УДК 517.518.26,517.518.118

ТОЧКИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА $M_\alpha^p(X)$ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С. А. БОНДАРЕВ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Классическая теорема Лебега утверждает, что для суммируемой функции почти любая точка (за исключением множества нулевой меры) является ее точкой Лебега. Множество точек, не являющихся точками Лебега, называют исключительным. Для более регулярных функций (например, принадлежащих определенному функциональному пространству) можно оценивать «размер» исключительного множества с помощью более тонких, чем мера, характеристик. В работе исследуются свойства точек Лебега для функций из классов Соболева на произвольных метрических пространствах в критическом случае $\gamma = \alpha p$, где γ – число, играющее роль размерности пространства, α, p – показатели гладкости и суммируемости соответственно. Получены оценки на «размер» исключительного множества в терминах емкостей и размерности Хаусдорфа, в частности показано, что исключительное множество имеет нулевую емкость и его размерность Хаусдорфа равна нулю. Доказана экспоненциальная скорость сходимости для точек Лебега. В докритическом случае $\gamma > \alpha p$ похожие результаты известны.

Ключевые слова: анализ на метрических пространствах с мерой; пространства Соболева; тонкие свойства функций; точки Лебега.

Образец цитирования:
Бондарев СА. Точки Лебега для функций из обобщенных классов Соболева $M_\alpha^p(X)$ в критическом случае. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:4–11.

For citation:
Bondarev SA. Lebesgue points for functions from generalized Sobolev classes $M_\alpha^p(X)$ in the critical case. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018; 3:4–11. Russian.

Автор:
Сергей Александрович Бондарев – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Кротов.

Author:
Sergey A. Bondarev, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
bsa0393@gmail.com

LEBESGUE POINTS FOR FUNCTIONS FROM GENERALIZED SOBOLEV CLASSES $M_\alpha^p(X)$ IN THE CRITICAL CASE

S. A. BONDAREV [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Classical Lebesgue theorem states that for any integrable function almost every point (except the set of measure zero) is a Lebesgue point. The set of the points that are not Lebesgue points is called an exceptional set. One can estimate the «size» of the exceptional set for more regular functions (e. g. functions that belong to certain function space) using more refined than measure characteristics. The paper is devoted to the investigation of the properties of Lebesgue points for functions from Sobolev classes on general metric space in the critical case $\gamma = \alpha p$, γ plays the role of the dimension of the space, α, p – smoothness and summability parameters. Estimates of the «size» of the exceptional set in terms of capacities and Hausdorff dimension are obtained. Exponential rate of convergence for Lebesgue points has been established. Similar results are known in subcritical case $\gamma > \alpha p$ as well.

Key words: analysis on metric measure spaces; Sobolev spaces; fine properties of functions; Lebesgue points.

Введение

Классическая теорема Лебега [1] утверждает, что почти всюду для функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, выполнено соотношение

$$f(x) = \lim_{r \to +0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(t), \tag{1}$$

где $B(x, r)$ – евклидов шар с центром в точке x радиусом r; $|B(x, r)|$ – мера Лебега этого шара на $\mathbb{R}^n$. Множество точек, в которых не выполнено (1), будем называть исключительным. Те точки x, для которых (1) выполняется, будем называть точками Лебега функции f.

Представляет интерес вопрос о том, насколько «мало» может быть исключительное множество в случае, если исходная функция f будет более регулярной, например принадлежать некоторому функциональному пространству. Эта задача имеет богатую историю. Здесь «малость» может оцениваться по-разному. Как правило, когда речь идет о пространствах Соболева, для оценок «размера» исключительного множества используются размерность Хаусдорфа и емкости (см. формулы (6), (7) ниже).

Отметим некоторые работы, посвященные указанной тематике. Через $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство Соболева в смысле обобщенных производных, где p – показатель суммируемости; k – показатель гладкости. Оценка для емкости и размерности Хаусдорфа дополнения к множеству точек Лебега для $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ была дана в 1972 г. Х. Федерером и В. Зимером [2]. Позже в работах Т. Бэгби и В. Зимера [3], К. Кальдерона, Е. Фейбса и Н. Ривьера [4], Н. Мейерса [5] результаты из [2] были распространены на пространства $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ и на их обобщения – пространства бесселевых потенциалов.

