mathbf{C}^+$ или $\mathbf{C}^-$, где

$$\mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z < 0\}, \quad \bar{\mathbf{C}}^\pm = \mathbf{C}^\pm \cup \mathbf{R}.$$

Таким образом, можно однозначно определить $\varphi_q^+(z)$ и $\varphi_q^-(z)$ как рациональные функции, принимающие значение 1 при $z = 0$, нули (полюсы) которых совпадают с нулями (полюсами) функции $\frac{q}{q + \Psi(z)}$ в $\mathbf{C}^+$ или $\mathbf{C}^-$.

Хотя процессы Леви со скачками фазового типа представляют собой очень удобные объекты для работы, для них можно реализовывать эффективные численные схемы, однако при этом возникают некоторые трудности. Одна из них заключается в том, что по определению мера фазового типа имеет гладкую плотность на $[0, \infty)$. В частности, плотность меры Леви не может иметь особенности в нуле. Это означает, что, если мы хотим работать с процессом с бесконечной активностью, нам придется аппроксимировать его меру Леви последовательностью мер фазового типа, но тогда степень рациональной функции $\Psi(z)$ будет стремиться к бесконечности и приведенный выше алгоритм вычисления факторов Винера – Хопфа быстро станет невыполнимым.

В статье [11] эта проблема изучается, соответственно, обсуждается и факторизация Винера – Хопфа для процессов, мера Леви которых может иметь особенность произвольного порядка в нуле.

В вышеупомянутой работе подробно обсуждаются две конкретные ситуации. Первая ситуация – это пример сложного процесса Пуассона, мера Леви которого имеет плотность $\nu(x) = \frac{e^{\alpha x}}{ch(x)}$. Вторая ситуа-

ция – это процесс Леви X_t со скачками бесконечной вариации и плотностью меры Леви $\nu(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\left[sh\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2}$.

В статье [16] представлена новая процедура для поиска распределения с конечным временем дискретных экстремальных значений и времен достижения одного или двух барьеров для такого процесса с независимыми и одинаково распределенными приращениями, как процесс Леви. Предлагается конструктивная процедура вычисления факторов Винера – Хопфа, возникающих в тождестве Спитцера в терминах соотношений Сохоцкого – Племяля, которая справедлива как для одиночных, так и для двойных барьеров. В рассматриваемой работе представлена расширенная библиография по применению метода факторизации Винера – Хопфа при исследовании проблем экономики и финансов. Перспектива построения прогнозов на основе уравнений Винера – Хопфа для дискретных временных рядов описана в работе [10].

Использование метода Винера – Хопфа в финансовых исследованиях

Для анализа процессов на финансовых рынках используют современные модели, обобщающие классическую модель Блэка – Шоулза, в которых активно применяются свойства процессов Леви. Эти новые модели позволяют отслеживать скачки цен акций и используются для оценки финансовых рисков. Значение применения процессов Леви в моделях существенно возрастает с появлением на финансовых рынках таких высоколиквидных и высокорисковых инструментов, как криптовалюты, которые при этом характеризуются нередко значительным спреedom, естественным образом порождающим скачки цены. С практической точки зрения исследование таких моделей ляжет в основу разработки быстрых алгоритмов вычисления цен опционов, которые могут быть базой для создания торговых систем, использующих методы машинного обучения, а также для калибрования параметров моделей финансовых активов и управления рисками на финансовом рынке [17].

В статье [18] демонстрируется, как метод Винера – Хопфа работает при решении конкретной задачи финансового анализа (см. также [19]). В данной статье предложен новый численный метод, который сочетает аппроксимацию биномиального дерева для дисперсии процесса из работы [20] и эффективный численный метод факторизации Винера – Хопфа в форме, представленной в работе [21]. Уравнения, описывающие модель Хестона, являются уравнениями процесса диффузии для доходности акций и процесса Кокса – Ингерсолла – Росса для дисперсии:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt\sqrt{V_t}dZ_t^S,$$

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_t^V,$$

где S_t – цена базового актива; V_t – дисперсия процесса; $S_0 > 0$, $V_0 > 0$. Параметры модели также обладают преимуществом экономической интерпретации: $r \geq 0$ – безрисковая процентная ставка; k – скорость возврата к среднему; θ – долгосрочная дисперсия; σ – волатильность дисперсии.

В статье [22] приведены примеры использования метода Винера – Хопфа для решения стандартных задач определения цены опциона. Как и автор работы [22], будем предполагать, что безрисковая ставка постоянна и равна числу $r > 0$. Кроме того, при условии, что риск – нейтральная мера, определяемая рынком, процесс изменения лог-цены акций $X_t = \log S_t$ является процессом Леви с инфинитезимальным генератором L и характеристическим показателем Ψ .

В случае барьерных опционов рассматривается контракт, по которому выплачивается сумма $G(S_T)$ в момент останова T при условии, что в течение срока действия контракта цена акции не будет пересекать заданный постоянный барьер H сверху или снизу. При пересечении барьера срок действия опциона истекает или владелец опциона получает право на некоторую скидку. В работе [22] рассуждения ограничиваются случаем, когда цена акции начинается со значения, превышающего барьер, и изменяется в сторону уменьшения (*down-and-out barrier*). Цена такого барьерного опциона $V(t, S_t)$ удовлетворяет некоторой начально-граничной задаче для интегро-дифференциального уравнения. Эта задача исследуется с помощью численного метода, сводящего ее к разностной схеме.

