УДК 517.955:519.622

О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

П. П. ЗАБРЕЙКО[1], **С. В. ПОНОМАРЕВА**[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуются нелокальные условия разрешимости задачи типа Коши для дробных дифференциальных уравнений с производными Римана – Лиувилля в некотором специальном пространстве функций. Задача Коши сводится к нахождению неподвижной точки интегрального оператора A, затем для него строится инвариантное множество («сдвиг» шара из пространства непрерывных функций) и применяются принцип Шаудера и принцип Банаха – Каччиопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве. Получены условия разрешимости рассматриваемой задачи в данном функциональном пространстве, а также условия существования единственного решения.

Ключевые слова: задача Коши; дробная производная Римана – Лиувилля; принцип Шаудера; принцип Банаха – Каччиопполи.

Образец цитирования:
Забрейко ПП, Пономарева СВ. О непрерывности решений задачи Коши для уравнений дробного порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:39–45.

For citation:
Zabreiko PP, Ponomareva SV. On continuous solutions of the Cauchy problem for equations of fractional order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:39–45. Russian.

Авторы:
Петр Петрович Забрейко – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета.
Светлана Владимировна Пономарева – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета.

Authors:
Petr P. Zabreiko, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
zabreiko@mail.ru
Svetlana V. Ponomareva, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics.
demyanko@bsu.by

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018;3:39–45
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2018;3:39–45

ON CONTINUOUS SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

P. P. ZABREIKO[a]***, S. V. PONOMAREVA***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: S. V. Ponomareva (demyanko@bsu.by)

It is studied the nonlocal conditions of solving Cauchy-type problem for fractional differential equations with Riemann – Liouville derivatives in some special function space. The Cauchy problem is reduced to a the finding fixed point of an integral operator *A*, then is constructed an invariant set for *A* (the «shift» of a ball from the space of continuous functions, and then it is applied the Schauder anf Banach – Caccioppoli fixed point principles. As a result, the conditions of solvability and unique solvability for the Cauchy problem under consideration are given.

Key words: Cauchy problem; fractional Riemann – Liouville derivative; the Schauder fixed point principle; the Banach – Caccioppoli fixed point principle.

1. Будем рассматривать аналог задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля D^{α} порядка α, $0 < \alpha < 1$, на конечном отрезке $[0, T]$ действительной оси

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim\limits_{t \to 0} t^{1-\alpha} x(t) = \xi, \end{cases} \tag{1}$$

где дробная производная Римана – Лиувилля определяется равенством

$$D^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_0^t \frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}.$$

Относительно нелинейности $f(s, u)$ будем предполагать, что она непрерывна по совокупности переменных на множестве $(0, T] \times (-\infty, \infty)$.

Литература, посвященная исследованию задачи Коши для дробно-дифференциальных уравнений, весьма обширна. Общая теория таких уравнений достаточно полно представлена в обзорной монографии [1] (см. также [2]), в [3] описываются решения подобных задач и с другими видами дробных производных. Отыскание решений задачи типа Коши для уравнений с дробными производными Римана – Лиувилля обычно сводится к решению интегрального уравнения Вольтерры

$$x(t) = \frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\,ds,$$

и доказывается их одновременная разрешимость в определенных пространствах функций. В формулировании начального значения проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с дробными производными в форме Римана – Лиувилля начальные условия даются, как правило, в терминах дробных интегралов.

Придерживаясь общепринятой схемы, отыскание решений задачи (1) сведем к нахождению неподвижных точек оператора

$$Ax(t) = \tilde{\xi}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\,ds, \ \left(\tilde{\xi}(t) = \frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \tag{2}$$

в подходящем пространстве функций, определенных на отрезке $[0, T]$.

Решение задачи (1) в пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ определенных на отрезке $[0, T]$ и непрерывных на $(0, T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел

$$x(*) = \lim_{t \to 0} \frac{x(t)}{t^{\alpha-1}},$$

с нормой

$$\| x \|_{1-\alpha} = \sup_{0<t\le T} t^{1-\alpha}\left|x(t)\right|$$

исследовалось в [4], где были получены (нелокальные) условия существования и единственности решения.