Следующий шаг в развитии данной тематики сделан в связи с тем, что П. Хайлашем в 1996 г. были введены классы Соболева $M_1^p(X)$ на произвольном метрическом пространстве X [6]. После этого естественным образом возник вопрос о переносе известных для классических пространств Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ теорем на более общие классы $M_\alpha^p(X)$. П. Хайлаш и Ю. Киннунен в работе [7] исследовали размеры дополнения к множеству точек Лебега для функций из $M_1^p(X)$ в терминах размерности Хаусдорфа. В 2002 г. Ю. Киннунен и В. Латвала решили эту задачу в терминах емкостей [8]. Далее результаты были обобщены М. А. Прохоровичем на случай пространств $M_\alpha^p(X)$, где α необязательно равно единице, $p > 1$ [9; 10]. Наконец, в [11] вводятся точки Лебега для несуммируемых функций и формулируются более общие результаты, включающие случай $p > 0$.

Отметим важность теоремы Лебега, поскольку она дает способ определения значения функции $f \in L^p$ в точке почти всюду, независимый от выбора представителя (напомним, что L^p – класс эквивалентных функций, различающихся между собой разве что на множестве нулевой меры). Также с помощью теоремы Лебега можно доказать аналог C-свойства Лузина, а именно существование квазинепрерывного представителя для $f \in M_\alpha^p$ (подробности см. в [12]).

В данной работе исследованы свойства точек Лебега для функций из классов Соболева $M_\alpha^p(X)$ на метрическом пространстве X с произвольной мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения. Получены оценки на «размер» исключительного множества и на скорость сходимости. При этом рассматривается так называемый критический случай, когда $\gamma = \alpha p$, где γ – постоянная, играющая роль размерности (см. далее формулу (4)).

Введем точки Лебега для несуммируемых функций. Всюду далее будем придерживаться стандартного обозначения для интегральных средних

$$f_B = \fint_B f\,d\mu = \frac{1}{\mu(B)}\int_B f\,d\mu.$$

Поскольку при $p < 1$ подынтегральная функция может быть несуммируема, то использовать интегральные средние в определении точек Лебега уже нельзя. Для преодоления этой трудности вместо интегральных средних используется техника приближения постоянными в пространстве L^p. Пусть шар $B \subset X$ и $f \in L^p(B)$, $p > 0$. Можно показать, что существует $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_B |f(y) - c|^p\,d\mu(y) = \int_B \left|f - I_B^{(p)} f\right|^p d\mu(y).$$

Если $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, то для почти всех $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x)$.

Постоянные наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ можно использовать вместо интегральных средних в определении точек Лебега [11]. Преимуществом является то, что их также можно применять при $p < 1$. Однако они не обладают хорошими свойствами интегральных средних, например сублинейностью.

В докритическом случае $\gamma > \alpha p$ справедлива следующая теорема [11], подводящая некий итог всем предыдущим исследованиям.

Теорема 1. *Пусть $p > 0$, $1 \ge \alpha > 0$, $0 < \alpha p < \gamma$ и $f \in M_\alpha^p(X)$. Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что для $x \in X\setminus E$ существует предел*

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x).$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q\,d\mu = 0,\ \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{2}$$

При этом $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и* $\dim_H(E) \le \gamma - \alpha p$.

В случае $\gamma > \alpha p$ справедливо вложение $M_\alpha^p(X) \subset L^q_{\mathrm{loc}}(X)$. В критическом случае $\gamma = \alpha p$ параметр q равен бесконечности. Однако вложение $M_\alpha^p \subset L^\infty$, которое можно было ожидать, неверно. При этом выполняется другое вложение в экспоненциальный класс: $M_\alpha^p \subset \exp(L^\beta)$ при некотором β, поэтому в (2) естественно ожидать экспоненциальную скорость сходимости вместо степенной. Целью данной статьи является доказательство следующего результата.

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $1 \ge \alpha > 0$, $\gamma = \alpha p$ и $f \in M_\alpha^p(X)$. Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что для $x \in X\setminus E$ существуют пределы*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f\,d\mu,\ \ \lim_{r\to 0} I^{(p)}_{B(x,r)} f.$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \left[\exp\left\{b\left|f - I_{B(x,r)}\right|\right\} - 1\right] d\mu = 0, \tag{3}$$

где в качестве $I_{B(x,r)}$ можно взять и постоянную наилучшего приближения $I^{(p)}_{B(x,r)} f$, и среднее интегральное; b – произвольная положительная постоянная. При этом для множества E выполнено: $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и* $\dim_H(E) = 0$.