Аналогичный метод применяется для анализа американского пут-опциона в том случае, когда на него не выплачиваются дивиденды. Обобщение случаев опциона, по которому дивиденды выплачиваются, и американского колл-опциона представляется автору простым в рассматриваемой ситуации. При анализе возникает также интегро-дифференциальное уравнение, в то время как начальные и граничные условия изменяются. Для решения такой задачи используется численный метод, аналогичный методу, применяемому в случае барьерных опционов.

Заключение

Метод Винера – Хопфа, созданный для решения достаточно абстрактной математической задачи, приобрел в последние годы широкую известность. Прежде всего это связано с многочисленными приложениями данного метода. В уравнениях типа Винера – Хопфа имеется параметр запаздывания, что позволяет моделировать процессы, в которых настоящее состояние системы существенно зависит от предыдущих периодов. Свойство такого рода является характерным для многих процессов в экономике и финансах.

Применение метода Винера – Хопфа для анализа экономических процессов представляется весьма перспективным, в том числе для исследования экономических и финансовых систем. Данный метод хорошо разработан с аналитической точки зрения. На его основе построены глубокие численные алгоритмы. Вероятностные аспекты метода Винера – Хопфа имеют тесную связь с процессами Леви. Наконец, метод Винера – Хопфа допускает естественную дискретизацию, он может быть эффективно использован для анализа временных рядов, в том числе финансовых.

Библиографические ссылки / References

1. Wiener N, Hopf E. Über eine Klasse singulärer integralgleichungen. *Semester Berlin Preußen. Akademische Wissenschaft.* 1931;31:696–706.
2. Noble B. *Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations.* New York: Pergamon Press; 1958. 246 p.
3. Rogosin S, Mishuris G. Constructive methods for factorization of matrix-functions. *IMA Journal of Applied Mathematics.* 2016;81(2):365–391. DOI: 10.1093/imat/hxv038.
4. Abrahams ID, Lawrie JB. On the factorization of a class of Wiener – Hopf kernels. *IMA Journal of Applied Mathematics.* 1995;55(1):35–47. DOI: 10.1093/imat/55.1.35.
5. Kisil AV, Abrahams ID, Mishuris G, Rogosin SV. The Wiener – Hopf technique, its generalizations and applications: constructive and approximate methods. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 2021;477:[32]. DOI: 10.1098/rspa.2021.0533.
6. Wiener N. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series.* Cambridge: MIT Press; 1949. 163 p.
7. Wiener N, Masani P. The prediction theory of multivariate stochastic processes. The regularity condition. *Acta Mathematica.* 1957;98(1):111–150.
8. Wiener N, Masani P. The prediction theory for multivariate stochastic processes. The linear predictor. *Acta Mathematica.* 1958;99:93–137.
9. Kalman RE. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering.* 1960;82:35–45. DOI: 10.1115/1.3662552.
10. Rao SS, Yang J. A prediction perspective on the Wiener – Hopf equations for time series. *Journal of Time Series Analysis.* 2022;44(1):23–42. DOI: 10.1111/jtsa.12648.
11. Kuznetsov A. Wiener – Hopf factorization and distribution of extrema for a family of Lévy processes. *Annals of Applied Probability.* 2010;20(5):1801–1830. DOI: 10.1214/09-AAP673.
12. Kuznetsov A. Wiener – Hopf factorization for a family of Lévy processes related to theta functions. *Journal of Applied Probability.* 2010;47(4):1023–1033. DOI: 10.1239/jap/1294170516.
13. Mainardi F, Rogosin S. The origin of infinitely divisible distributions: from de Finetti’s problem to Lévy – Khintchine formula. *Mathematical Methods for Economics and Finance.* 2006;1:37–55. DOI: 10.48550/arXiv.0801.1910.
14. Lewis AL, Mordecki E. Wiener – Hopf factorization for Lévy processes having positive jumps with rational transforms. *Journal of Applied Probability.* 2008;45(1):118–134. DOI: 10.1239/jap/1208358956.
15. Doney RA. On Wiener – Hopf factorisation and the distribution of extrema for certain stable processes. *Annals of Probability.* 1987;15(4):1352–1362. DOI: 10.1214/aop/1176991981.
16. Fusai G, Germano G, Marazzina D. Spitzer identity, Wiener – Hopf factorization and pricing of discretely monitored exotic options. *European Journal of Operational Research.* 2016;251(1):124–134. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.11.027.
17. Kudryavtsev OE. Approximate Wiener – Hopf factorization and Monte Carlo methods for Lévy processes. *Theory of Probability and Its Applications.* 2019;64(2):186–208. DOI: 10.1137/S0040585X97T989441.
18. Kudryavtsev O, Rodochenko VA. Wiener – Hopf factorization approach for pricing barrier options in the Heston model. *Applied Mathematical Sciences.* 2017;11(2):93–100. DOI: 10.12988/ams.2017.610254.
19. Fusai G, Abrahams ID, Sgarra C. An exact analytical solution for discrete barrier options. *Finance and Stochastics.* 2006;10:1–26. DOI: 10.1007/s00780-005-0170-y.
20. Briani M, Caramellino L, Zanette A. A hybrid tree/finite-difference approach for Heston – Hull – White-type models. *Journal of Computational Finance.* 2017;21(3):1–45. DOI: 10.21314/JCF.2017.333.
21. Kudryavtsev O, Levendorskii S. Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes. *Finance and Stochastics.* 2009;13(4):531–562. DOI: 10.1007/s00780-009-0103-2.
22. Kudryavtsev OE. Finite difference methods for option pricing under Lévy processes: Wiener – Hopf factorization approach. *The Scientific World Journal.* 2013;2013:963625. DOI: 10.1155/2013/963625.

Статья поступила в редколлегию 29.03.2024.
Received by editorial board 29.03.2024.