В данной работе задача Коши (1) будет изучаться в более узком пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$ функций, представимых в виде $x(t) = \xi\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + x_c(t)$ $\left(\xi \in \mathbb{R},\ x_c(t) \in C[0, T]\right)$, с нормой

$$\left\|\xi\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + x(t)\right\|_{(1-\alpha)} = |\xi| + \|x(t)\|_C.$$

Это пространство не совпадает с $C_{1-\alpha}[0, T]$ ($t^{\gamma} \in C_{1-\alpha} \backslash C_{(1-\alpha)}$ при $\alpha - 1 < \gamma < 0$). Однако оно непрерывно вложено в пространство $C_{1-\alpha}$, причем

$$\|x(t)\|_{1-\alpha} = \left(\max\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}, T^{1-\alpha}\right\}\right)\|x(t)\|_{(1-\alpha)}\left(x(t) \in C_{(1-\alpha)}[0, T]\right),$$

а его замыкание совпадает с пространством $C_{1-\alpha}[0, T]$.

Действительно, так как $\dfrac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ лежит в $C_{(1-\alpha)}$, то достаточно функциями из $C_{(1-\alpha)}$ аппроксимировать функции из $C_{1-\alpha}$, для которых $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha}x(t) = 0$. Пусть $x(t)$ – такая функция, и пусть $t^{1-\alpha}\left|x(t)\right| \le \dfrac{1}{n}$ при $0 < t < \delta_n(x)$. Положим $D_n(x) = \left\{t : t^{1-\alpha}\left|x(t)\right| \ge \dfrac{1}{n}\right\} \cap \left(0, \delta_n(x)\right)$ ($n = 1, 2, \ldots$) и рассмотрим принадлежащие $C_{(1-\alpha)}$ функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{1-\alpha}}{n}\operatorname{sign} x(t) \text{ при } t \in D_n(t), \\ x(t) \text{ при } t \notin D_n(t). \end{cases}$$

Оценим норму $\left\|x(t) - x_n(t)\right\|_{1-\alpha}$. Очевидно,

$$t^{1-\alpha}\left|x(t) - x_n(t)\right| = \begin{cases} t^{1-\alpha}x(t) - \dfrac{1}{n}\operatorname{sign} x(t) \text{ при } t \in D_n(t), \\ 0 \text{ при } t \notin D_n(t), \end{cases}$$

и, значит, $t^{1-\alpha}\left|x(t) - x_n(t)\right| \le \dfrac{1}{n}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x(t) - x_n(t)\right\|_{1-\alpha} = 0$.

Из сказанного следует, что теоремы существования решения задачи (1) в пространстве $C_{(1-\alpha)}$ – более сильный факт, чем в пространстве $C_{1-\alpha}$, а теоремы единственности решения, наоборот, – менее сильный факт в $C_{(1-\alpha)}$, чем в $C_{1-\alpha}$.

2. Опишем простейшие условия, при которых оператор (2) действует в пространстве $C_{(1-\alpha)}$.

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|f(t, u)\right| \le \mu(t) + \nu(t)|u| \ \ (0 < t \le T, -\infty < u < \infty), \tag{3}$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции со свойствами, которые будут описаны ниже. Тогда выполняется неравенство

$$\left|f\left(t, x(t)\right)\right| \le \mu(t) + \nu(t)\left|x(t)\right| \ \ (0 < t \le T).$$

Отсюда $\left(\tilde{\xi}(t) = \xi t^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\right)$

$$\left|Ax(t)\right| \le \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\mu(s) + \nu(s)\left|x(s)\right|\right)ds \quad (0 < t \le T)$$

и далее

$$\left|Ax(t)\right| \le \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)\left|x(s)\right|ds \le$$

$$\le \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)ds + \frac{|\xi|}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)s^{\alpha-1}ds +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)\left|x_c(s)\right|ds.$$

Из этого неравенства вытекает, что оператор A будет ограниченно действовать в пространстве $C_{(1-\alpha)}$, если для функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ выполняются условия

$$\tilde{\mu}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)ds \in C[0, T], \ \tilde{\nu}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\nu(s)ds \in C[0, T]. \tag{4}$$

Примерами таких функций могут служить

$$\mu(t) = t^{-\beta} \ \ (0 \le \beta < \alpha), \ \nu(t) = s^{-\gamma} \ \ (\gamma < 1 - 2\alpha).$$

Лемма 1. *Пусть нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству (3), причем для функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ выполняется условие (4). Тогда оператор (2) действует в пространстве $C_{(1-\alpha)}$ и ограничен. Более того, этот оператор и вполне непрерывен.*

Действие и ограниченность оператора (2) показаны выше. Его непрерывность следует из непрерывности оператора суперпозиции $f x(t) = f(t, x(t))$, которая вытекает из непрерывности нелинейности $f(s, u)$ [5]. Компактность этого оператора следует из компактности оператора I^α [6; 7].