Заметим, что теорема 2 не налагает никаких дополнительных условий на пространство X, кроме условия удвоения. Скорость сходимости может быть улучшена в том смысле, что существует более быстрорастущая на бесконечности функция φ такая, что предельное равенство

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \varphi\left(\left|f - I_{B(x,r)}\right|\right) d\mu = 0$$

все еще выполнено. Однако в этом случае на пространство следует наложить дополнительное ограничение – потребовать его связность. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

Основные определения и обозначения

Пусть (X, d) – метрическое пространство с метрикой d, а борелевская мера μ удовлетворяет условию удвоения, т. е. для любых шаров $B(x, r)$ и $B(x, R)$, $R > r$, выполнено

$$\mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)) \tag{4}$$

для некоторых постоянных a_μ и γ. При этом также предполагается, что мера каждого шара положительна и конечна. Тройка (X, d, μ) в этом случае называется пространством однородного типа, а число γ играет роль размерности.

Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Пространство Соболева $M_\alpha^p(X)$ на метрическом пространстве X состоит из множества функций (классов эквивалентности) $f \in L^p(X)$, для которых существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$ такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)] \tag{5}$$

выполнено почти всюду (более подробно см. [6], где дано определение при $\alpha = 1$, и [13], где оно обобщено на произвольное положительное α). На $M_\alpha^p(X)$ вводится норма (квазинорма при $p < 1$)

$$\|f\|_{M_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\left\{\|g\|_{L^p(X)}\right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим условию (5). Пространства $M_\alpha^p(X)$ порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha, p}(E) = \inf\left\{\|f\|^p_{M_\alpha^p(X)} : f \geq 1 \text{ в окрестности } E\right\}. \tag{6}$$

Емкости являются «измерителями» массивности исключительных множеств в задачах теории тонких свойств функций. Такую же роль играют мера и размерность Хаусдорфа. Дадим все необходимые определения. Вместимость Хаусдорфа определяется как

$$H_R^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_i B(x_i, r_i),\ r_i < R\right\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E шарами радиусом не более R. Мера Хаусдорфа вводится следующим образом:

$$H^s(E) = \lim_{R \to 0} H_R^s(E).$$

Наконец, определим размерность Хаусдорфа:

$$\dim_H(E) = \inf\left\{s : H^s(E) = 0\right\}. \tag{7}$$

Внешней мерой мы называем функцию множества ν, удовлетворяющую свойствам монотонности и субаддитивности (последнее даже может быть выполнено с некоторой константой), т. е.

$$A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B),$$

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq a_\nu \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

для любых множеств A, B, A_i и некоторой постоянной $a_\nu \geq 1$. Заметим, что емкость и мера Хаусдорфа являются внешними мерами.

Нам понадобятся также максимальные операторы

$$\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f(x) = \sup_{B \ni x,\ r_B < 1} \frac{1}{r_B^\alpha} \left(\fint_B \left|f - I_B^{(p)} f\right|^p d\mu\right)^{1/p},$$

$$\mathcal{S}_\alpha^{(p)} f(x) = \sup_{B \ni x,\, r_B < 1} \frac{1}{r_B^\alpha} \left(\fint_B |f - f_B|^p d\mu \right)^{1/p},$$

введенные в [14].

Вспомогательные факты

Для доказательства основной теоремы требуется ряд технических фактов, имеющих вспомогательный характер. Всюду далее, если не оговорено противное, c означает положительную постоянную, точное значение которой нам не важно. Более того, ее точное значение может меняться даже в пределах одной строки. Зависимость постоянной c от параметров, как правило, ясна из контекста.

Перечислим основные свойства емкостей. Связь между емкостью, мерой и размерностью Хаусдорфа иллюстрирует следующая лемма из [15].

Лемма 1. *Пусть $0 < \alpha \le 1$, $x_0 \in X$, тогда для $0 < r \le 1$*

$$\mu(B(x_0, r)) \le \mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x_0, r)) \le c r^{-\alpha p} \mu(B(x_0, r)).$$

Если $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$, то $H^t(E) = 0$ для любого $t > \gamma - \alpha p$. В частности, $\dim_H(E) \le \gamma - \alpha p$.

Замечание. В критическом случае $\gamma = \alpha p$, поэтому $\dim_H(E) = 0$, если $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$. Таким образом, достаточно доказать теорему 2 лишь для емкости.

Для формулировки следующего результата о свойствах емкости нам понадобится классическая лемма о покрытиях (доказательство можно найти, например, в [16]).

