УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, НАГРУЖЕННОГО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ

В. В. КОРОЛЕВИЧ[1]***, Д. Г. МЕДВЕДЕВ***[2]

[1]*Международный центр современного образования,*
ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия
[2]*Белорусский государственный университет,*
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Приводится решение плоской задачи теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска постоянной толщины. На внешнем контуре диск равномерно нагружен системой одинаковых сосредоточенных сил, симметричных относительно диаметра. Диск посажен с натягом на гибкий вал, так что на внутреннем контуре действует постоянное контактное давление. Напряжения и деформации, возникающие в таком вращающемся анизотропном кольцевом диске, будут неосесимметричными. Выводится дифференциальное уравнение 4-го порядка в частных производных для функции напряжений Эри. Его общее решение разыскивается в виде ряда Фурье по косинусам с четными номерами. Полученная бесконечная система обыкновенных дифференциальных

Образец цитирования:
Королевич ВВ, Медведев ДГ. Напряженно-деформированное состояние вращающегося полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами по внешнему контуру. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:46–58.

For citation:
Karalevich UV, Medvedev DG. Stressed-deformed state of a rotating polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3: 46–58. Russian.

Авторы:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij G. Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

уравнений решается стандартными методами теории дифференциальных уравнений. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. По известным формулам записываются выражения для компонент напряжений через функцию напряжений. Путем интегрирования уравнений закона Гука для полярно-ортотропной пластины определяются компоненты вектора перемещения в диске. Зная последние, легко по дифференциальным соотношениям Коши вычислить компоненты деформаций в кольцевом анизотропном диске. Отдельно рассмотрен случай вращающегося сплошного полярно-ортотропного диска постоянной толщины, нагруженного сосредоточенными силами на внешнем контуре. Полученные формулы для напряжений и перемещений полностью описывают напряженно-деформированное состояние во вращающемся полярно-ортотропном диске постоянной толщины с системой сосредоточенных сил на внешнем контуре.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск; сосредоточенная сила; дифференциальное уравнение; напряжения; деформации; перемещения в диске.

STRESSED-DEFORMED STATE OF A ROTATING POLAR-ORTHOTROPIC DISK OF CONSTANT THICKNESS LOADED WITH UNDISTRACTED FORCES ON THE OUTER CONTOUR

U. V. KARALEVICH [a], ***D. G. MEDVEDEV*** [b]

[a]*International Center of Modern Education, 61 Štěpánská, Prague 1, PSČ 110 00, Czech*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: D. G. Medvedev (medvedev@bsu.by)

The work gives a solution of the plane elasticity problem for a rotating polar-orthotropic annular disk of a constant thickness. The disk is loaded with a system of identical undistracted forces on the outer contour applied evenly along the rim and symmetric concerning the diameter. The disk is seated with an interference fit on the flexible shaft so that a constant contact pressure acts on the interior contour. The stresses and deformations arising in such a rotating anisotropic annular disk will be non-axisymmetric. A conclusion of a fourth-order partial differential equation for the Erie stress function is drawn. Its general solution is searched out in the form of a Fourier series of cosines with even numbers. The resulting infinite system of ordinary differential equations is solved by standard methods of the theory of differential equations. Constants of integration are determined from the border conditions. Expressions for the stress components are written through the stress function by the well-known formulas. We find the components of the displacement vector in the disk by the integration of the Hooke's law equations for the polar-orthotropic plate. It is easy to calculate the deformation components in a ring anisotropic disk by Cauchy differential relations if we know the displacements. The case of a rotating solid polar-orthotropic disk of constant thickness loaded with undistracted forces on the outer contour is considered separately. The obtained formulas for stresses and displacements completely describe the stress-deformed state in a rotating polar-orthotropic disc of constant thickness with a system of undistracted forces on the outer contour.

Key words: polar-orthotropic disc; undistracted force; differential equation; stresses; deformations; displacements in the disk.

Введение

В современных лабораторных испытаниях часто используются стаканчиковые центрифуги, например для фракционирования крови или классификации микропорошков, а также центрифуги для исследования на эрозионную стойкость различных материалов, применяемых в авиационной и ракетной технике.

В НПО «Центр» разработаны и производятся центрифуги большого объема для фракционирования крови на станциях переливания крови и для классификации микропорошков на горно-обогатительных комбинатах [1]. Актуальной остается задача создания малых портативных центрифуг для фракционирования крови и ее экспресс-анализа (например, для бригад скорой помощи), а также малых центрифуг для классификации микропорошков в лабораторных исследованиях.

С запуском первого белорусского спутника в 2012 г. Республика Беларусь стала космической державой. Она принимает участие в различных международных проектах исследования космоса. В 2016 г.

Беларусь начала производить собственные высокоточные ракетные комплексы «Полонез», а также планирует разработать и создать крылатые ракеты «Аист». В связи с этим весьма актуальным становится проведение большого комплекса исследований по изучению влияния капельно-жидкостной и пылевидной среды на эрозионную стойкость материалов обтекателей головных частей ракет или обшивки капсулы спускаемого космического аппарата. Такие работы успешно проводились в 1980–90-х гг. в НПО «Центр» [2].