3. Напомним принцип Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве:

Если A – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X, оставляющий инвариантным ограниченное замкнутое выпуклое множество $Q \subset X$, то он имеет в Q по крайней мере одну неподвижную точку (т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в Q по крайней мере одно решение x_*: $x_* = Ax_*$).

Предположим, что нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству (3), а $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции, удовлетворяющие условию (4).

В качестве инвариантного для оператора A множества Q будем рассматривать множество $B(\xi, u) = \left\{x(t) : \left|x(t) - \tilde{\xi}(t)\right| \le u(t)\right\}$, где $u(t)$ – непрерывная функция. Ограниченность, замкнутость и выпуклость этого множества очевидны.

Пусть $x(t) \in B(\xi, u)$. Перепишем равенство (2) в виде

$$Ax(t) - \tilde{\xi}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, \tilde{\xi}(s) + \left(x(s) - \tilde{\xi}(s)\right)\right)ds.$$

Далее имеем

$$\left|Ax(t) - \tilde{\xi}(t)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\mu(s) + \nu(s)\tilde{\xi}(s)\right)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)\left|x(s) - \tilde{\xi}(s)\right|ds,$$

$$\left|Ax(t)-\tilde{\xi}(t)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\mu(s)+\nu(s)\tilde{\xi}(s)\right)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)u(s)ds.$$

Из полученного неравенства вытекает, что оператор A оставляет множество $B(\xi, u)$ инвариантным, если для функции $u(t)$ справедливо

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\mu(s)+\nu(s)\tilde{\xi}(s)\right)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)u(s)ds \le u(t).$$

Будем искать функцию $u(t)$ как решение линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\mu(s)+\nu(s)\tilde{\xi}(s)\right)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)u(s)ds = u(t) \tag{5}$$

в пространстве непрерывных функций $C[0, T]$. Поскольку при выполнении условия (4) первое слагаемое в (5) является непрерывной функцией, а второе слагаемое является вполне непрерывным оператором в пространстве $C[0, T]$, то уравнение (5) [6–8] имеет единственное решение при любом значении ξ и справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть для $f(t, u)$ справедливо неравенство (3), функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ удовлетворяют условиям (8). Тогда оператор A, определенный формулой (2), будет оставлять инвариантным множество B, определенное функцией $u(t)$ ($AB \subseteq B$), где $u(t)$ – решение интегрального уравнения (5).*

Из этих рассуждений и принципа Шаудера вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для правой части $f(t, u)$ уравнения (1) выполняется ограничение (3). Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in R$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \in C_{(1-\alpha)}$.*

4. Напомним принцип Банаха – Каччиопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве:

Если A – действующий в полном метрическом пространстве (M, ρ) оператор, удовлетворяющий условию Липшица $\rho(Ax_1, Ax_2) \le k\rho(x_1, x_2)$ ($x_1, x_2 \in M$) с постоянной $k < 1$, то он имеет в M единственную неподвижную точку, т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в M единственное решение x_*: $x_* = Ax_*$, и это решение является пределом последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) при любом $x_0 \in M$.

В качестве метрического пространства M рассматривается пространство $(B(\xi, u), \rho)$, в котором $B(\xi, u)$ – построенное выше инвариантное для A множество, а метрика ρ определяется ниже.

Пусть $f(s, u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left|f(s, u_1)-f(s, u_2)\right| \le \lambda(s)\left|u_1-u_2\right| \quad (0 < s \le T, -\infty < u_1, u_2 < \infty) \tag{6}$$

с некоторой положительной функцией $\lambda(s)$. В качестве метрики ρ на множестве $B(\xi, u)$ будем рассматривать норму

$$\|x\|_\lambda = \max_{0\le t\le T}\frac{|x(t)|}{\lambda(t)},$$

функцию $\lambda(s)$ выберем так, чтобы оператор A в этой метрике удовлетворял условию Липшица с некоторой постоянной $k < 1$.