Лемма 2. *Пусть F – семейство шаров ограниченного радиуса в метрическом пространстве X. Тогда можно выбрать подмножество $G \subset F$, состоящее из непересекающихся шаров, и при этом*

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} 5B.$$

Введем обозначение

$$E = \left\{ x \in X : \limsup_{r \to 0} r^{\alpha p} \fint_{B(x,r)} g^p d\mu > 0 \right\}.$$

Лемма 3. *Пусть $0 \le g \in L^p(X)$ и внешняя мера ν удовлетворяет условию*

$$\nu(B(x, r)) \le c r^{-\alpha p} \mu(B(x, r)).$$

Тогда $\nu(E) = 0$. В частности, $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in X : \limsup_{r \to 0} r^{\alpha p} \fint_{B(x,r)} g^p d\mu > \varepsilon \right\}.$$

Покажем, что $\nu(E_\varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда утверждение леммы будет следовать из субаддитивности внешней меры.

Зададим произвольное $0 < \delta < 1$. По определению E_ε для любого $x \in E_\varepsilon$ существует радиус r_x $(0 < r_x < \delta)$ такой, что

$$r_x^{\alpha p} \fint_{B(x, r_x)} g^p d\mu > \varepsilon. \tag{8}$$

По лемме 2 существует такое семейство попарно непересекающихся шаров $B(x_i, r_i)$, что

$$E_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 5r_i).$$

Используя субаддитивность внешней меры, лемму 1, неравенство (8) и условие удвоения (4), имеем

$$\nu(E_\varepsilon) \le \sum_{i=1}^\infty \nu(B(x_i, 5r_i)) \le$$

$$\le c \sum_{i=1}^\infty (5r_i)^{-\alpha p} \mu(B(x_i, 5r_i)) = c \sum_{i=1}^\infty (5r_i)^{-\alpha p} \mu(B(x_i, 5r_i)) \frac{\mu(B(x_i, r_i))}{\mu(B(x_i, r_i))} \le$$

$$\le c\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\alpha p}\mu\left(B\left(x_i, r_i\right)\right) \le \frac{c}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B(x_i, r_i)} g^p d\mu =$$

$$= \frac{c}{\varepsilon}\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)} g^p d\mu \to 0,\ \delta \to +0.$$

Последнее верно в силу абсолютной непрерывности интеграла. Действительно, так как шары $B\left(x_i, r_i\right)$ не пересекаются, то справедлива оценка

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B\left(x_i, r_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B\left(x_i, r_i\right)\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i^{\alpha p}}{\varepsilon}\int_{B(x_i, r_i)} g^p d\mu \le$$

$$\le \frac{\delta^{\alpha p}}{\varepsilon}\int_X g^p d\mu \to 0,\ \delta \to +0.$$

Таким образом, $\nu\left(E_\varepsilon\right) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, и наше утверждение следует из субаддитивности внешней меры. Лемма доказана.

Заметим, что мера Хаусдорфа, вообще говоря, не удовлетворяет условию леммы 3. Однако при условии регулярности снизу на меру

$$r_B^\gamma \le c\mu(B) \tag{9}$$

в случае $\gamma > \alpha p$ имеем

$$H^{\gamma-\alpha p}(B) \le r_B^{\gamma-\alpha p} \le c r_B^{-\alpha p}\mu(B).$$

Отметим также, что (9) выполнено с постоянной *c*, зависящей от шара *B*, если (X, d, μ) удовлетворяет условию удвоения. Если $\operatorname{diam} X < \infty$, то (9) выполнено с постоянной *c*, не зависящей от шара, и, стало быть, в случае ограниченности пространства *X* мера Хаусдорфа $H^{\gamma-\alpha p}$ удовлетворяет условиям леммы.

Следующее неравенство (типа неравенства Трудингера) было доказано в [17].

Лемма 4. *Пусть* $p > 0$, $\gamma = \alpha p$, $f \in M_\alpha^p(X)$. *Тогда существуют постоянные* $\sigma > 1$, $a > 0$ *и* $A > 0$ *такие, что для любого шара B выполняется*

$$\fint_B \exp\left(a\frac{\left|f - I_B^{(p)} f\right|}{r_B^\alpha}\left(\fint_{\sigma B}\left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p d\mu\right)^{-1/p}\right) d\mu \le A.$$

Доказательство основной теоремы

В силу замечания после леммы 1 докажем теорему лишь для емкости.