Роторы в указанных центрифугах могут иметь различные формы. Предлагаемый в данной работе ротор, как наиболее технологически простой в изготовлении и обладающий высокой производительностью, представляет собой анизотропный тонкий кольцевой диск постоянной толщины h_0, нагруженный на внешнем контуре системой одинаковых сосредоточенных сил, приложенных равномерно по ободу и симметричных относительно диаметра. *Сосредоточенные силы* – это силы инерции, создаваемые стаканчиками с жидкостью или держателями с испытываемыми образцами материалов, возникающие при вращении ротора и действующие на малых участках внешнего контура. Диск насаживается с натягом на гибкий вал, так что на внутреннем контуре действует постоянное контактное давление p_0. Напряжения и деформации, возникающие в таком вращающемся анизотропном кольцевом диске, будут неосесимметричными.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть материал диска обладает цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, в каждой точке которого имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Диск вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с осью анизотропии и перпендикулярной срединной плоскости диска. На внешнем контуре диск нагружен системой N одинаковых сосредоточенных сил $P_i \ (i = \overline{1,\ N})$, а на внутреннем контуре действует контактное давление p_0.

Требуется найти распределение напряжений, деформаций и перемещений в данном анизотропном кольцевом диске постоянной толщины.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска. Ось z направим вертикально вверх. Радиус внутреннего контура диска обозначим r_0, а радиус внешнего – R. Для тонкого диска отношение его толщины h_0 к внешнему радиусу R должно быть меньше $\frac{1}{20}$ $\left(\frac{h_0}{R} < \frac{1}{20}\right)$. Например, при $R = 20$ см толщина диска h_0 равна 1 см, т. е. рассматриваемый тонкий диск не является таким тонкостенным, как мембрана.

Поскольку тонкий диск нагружен сосредоточенными силами, приложенными на внешней его границе параллельно плоскости диска, а центробежные силы действуют в той же плоскости, то диск будет находиться в *плоском напряженном состоянии* [3]. Тогда нормальным напряжением σ_z и касательными напряжениями $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ и $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ можно пренебречь по сравнению с остальными нормальными радиальным σ_r и тангенциальным σ_θ напряжениями и касательными $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ напряжениями. Предполагается, что компоненты напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ почти не зависят от координаты z и являются функциями только координат r и θ.

Отклонение от плоского напряженного состояния будет только в местах крепления стаканчиков с жидкостью или держателей образцов. Там появятся контактные напряжения, которые можно оценить по формулам сопротивления материалов или рассчитать методом конечных элементов.

Если фактор разделения Fr (или критерий Фруда, т. е. отношение центростремительного ускорения $a = \omega^2 R$ к ускорению свободного падения g) равен 1000–5000, то в стаканчиковых центрифугах влияние веса стаканчиков и диска на напряженное состояние в диске пренебрежимо мало и его можно не учитывать.

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент. Запишем уравнения равновесия этого элемента [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \rho\omega^2 r = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ρ – плотность композитного материала диска.

Закон Гука для полярно-ортотропной пластины имеет вид [4]

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E_r}\sigma_r - \dfrac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta, \\ \varepsilon_\theta = -\dfrac{\nu_{r\theta}}{E_r}\sigma_r + \dfrac{1}{E_\theta}\sigma_\theta, \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon_r(r, \theta)$ и $\varepsilon_\theta(r, \theta)$ – нормальная радиальная и нормальная тангенциальная компоненты деформации соответственно; E_r и E_θ – модули упругости при растяжении (сжатии) анизотропного тела в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ – коэффициенты Пуассона; $\gamma_{r\theta}(r, \theta)$ – деформация сдвига; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига.

Для полярно-ортотропного тела справедливо следующее равенство:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}.$$

Обозначим компоненты вектора перемещения $\vec{U}$ в радиальном направлении через $u(r, \theta)$, а в тангенциальном – через $v(r, \theta)$.

Связь компонент деформаций ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$ с компонентами u и v вектора перемещения $\vec{U}$ задается дифференциальными соотношениями Коши [3]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \tag{3}$$

Исключая из (3) компоненты u и v вектора перемещения $\vec{U}$, получим уравнение совместности деформаций [4]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (r\varepsilon_\theta)}{\partial r^2} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta}. \tag{4}$$

Таким образом, имеем все уравнения плоской задачи теории упругости для вращающегося анизотропного тонкого кольцевого диска: два уравнения равновесия (1), три уравнения закона Гука (2), три дифференциальных соотношения Коши (3), которые содержат 8 неизвестных функций σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$, u, v. Число неизвестных функций равно количеству уравнений.

Дополним нашу плоскую задачу теории упругости граничными условиями

$$\sigma_r(r_0, \theta) = -p_0, \ \sigma_r(R, \theta) = q_N(R, \theta), \tag{5}$$

$$\tau_{r\theta}(r_0, \theta) = 0, \ \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0,$$

где $q_N(R, \theta)$ – интенсивность распределенной нагрузки на внешнем контуре.

Решение плоской задачи теории упругости

Как известно, решение плоской задачи теории упругости для вращающегося тонкого анизотропного кольцевого диска при заданных граничных условиях (5) удобно вести с помощью функции напряжений Эри $F(r, \theta)$.

Компоненты напряжений $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ выражаются через функцию $F(r, \theta)$ по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}, \ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}, \ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}. \tag{6}$$

Подстановка соотношений (6) в уравнения равновесия (1) обращает их в тождества.

Записывая компоненты деформаций в законе Гука (2) через функцию напряжений $F(r, \theta)$ и затем подставляя их в уравнение совместности деформаций (4), получим неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка для функции $F(r, \theta)$ [4]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}+\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{k^2}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}-\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{k^2}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+$$

$$+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)+2k^2\right]\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{k^2}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r}=-\left[\left(k^2-1\right)-2\left(1-\nu_{\theta r}\right)\right]\rho\omega^2, \quad (7)$$

где $k^2=\dfrac{E_\theta}{E_r}$.