Очевидно,

$$\left|Ax_1(t)-Ax_2(t)\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, x_1(s)\right)-f\left(s, x_2(s)\right)\right|ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)\left|x_1(s)-x_2(s)\right|ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda(s)ds\left\|x_1(t)-x_2(t)\right\|_\lambda,$$

откуда

$$\left\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\right\|_\lambda \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{0 \le t \le T} \left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s)\, ds\right| \left\|x_{1_c}(t) - x_{2_c}(t)\right\|_\lambda.$$

Оператор A будет удовлетворять условию Липшица с постоянной k, если для $\lambda(s)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\|\int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \lambda(s)\, ds\right\| \le k.$$

В свою очередь, это неравенство выполнено, если функция $\lambda(s)$ является решением интегрального уравнения

$$1 + \frac{1}{k\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s)\, ds = \lambda(t). \tag{7}$$

Но это уравнение, в силу компактности стоящего в его левой части оператора, имеет единственное положительное решение $\lambda(t)$. Таким образом, при данном выборе $\lambda(s)$ оператор A удовлетворяет условию Липшица с постоянной k.

Остается заметить, что в качестве k можно взять произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$. При этом, в силу непрерывности и положительности функции $\lambda(t)$, эта норма эквивалентна норме пространства $C[0, T]$.

Таким образом, оператор A, определенный формулой (2), будет оставлять инвариантным множество $B(\xi, \rho)$, в котором функция $u(t)$ – решение интегрального уравнения (5); более того, с метрикой $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_\lambda$, построенной по функции $\lambda(t)$ – решению интегрального уравнения (7) с $k < 1$, удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с постоянной $k < 1$. Тем самым верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть правая часть* $f(t, x(t))$ *уравнения (1) удовлетворяет неравенствам (3) и (6). Тогда задача Коши (1) при любом* $\xi \in \mathbb{R}$ *имеет в пространстве* $C_{(1-\alpha)}[0, T]$ *единственное решение* $x(t)$.

Библиографические ссылки

1. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies 204.* New York: Elsevier science; 2006. 523 p.

2. Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mehanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures*. 1997;378:223–276.

3. Kilbas AA. New trends on fractional integral and differential equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*. 2005;147(1):72–106.

4. Забрейко ПП, Пономарева СВ. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана – Лиувилля. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2018;62(4):391–397. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-6.

5. Красносельский МА, Забрейко ПП, Пустыльник ЕИ, Соболевский ПЕ. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* Москва: Наука; 1966. 500 с.

6. Забрейко ПП, Кошелев АИ, Красносельский МА, Михлин СГ, Раковщик ЛС, Стеценко ВЯ. *Интегральные уравнения.* Москва: Наука; 1968. 448 с.

7. Забрейко ПП. Об интегральных операторах Вольтерра. *Успехи математических наук.* 1967;22(1):167–168.

8. Забрейко ПП. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра. *Литовский математический сборник.* 1967;2:281–287.

References

1. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies 204.* New York: Elsevier science; 2006. 523 p.

2. Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mehanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures*. 1997;378:223–276.

3. Kilbas AA. New trends on fractional integral and differential equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*. 2005;147(1):72–106.

4. Zabreiko PP, Ponomareva SV. [Cauchy Problem for Riemann – Liouville fractional derivative equations]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2018;62(4):391–397. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-6.

5. Krasnosel'skii MA, Zabreiko PP, Pustylnik EI, Sobolevskii PE. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii* [Integral operators in spaces of summable functions]. Moscow: Nauka; 1966. 500 p. Russian.

6. Zabreiko PP, Koshelev AI, Krasnosel'skii MA, Mikhlin SG, Rakovshchik LS, Stetsenko VYa. *Integral'nye uravneniya* [Integral equations]. Moscow: Nauka; 1968. 448 p. Russian.

7. Zabreiko PP. Volterra integral operators. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys]. 1967;22(1):167–168. Russian.

8. Zabreiko PP. [On the spectral radius of integral Volterra operators]. *Litovskii matematicheskii sbornik* [Lithuanian Mathematical Journal]. 1967;2:281–287. Russian.

Статья поступила в редколлегию 11.06.2018.
Received by editorial board 11.06.2018.