Сначала покажем, что для $f \in M_\alpha^p(X)$, $\gamma = \alpha p$, всюду, кроме «малого» множества, выполнено равенство

$$\lim_{r_B \to 0} I_B^{(p)} f = \lim_{r_B \to 0} f_B,$$

которое показывает, что на самом деле достаточно доказывать теорему лишь для $I_{B(x, r)} = I_B^{(p)} f$, поэтому далее можно работать только с постоянными наилучшего приближения.

Усредняя неравенство

$$\left|I_B^{(p)} f - f_B\right|^p \le c\left(\left|I_B^{(p)} f - f(y)\right|^p + \left|f(y) - f_B\right|^p\right)$$

по шару $B = B(x, r)$ и оценивая сверху полученное выражение соответствующими максимальными операторами, получаем

$$\left|I_B^{(p)} f - f_B\right|^p \le c r^{\alpha p}\left(\left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(z)\right]^p + \left[\mathcal{S}_\alpha^{(p)} f(z)\right]^p\right),$$

откуда

$$\left|I_B^{(p)} f - f_B\right|^p \le c r^{\alpha p}\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(z),$$

для любого $z \in B = B(x, r)$. Выберем z так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left[\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f(z)\right]^p \leq \fint_{B(x,\, r)} \left[\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p d\mu.$$

Таким образом,

$$\left|I_B^{(p)} f - f_B\right|^p \leq r_B^{\alpha p} \fint_{B(x,\, r)} \left[\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p d\mu,$$

а выражение справа по лемме 3 сходится к нулю везде, за исключением множества нулевой $\mathrm{Cap}_{\alpha,\, p}$-емкости.

То, что $I_{B(x,\, r)}^{(p)} f$ имеет предел $\mathrm{Cap}_{\alpha,\, p}$-почти всюду, доказывается точно так же, как и в [11, теорема 1]. Осталось показать (3). Для этого рассмотрим множество

$$E = \left\{x \in X : \limsup_{r \to 0} r^{\alpha p} \fint_{B(x,\, r)} \left[\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p d\mu > 0\right\}$$

и внешнюю меру ν, удовлетворяющую условиям леммы 3. Из последней следует, что $\nu(E) = 0$. Пусть $x \notin E$. Тогда можно выбрать $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для любых $0 < r < \varepsilon$ выполнялось

$$\delta(r) = \frac{b}{a} r^{\alpha p} \fint_{\sigma B} \left[\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p d\mu < 1,$$

где b – постоянная из теоремы 2, a – постоянная из леммы 4. Применяя неравенство Гёльдера (здесь используется соотношение $\delta(r) < 1$) и лемму 4, получим

$$\fint_B \exp\left(b\left|f - I_B^{(p)} f\right|\right) \leq$$

$$\leq \left(\fint_B \exp\left(a \frac{\left|f - I_B^{(p)} f\right|}{r_B^\alpha} \left(\fint_{\sigma B} \left[\mathscr{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p d\mu\right)^{-1/p}\right) d\mu\right)^{\delta(r)} \leq A^{\delta(r)}.$$

Последнее выражение сходится к 1, когда r стремится к 0. Таким образом, при любой постоянной $b > 0$ для всех точек $x \in X \setminus E$ выполнено

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,\, r)} \left[\exp\left\{b\left|f - I_{B(x,\, r)}^{(p)} f\right|\right\} - 1\right] d\mu = 0.$$

Из леммы 3 следует, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,\, p}(E) = 0$. Отсюда же можно заключить, что $\dim_H(E) = 0$.

Библиографические ссылки

1. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Москва: Мир; 1973. 342 с.

2. Federer H, Ziemer W. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p-th power summable. *Indiana University Mathematics Journal.* 1973;22(2):139–158. DOI: 10.1512/iumj.1973.22.22013.

3. Bagby T, Ziemer WP. Pointwise differentiability and absolute continuity. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1974;191:129–148.

4. Calderón CP, Fabes EB, Riviere NM. Maximal smoothing operators. *Indiana University Mathematics Journal.* 1974;23:889–898. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23073.

5. Meyers NG. Taylor expansion of Bessel potentials. *Indiana University Mathematics Journal.* 1974;23:1043–1049. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23085.

6. Hajłasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space. *Potential Analysis.* 1996;5(4):403–415. DOI: 10.1007/BF00275475.

7. Hajłasz P, Kinnunen J. Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana.* 1998;14(3):601–622. DOI: 10.4171/RMI/246.