Поскольку на внешнем контуре диска приложено четное количество N одинаковых и симметричных относительно диаметра сосредоточенных сил P_i, то разложим функцию напряжений $F(r,\theta)$ в ряд Фурье по косинусам с четными номерами:

$$F(r,\theta)=\Phi_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{Nn}(r)\cos Nn\theta. \quad (8)$$

Подставляя разложение (8) в уравнение (7), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для функций $\Phi_0(r)$, $\Phi_{Nn}(r)$:

$$(n=0)\qquad \frac{d^4\Phi_0}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\Phi_0}{dr^3}-\frac{k^2}{r^2}\frac{d^2\Phi_0}{dr^2}+\frac{k^2}{r^3}\frac{d\Phi_0}{dr}x=-\left[\left(k^2-1\right)-2\left(1-\nu_{\theta r}\right)\right]\rho\omega^2; \quad (9)$$

$$(n\geq 1)\qquad \frac{d^4\Phi_{Nn}}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\Phi_{Nn}}{dr^3}-\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+k^2\right]\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi_{Nn}}{dr^2}+$$

$$+\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+k^2\right]\frac{1}{r^3}\frac{d\Phi_{Nn}}{dr}-\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)-\left((Nn)^2-2\right)k^2\right]\frac{(Nn)^2}{r^4}\Phi_{Nn}(r)=0. \quad (10)$$

Введем новую переменную $t=\ln r$. Уравнения (9), (10) приведем к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$(n=0)\qquad \frac{d^4\Phi_0}{dt^4}-4\frac{d^3\Phi_0}{dt^3}-\left(k^2-5\right)\frac{d^2\Phi_0}{dt^2}+2\left(k^2-1\right)\frac{d\Phi_0}{dt}=-\left[\left(k^2-1\right)-2\left(1-\nu_{\theta r}\right)\right]\rho\omega^2 e^{4t}; \quad (11)$$

$$(n\geq 1)\qquad \frac{d^4\Phi_{Nn}}{dt^4}-4\frac{d^3\Phi_{Nn}}{dt^3}-\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2-5\right)\right]\frac{d^2\Phi_{Nn}}{dt^2}+$$

$$+2\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2-1\right)\right]\frac{d\Phi_{Nn}}{dt}-(Nn)^2\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)-\left((Nn)^2-2\right)k^2\right]\Phi_{Nn}(t)=0. \quad (12)$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения для уравнения (11) есть

$$\lambda^4-4\lambda^3-\left(k^2-5\right)\lambda^2+2\left(k^2-1\right)\lambda=0.$$

Его корни: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1+k$, $\lambda_4=1-k$.

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$\Phi_0^{\text{однор}}(t)=C_1^{(0)}+C_2^{(0)}e^{2t}+C_3^{(0)}e^{(1+k)t}+C_4^{(0)}e^{(1-k)t},$$

где $C_i^{(0)}$ $(i=\overline{1,4})$ – произвольные постоянные.

Частное решение дифференциального уравнения (11) равно

$$\Phi_0^{\text{част}}(t)=-\frac{\left[\left(k^2-1\right)-2\left(1-\nu_{\theta r}\right)\right]}{\left(9-k^2\right)}\frac{\rho\omega^2}{8}e^{4t}.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (11) есть

$$\Phi_0(t)=C_1^{(0)}+C_2^{(0)}e^{2t}+C_3^{(0)}e^{(1+k)t}+C_4^{(0)}e^{(1-k)t}-\frac{\left[\left(k^2-1\right)-2\left(1-\nu_{\theta r}\right)\right]}{\left(9-k^2\right)}\frac{\rho\omega^2}{8}e^{4t}. \tag{13}$$

В переменной r решение (13) запишется в виде

$$\Phi_0(r)=C_1^{(0)}+C_2^{(0)}r^2+C_3^{(0)}r^{1+k}+C_4^{(0)}r^{1-k}-\frac{\left[\left(k^2-1\right)-2\left(1-\nu_{\theta r}\right)\right]}{\left(9-k^2\right)}\frac{\rho\omega^2r^4}{8}. \tag{14}$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения (12) есть

$$\mu^4-4\mu^3-\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2-5\right)\right]\mu^2+2\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2-1\right)\right]\mu-$$

$$-(Nn)^2\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)-\left((Nn)^2-2\right)k^2\right]=0. \tag{15}$$

Это алгебраическое уравнение 4-й степени путем замены $(\mu-1)^2=\chi$ сводится к биквадратному уравнению

$$\chi^2-\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2+1\right)\right]\chi+\left((Nn)^2-1\right)^2k^2=0.$$

Его корни равны

$$\chi_1=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2+1\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2+1\right)\right]^2-4\left((Nn)^2-1\right)^2k^2}\right\},$$

$$\chi_2=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2+1\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left[\left(\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\nu_{\theta r}\right)(Nn)^2+\left(k^2+1\right)\right]^2-4\left((Nn)^2-1\right)^2k^2}\right\}.$$

Тогда корни характеристического уравнения (15) есть

$$\mu_{1,2}=1\pm\sqrt{\chi_1},\ \mu_{3,4}=1\pm\sqrt{\chi_2}.$$

Используя формулу сложного радикала

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)}\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2-B}\right)}\right],$$