8. Kinnunen J, Latvala V. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana.* 2002;18(3):685–700. DOI: 10.4171/RMI/332.

9. Прохорович МА. Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша – Соболева на метрических пространствах с мерой. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2006;1:19–23.

10. Прохорович МА. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа. *Математические заметки.* 2009;85(4):616–621. DOI: 10.4213/mzm6642.

11. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p, $p > 0$. I. Lebesgue points. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis.* 2016;51(6):282–295. DOI: 10.3103/S1068362316060029.

12. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p, $p > 0$. II. Lusin's approximation. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis.* 2017;52(1):30–37. DOI: 10.3103/S1068362317010046.

13. Yang D. New characterization of Hajłasz – Sobolev spaces on metric spaces. *Science in China. Series A: Mathematics.* 2003; 46(5):675–689. DOI: 10.1360/02ys0343.

14. Кротов ВГ, Порабкович АИ. Оценки L^p-осцилляций функций при $p > 0$. *Математические заметки.* 2015;97(3):407–420. DOI: 10.4213/mzm10600.

15. Kinnunen J, Martio O. The Sobolev capacity on metric spaces. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica.* 1996; 21:367–382.

16. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces.* Berlin: Springer-Verlag; 2001. 141 p.

17. Порабкович АИ. Самоулучшение L^p-неравенства Пуанкаре при $p > 0$. *Чебышевский сборник.* 2016;17(1-57):187–200.

References

1. Stein E. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton: Princeton University Press; 1970. 287 p.
Russian edition: Stein E. *Singulyarnye integraly i differentsial'nye svoistva funktsii.* Moscow: Mir; 1973. 342 p.

2. Federer H, Ziemer W. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p-th power summable. *Indiana University Mathematics Journal.* 1973;22(2):139–158. DOI: 10.1512/iumj.1973.22.22013.

3. Bagby T, Ziemer WP. Pointwise differentiability and absolute continuity. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1974;191:129–148.

4. Calderón CP, Fabes EB, Riviere NM. Maximal smoothing operators. *Indiana University Mathematics Journal.* 1974;23: 889–898. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23073.

5. Meyers NG. Taylor expansion of Bessel potentials. *Indiana University Mathematics Journal.* 1974;23:1043–1049. DOI: 10.1512/iumj.1974.23.23085.

6. Hajłasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space. *Potential Analysis.* 1996;5(4):403–415. DOI: 10.1007/BF00275475.

7. Hajłasz P, Kinnunen J. Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana.* 1998;14(3):601–622. DOI: 10.4171/RMI/246.

8. Kinnunen J, Latvala V. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces. *Revista Matemática Iberoamericana.* 2002; 18(3):685–700. DOI: 10.4171/RMI/332.

9. Prokhorovich MA. [Capacities and Lebesgue points for fractional Hajłasz – Sobolev classes on metric measure spaces]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2006;1:19–23. Russian.

10. Prokhorovich MA. [Hausdorff measures and Lebesgue points for Sobolev classes, $\alpha > 0$, on spaces of homogeneous type]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 2009;85(4):616–621. DOI: 10.4213/mzm6642. Russian.

11. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p, $p > 0$. I. Lebesgue points. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis.* 2016;51(6):282–295. DOI: 10.3103/S1068362316060029.

12. Bondarev SA, Krotov VG. Fine properties of Functions from Hajłasz – Sobolev classes M_α^p, $p > 0$. II. Lusin's approximation. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis.* 2017;52(1):30–37. DOI: 10.3103/S1068362317010046.

13. Yang D. New characterization of Hajłasz – Sobolev spaces on metric spaces. *Science in China. Series A: Mathematics.* 2003; 46(5):675–689. DOI: 10.1360/02ys0343.

14. Krotov VG, Porabkovich AI. Estimates of L^p-oscillations of functions for $p > 0$. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 2015;97(3):407–420. DOI: 10.4213/mzm10600. Russian.

15. Kinnunen J, Martio O. The Sobolev capacity on metric spaces. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica.* 1996; 21:367–382.

16. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces.* Berlin: Springer-Verlag; 2001. 141 p.

17. Porabkovich AI. [Self-improvement of L^p-Poincare inequality for $p > 0$]. *Chebyshevskii sbornik.* 2016;17(1-57):187–200. Russian.

Статья поступила в редколлегию 08.06.2018.
Received by editorial board 08.06.2018.