корни характеристического уравнения (15) окончательно запишем в виде

$$\mu_{1,2}(n)=1\pm m_1(n),\ \mu_{3,4}(n)=1\pm m_2(n),$$

где

$$m_1(n)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left[\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}+2\left(k-\nu_{\theta r}\right)\right](Nn)^2+(k-1)^2}+\sqrt{\left[\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\left(k+\nu_{\theta r}\right)\right](Nn)^2+(k+1)^2}\right\},$$

$$m_2(n)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left[\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}+2\left(k-\nu_{\theta r}\right)\right](Nn)^2+(k-1)^2}-\sqrt{\left[\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}-2\left(k+\nu_{\theta r}\right)\right](Nn)^2+(k+1)^2}\right\}.$$

(Далее аргумент n у функций $m_1(n)$ и $m_2(n)$ писать не будем.)

Общее решение однородного дифференциального уравнения (12) есть

$$\Phi_{Nn}(t)=C_1^{(Nn)}e^{(1+m_1)t}+C_2^{(Nn)}e^{(1-m_1)t}+C_3^{(Nn)}e^{(1+m_2)t}+C_4^{(Nn)}e^{(1-m_2)t}, \tag{16}$$

где $C_i^{(Nn)}$ $(i=\overline{1,\,4})$ – произвольные постоянные.

В переменной r решение (16) запишется в виде

$$\Phi_{Nn}(r)=C_1^{(Nn)}r^{1+m_1}+C_2^{(Nn)}r^{1-m_1}+C_3^{(Nn)}r^{1+m_2}+C_4^{(Nn)}r^{1-m_2}. \tag{17}$$

Учитывая выражения (14)–(17) для коэффициентов разложения в ряд Фурье (8) функции напряжений $F(r,\theta)$, вычислим по формулам (6) компоненты напряжений $\sigma_r(r,\theta)$, $\sigma_\theta(r,\theta)$, $\tau_{r\theta}(r,\theta)$:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r,\theta)&=(k+1)C_3^{(0)}r^{(k-1)}-(k-1)C_4^{(0)}r^{-(k+1)}-\frac{\left(3+\nu_{\theta r}\right)}{\left(9-k^2\right)}\rho\omega^2r^2+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\left[m_1-\left((Nn)^2-1\right)\right]C_1^{(Nn)}r^{(m_1-1)}-\left[m_1+\left((Nn)^2-1\right)\right]C_2^{(Nn)}r^{-(m_1+1)}+\\&+\left[m_2-\left((Nn)^2-1\right)\right]C_3^{(Nn)}r^{(m_2-1)}-\left[m_2+\left((Nn)^2-1\right)\right]C_4^{(Nn)}r^{-(m_2+1)}\Big\}\cos Nn\theta,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta(r,\theta)&=k(k+1)C_3^{(0)}r^{(k-1)}+k(k-1)C_4^{(0)}r^{-(k+1)}-\frac{\left(k^2+3\nu_{\theta r}\right)}{\left(9-k^2\right)}\rho\omega^2r^2+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[m_1(m_1+1)C_1^{(Nn)}r^{(m_1-1)}+m_1(m_1-1)C_2^{(Nn)}r^{-(m_1+1)}+m_2(m_2+1)C_3^{(Nn)}r^{(m_2-1)}+\\&+m_2(m_2-1)C_4^{(Nn)}r^{-(m_2+1)}\Big]\cos Nn\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta}(r,\theta)&=\sum_{n=1}^{\infty}Nn\Big[m_1C_1^{(Nn)}r^{(m_1-1)}-m_2C_2^{(Nn)}r^{-(m_1+1)}+m_2C_3^{(Nn)}r^{(m_2-1)}-\\&-m_2C_4^{(Nn)}r^{-(m_2+1)}\Big]\sin Nn\theta.\end{aligned}$$

Подставляя в уравнения Гука (2) выражения для компонент напряжений (18) и используя дифференциальные соотношения Коши (3), после их интегрирования получим компоненты $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$ вектора перемещения $\vec{U}$:

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{\left(k-\nu_{\theta r}\right)(k+1)}{E_\theta}C_3^{(0)}r^k+\frac{\left(k+\nu_{\theta r}\right)(k-1)}{E_\theta}C_4^{(0)}r^{-k}-\frac{\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)}{\left(9-k^2\right)}\frac{\rho\omega^2r^3}{E_\theta}-\\&-\frac{1}{E_\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{m_1}\left[\nu_{\theta r}m_1^2-\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_1+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_1^{(Nn)}r^{m_1}-\\&-\frac{1}{m_1}\left[\nu_{\theta r}m_1^2+\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_1+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_2^{(Nn)}r^{-m_1}+\\&+\frac{1}{m_2}\left[\nu_{\theta r}m_2^2-\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_2+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_3^{(Nn)}r^{m_2}-\\&-\frac{1}{m_2}\left[\nu_{\theta r}m_2^2+\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_2+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_4^{(Nn)}r^{-m_2}\Big\}\cos Nn\theta,\end{aligned} \tag{19}$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{E_\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Nn}\left\{\frac{1}{m_1}\left[m_1^2(m_1+1)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_1+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_1^{(Nn)}r^{m_1}+\right.$$

$$+\frac{1}{m_1}\left[m_1^2(m_1-1)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_1-\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_2^{(Nn)}r^{-m_1}+$$

$$+\frac{1}{m_2}\left[m_2^2(m_2+1)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_2+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_3^{(Nn)}r^{m_2}+$$

$$\left.+\frac{1}{m_2}\left[m_2^2(m_2-1)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_2-\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]C_4^{(Nn)}r^{-m_2}\right\}\sin Nn\theta.$$

Из условия однозначности перемещений в диске постоянную $C_2^{(0)}$ нужно приравнять к нулю.

Рассмотрим случай, когда диск нагружен двумя равными и диаметрально противоположными сосредоточенными силами $P_1=P_2=\dfrac{m_{\text{ст}}\omega^2R_{\text{ц. т}}^{\text{ст}}}{h_0}$, где $m_{\text{ст}}$ – масса стаканчика с жидкостью; $R_{\text{ц. т}}^{\text{ст}}$ – расстояние от оси вращения до центра тяжести стаканчика с жидкостью.

Заменим заданные сосредоточенные силы $P=P_1=P_2$ распределенной нагрузкой интенсивностью q_2, приложенной по двум малым дугам одинаковой длины $l=\varphi R$:

$$q_2=\frac{P}{\varphi R}\ \text{при}\ -\frac{\varphi}{2}\le\theta\le\frac{\varphi}{2}\ \text{и}\ \left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\le\theta\le\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$q_2=0\ \text{при}\ \frac{\varphi}{2}<\theta<\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\ \text{и}\ \left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)<\theta<\left(2\pi-\frac{\varphi}{2}\right),$$

где φ – произвольный сколь угодно малый центральный угол, опирающийся на дугу l.

Поскольку нагрузка q_2 симметрична относительно диаметра, разложим ее в тригонометрический ряд Фурье по косинусам с четными номерами n:

$$q_2(R,\theta)=\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}q_{2n}\cos 2n\theta,$$

где

$$q_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q_2d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi/2}\frac{P}{\varphi R}d\theta+\frac{2}{\pi}\int_{\pi-\varphi/2}^{\pi}\frac{P}{\varphi R}d\theta=\frac{2P}{\pi\varphi R}\left(\frac{\varphi}{2}-0\right)+\frac{2P}{\pi\varphi R}\left(\pi-\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=\frac{2P}{\pi R};$$

$$q_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q_2\cos 2n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi/2}\frac{P}{\varphi R}\cos 2n\theta d\theta+\frac{2}{\pi}\int_{\pi-\varphi/2}^{\pi}\frac{P}{\varphi R}\cos 2n\theta d\theta=\frac{2P}{\pi\varphi R}\left(\frac{\sin n\varphi-0}{2n}\right)+$$

$$+\frac{2P}{\pi\varphi R}\frac{1}{2n}\left(\sin 2n\pi-\sin 2n\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=\frac{2P}{\pi R}\left(\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right).$$

Так как $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)=1$, то $q_{2n}=\dfrac{2P}{\pi R}$. Следовательно,

$$q_2(R,\theta)=\frac{P}{\pi R}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\theta\right).$$

Аналогично рассуждая для случая нагружения внешнего контура диска N одинаковыми сосредоточенными силами P_i $(i=\overline{1,\,N})$, симметричными относительно диаметра, получим для распределенной нагрузки интенсивностью $q_N(R,\theta)$ выражение

$$q_N(R,\theta)=\frac{NP}{2\pi R}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nn\theta\right). \tag{20}$$

Для нахождения неизвестных постоянных $C_3^{(0)}, C_4^{(0)}$ и $C_i^{(Nn)}$ $(i=\overline{1,4})$ удовлетворим найденное решение (18) для компонент напряжений граничным условиям (5), в которых $q_N(R,\theta)$ задается выражением (20):

$$\sigma_r(r_0,\theta)=(k+1)C_3^{(0)}r_0^{(k-1)}-(k-1)C_4^{(0)}r_0^{-(k+1)}-\frac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2 r_0^2+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big[m_1-\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_1^{(Nn)}r_0^{(m_1-1)}-\Big[m_1+\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_2^{(Nn)}r_0^{-(m_1+1)}+$$

$$+\Big[m_2-\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_3^{(Nn)}r_0^{(m_2-1)}-\Big[m_2+\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_4^{(Nn)}r_0^{-(m_2+1)}\Big\}\cos Nn\theta=-p_0,$$

$$\tau_{r\theta}(r_0,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}Nn\Big[m_1C_1^{(Nn)}r_0^{(m_1-1)}-m_2C_2^{(Nn)}r_0^{-(m_1+1)}+$$

$$+m_2C_3^{(Nn)}r_0^{(m_2-1)}-m_2C_4^{(Nn)}r_0^{-(m_2+1)}\Big]\sin Nn\theta=0,$$

$$\sigma_r(R,\theta)=(k+1)C_3^{(0)}R^{(k-1)}-(k-1)C_4^{(0)}R^{-(k+1)}-\frac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big[m_1-\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_1^{(Nn)}R^{(m_1-1)}-\Big[m_1+\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_2^{(Nn)}R^{-(m_1+1)}+$$

$$+\Big[m_2-\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_3^{(Nn)}R^{(m_2-1)}-\Big[m_2+\big((Nn)^2-1\big)\Big]C_4^{(Nn)}R^{-(m_2+1)}\Big\}\cos Nn\theta=$$

$$=q_N(R,\theta)=\frac{NP}{2\pi R}+\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nn\theta, \tag{21}$$

$$\tau_{r\theta}(R,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}Nn\Big[m_1C_1^{(Nn)}R^{(m_1-1)}-m_2C_2^{(Nn)}R^{-(m_1+1)}+$$

$$+m_2C_3^{(Nn)}R^{(m_2-1)}-m_2C_4^{(Nn)}R^{-(m_2+1)}\Big]\sin Nn\theta=0.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{C}_3^{(0)}=(k+1)C_3^{(0)}R^{(k-1)},\ \tilde{C}_4^{(0)}=(k-1)C_4^{(0)}R^{-(k+1)};$$

$$\tilde{C}_1^{(Nn)}=C_1^{(Nn)}R^{(m_1-1)},\ \tilde{C}_2^{(Nn)}=C_2^{(Nn)}R^{-(m_1+1)},\ \tilde{C}_3^{(Nn)}=C_3^{(Nn)}R^{(m_2-1)},$$

$$\tilde{C}_4^{(Nn)}=C_4^{(Nn)}R^{-(m_2+1)};\ A=\frac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2;\ x=\frac{r}{R},\ \delta=\frac{r_0}{R},\ x\in[\delta,1].$$

Тогда систему уравнений (21) представим в виде двух систем:

$$(n=0)\qquad\begin{cases}\tilde{C}_3^{(0)}\delta^{(k-1)}-\tilde{C}_4^{(0)}\delta^{-(k+1)}=-p_0+\dfrac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2\delta^2,\\[2ex] \tilde{C}_3^{(0)}-\tilde{C}_4^{(0)}=\dfrac{NP}{2\pi R}+\dfrac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2;\end{cases} \tag{22}$$

$$
(n \geq 1) \quad \begin{cases} \tilde{C}_1^{(Nn)}\left[m_1 - \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\delta^{(m_1 - 1)} - \tilde{C}_2^{(Nn)}\left[m_1 + \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\delta^{-(m_1 + 1)} + \\ + \tilde{C}_3^{(Nn)}\left[m_2 - \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\delta^{(m_2 - 1)} - \tilde{C}_4^{(Nn)}\left[m_2 + \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\delta^{-(m_2 + 1)} = 0, \\ \tilde{C}_1^{(Nn)} m_1 \delta^{(m_1 - 1)} - \tilde{C}_2^{(Nn)} m_1 \delta^{-(m_1 + 1)} + \tilde{C}_3^{(Nn)} m_2 \delta^{(m_2 - 1)} - \tilde{C}_4^{(Nn)} m_2 \delta^{-(m_2 + 1)} = 0, \\ \tilde{C}_1^{(Nn)}\left[m_1 - \left((Nn)^2 - 1\right)\right] - \tilde{C}_2^{(Nn)}\left[m_1 + \left((Nn)^2 - 1\right)\right] + \\ + \tilde{C}_3^{(Nn)}\left[m_2 - \left((Nn)^2 - 1\right)\right] - \tilde{C}_4^{(Nn)}\left[m_2 + \left((Nn)^2 - 1\right)\right] = \dfrac{NP}{\pi R}, \\ \tilde{C}_1^{(Nn)} m_1 - \tilde{C}_2^{(Nn)} m_1 + \tilde{C}_3^{(Nn)} m_2 - \tilde{C}_4^{(Nn)} m_2 = 0. \end{cases} \tag{23}
$$

Решая системы алгебраических уравнений (22), (23) методом Крамера, получим

$$
\tilde{C}_3^{(0)} = p_0 \frac{\delta^{k+1}}{\left(1 - \delta^{2k}\right)} + \frac{NP}{2\pi R} \frac{1}{\left(1 - \delta^{2k}\right)} + \frac{\left(3 + \nu_{\theta r}\right)}{\left(9 - k^2\right)} \frac{\left(1 - \delta^{3+k}\right)}{\left(1 - \delta^{2k}\right)} \rho\omega^2 R^2,
$$

$$
\tilde{C}_4^{(0)} = p_0 \frac{\delta^{k+1}}{\left(1 - \delta^{2k}\right)} + \frac{NP}{2\pi R} \frac{\delta^{2k}}{\left(1 - \delta^{2k}\right)} + \frac{\left(3 + \nu_{\theta r}\right)}{\left(9 - k^2\right)} \frac{\left(\delta^{2k} - \delta^{3+k}\right)}{\left(1 - \delta^{2k}\right)} \rho\omega^2 R^2;
$$

$$
\tilde{C}_1^{(Nn)}(n) = -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_1^{*(Nn)}(n), \ \tilde{C}_2^{(Nn)}(n) = -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_2^{*(Nn)}(n),
$$

$$
\tilde{C}_3(n) = -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_3^{*(Nn)}(n), \ \tilde{C}_4^{(Nn)}(n) = -\frac{NP}{\pi R \Delta(n)} \tilde{C}_4^{*(Nn)}(n),
$$

где

$$
\tilde{C}_1^{*(Nn)}(n) = \left[2m_1 m_2 - m_2(m_1 - m_2)\delta^{-(m_1 + m_2)} - m_2(m_1 + m_2)\delta^{-(m_1 - m_2)}\right];
$$

$$
\tilde{C}_2^{*(Nn)}(n) = \left[2m_1 m_2 - m_2(m_1 - m_2)\delta^{(m_1 + m_2)} - m_2(m_1 + m_2)\delta^{(m_1 - m_2)}\right];
$$

$$
\tilde{C}_3^{*(Nn)}(n) = \left[2m_1 m_2 - m_1(m_1 + m_2)\delta^{(m_1 - m_2)} + m_1(m_1 - m_2)\delta^{-(m_1 + m_2)}\right];
$$

$$
\tilde{C}_4^{*(Nn)}(n) = \left[2m_1 m_2 + m_1(m_1 - m_2)\delta^{(m_1 + m_2)} - m_1(m_1 + m_2)\delta^{(m_1 - m_2)}\right];
$$

$$
\Delta(n) = \left((Nn)^2 - 1\right)\Big\{8m_1 m_2 + (m_1 - m_2)^2\left[\delta^{(m_1 + m_2)} + \delta^{-(m_1 + m_2)}\right] - \\ - (m_1 + m_2)^2\left[\delta^{(m_1 - m_2)} + \delta^{-(m_1 - m_2)}\right]\Big\}.
$$

Запишем окончательные выражения для компонент напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и компонент u и v вектора перемещения $\overrightarrow{U}$ в переменных x, θ для вращающегося анизотропного кольцевого диска:

$$
\sigma_r(x, \theta) = p_0 \frac{\delta^{k+1}}{\left(1 - \delta^{2k}\right)}\left[x^{(k-1)} - x^{-(k+1)}\right] + \frac{NP}{2\pi R} \frac{1}{\left(1 - \delta^{2k}\right)}\left[x^{(k-1)} - \delta^{2k} x^{-(k+1)}\right] + \\ + \frac{\left(3 + \nu_{\theta r}\right)}{\left(9 - k^2\right)} \frac{\rho\omega^2 R^2}{\left(1 - \delta^{2k}\right)}\left[\left(1 - \delta^{3+k}\right)x^{(k-1)} - \left(\delta^{2k} - \delta^{3+k}\right)x^{-(k+1)} - \left(1 - \delta^{2k}\right)x^2\right] - \\ - \frac{NP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(n)} \Big\{\left[m_1 - \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\tilde{C}_1^{*(Nn)} x^{(m_1 - 1)} - \left[m_1 + \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\tilde{C}_2^{*(Nn)} x^{-(m_1 + 1)} + \\ + \left[m_2 - \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\tilde{C}_3^{*(Nn)} x^{(m_2 - 1)} - \left[m_2 + \left((Nn)^2 - 1\right)\right]\tilde{C}_4^{*(Nn)} x^{-(m_2 + 1)}\Big\} \cos Nn\theta, \tag{24}
$$

$$\sigma_\theta(x,\theta)=p_0\frac{k\delta^{k+1}}{\left(1-\delta^{2k}\right)}\left[x^{(k-1)}+x^{-(k+1)}\right]+\frac{NP}{2\pi R}\frac{k}{\left(1-\delta^{2k}\right)}\left[x^{(k-1)}+\delta^{2k}x^{-(k+1)}\right]+$$

$$+\frac{\left(3+\nu_{\theta r}\right)}{\left(9-k^2\right)}\frac{\rho\omega^2R^2}{\left(1-\delta^{2k}\right)}\left[k\left(1-\delta^{3+k}\right)x^{(k-1)}+k\left(\delta^{2k}-\delta^{3+k}\right)x^{-(k+1)}-\left(\frac{k^2+3\nu_{\theta r}}{3+\nu_{\theta r}}\right)\left(1-\delta^{2k}\right)x^2\right]-$$

$$-\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta(n)}\Big[m_1\left(m_1+1\right)\tilde{C}_1^{*(Nn)}x^{(m_1-1)}+m_1\left(m_1-1\right)\tilde{C}_2^{*(Nn)}x^{-(m_1+1)}+$$

$$+m_2\left(m_2+1\right)\tilde{C}_3^{*(Nn)}x^{(m_2-1)}+m_2\left(m_2-1\right)\tilde{C}_4^{*(Nn)}x^{-(m_2+1)}\Big]\cos Nn\theta,$$

$$\tau_{r\theta}(x,\theta)=-\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Nn}{\Delta(n)}\times$$

$$\times\left[m_1\tilde{C}_1^{*(Nn)}x^{(m_1-1)}-m_1\tilde{C}_2^{*(Nn)}x^{-(m_1+1)}+m_2\tilde{C}_3^{*(Nn)}x^{(m_2-1)}-m_2\tilde{C}_4^{*(Nn)}x^{-(m_2+1)}\right]\sin Nn\theta;$$

$$u(x,\theta)=\frac{R}{E_\theta}\Bigg\{p_0\frac{\delta^{k+1}}{\left(1-\delta^{2k}\right)}\left[\left(k-\nu_{\theta r}\right)x^k+\left(k+\nu_{\theta r}\right)x^{-k}\right]+\frac{NP}{2\pi R}\frac{1}{\left(1-\delta^{2k}\right)}\Big[\left(k-\nu_{\theta r}\right)x^k+$$

$$+\left(k+\nu_{\theta r}\right)\delta^{2k}x^{-k}\Big]+\frac{\left(3+\nu_{\theta r}\right)}{\left(9-k^2\right)}\frac{\rho\omega^2R^2}{\left(1-\delta^{2k}\right)}\Bigg[\left(k-\nu_{\theta r}\right)\left(1-\delta^{3+k}\right)x^k+\left(k+\nu_{\theta r}\right)\times$$

$$\times\left(\delta^{2k}-\delta^{3+k}\right)x^{-k}-\left(\frac{k^2-\nu_{\theta r}^2}{3+\nu_{\theta r}}\right)\left(1-\delta^{2k}\right)x^3\Bigg]+$$

$$+\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta(n)}\Bigg\{\frac{1}{m_1}\left[\nu_{\theta r}m_1^2-\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_1+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_1^{*(Nn)}x^{m_1}-$$

$$-\frac{1}{m_1}\left[\nu_{\theta r}m_1^2+\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_1+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_2^{*(Nn)}x^{-m_1}+$$

$$+\frac{1}{m_2}\left[\nu_{\theta r}m_2^2-\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_2+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_3^{*(Nn)}x^{m_2}-$$

$$-\frac{1}{m_2}\left[\nu_{\theta r}m_2^2+\left(k^2-\nu_{\theta r}\right)m_2+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_4^{*(Nn)}x^{-m_2}\Bigg\}\cos Nn\theta\Bigg\},$$

$$v(x,\theta)=-\frac{NP}{\pi RE_\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{(Nn)\Delta(n)}\Bigg\{\frac{1}{m_1}\left[m_1^2\left(m_1+1\right)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_1+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_1^{*(Nn)}x^{m_1}+$$

$$+\frac{1}{m_1}\left[m_1^2\left(m_1-1\right)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_1-\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_2^{*(Nn)}x^{-m_1}+$$

$$+\frac{1}{m_2}\left[m_2^2\left(m_2+1\right)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_2+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_3^{*(Nn)}x^{m_2}+$$

$$+\frac{1}{m_2}\left[m_2^2\left(m_2-1\right)-\left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_2-\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]\tilde{C}_4^{*(Nn)}x^{-m_2}\Bigg\}\sin Nn\theta.$$

Зная компоненты $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$ вектора перемещения $\overrightarrow{U}$, легко по дифференциальным соотношениям Коши (3) вычислить компоненты деформаций $\varepsilon_r(r,\theta)$, $\varepsilon_\theta(r,\theta)$, $\gamma_{r\theta}(r,\theta)$.

Рассмотрим теперь вращающийся анизотропный сплошной диск постоянной толщины h_0, который нагружен на внешнем контуре системой N одинаковых сосредоточенных сил, распределенных равномерно по ободу и симметричных относительно диаметра. Так как в центре сплошного диска отсутствуют перемещения, то в формулах (18), (19) постоянные $C_4^{(0)}$, $C_2^{(Nn)}$, $C_4^{(Nn)}$ положим равными нулю. Остальные постоянные определим из граничных условий на внешнем контуре диска. В результате получим

$$\tilde{C}_3^{(0)} = \frac{NP}{2\pi R} + \frac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2 R^2, \quad \tilde{C}_1^{(Nn)} = \frac{NP}{\pi R}\frac{1}{\left((Nn)^2-1\right)}\frac{m_2}{(m_1-m_2)},$$

$$\tilde{C}_3^{(Nn)} = -\frac{NP}{\pi R}\frac{1}{\left((Nn)^2-1\right)}\frac{m_1}{(m_1-m_2)}.$$

Запишем выражения для компонент напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и компонент u и v вектора перемещения $\overrightarrow{U}$ в переменных x, θ для вращающегося анизотропного сплошного диска:

$$\sigma_r(x,\theta) = \frac{NP}{2\pi R}x^{k-1} + \frac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2\left(x^{k-1}-x^2\right) +$$
$$+\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left((Nn)^2-1\right)}\frac{1}{(m_1-m_2)}\left\{m_2\left[m_1-\left((Nn)^2-1\right)\right]x^{m_1-1} - m_1\left[m_2-\left((Nn)^2-1\right)\right]x^{m_2-1}\right\}\cos Nn\theta,$$

$$\sigma_\theta(x,\theta) = k\frac{NP}{2\pi R}x^{k-1} + \frac{(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2\left[kx^{k-1} - \left(\frac{k^2+3\nu_{\theta r}}{3+\nu_{\theta r}}\right)x^2\right] +$$
$$+\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left((Nn)^2-1\right)}\frac{m_1m_2}{(m_1-m_2)}\left[(m_1+1)x^{m_1-1} - (m_2+1)x^{m_2-1}\right]\cos Nn\theta, \tag{25}$$

$$\tau_{r\theta}(x,\theta) = \frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Nn}{\left((Nn)^2-1\right)}\frac{m_1m_2}{(m_1-m_2)}\left(x^{m_1-1}-x^{m_2-1}\right)\sin Nn\theta;$$

$$u(x,\theta) = \frac{R}{E_\theta}\left\{(k-\nu_{\theta r})\frac{NP}{2\pi R}x^k + \frac{(k-\nu_{\theta r})(3+\nu_{\theta r})}{(9-k^2)}\rho\omega^2R^2\left[x^k - \left(\frac{k+\nu_{\theta r}}{3+\nu_{\theta r}}\right)x^3\right] -\right.$$
$$-\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left((Nn)^2-1\right)}\frac{1}{(m_1-m_2)}\left\{\frac{m_2}{m_1}\left[\nu_{\theta r}m_1^2 - (k^2-\nu_{\theta r})m_1 + \left((Nn)^2-1\right)k^2\right]x^{m_1} -\right.$$
$$\left.\left.-\frac{m_1}{m_2}\left[\nu_{\theta r}m_2^2 - (k^2-\nu_{\theta r})m_2 + \left((Nn)^2-1\right)k^2\right]x^{m_2}\right\}\cos Nn\theta\right\},$$

$$v(x,\theta) = \frac{R}{E_\theta}\left\{\frac{NP}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Nn\left((Nn)^2-1\right)}\frac{1}{(m_1-m_2)}\left\{\frac{m_2}{m_1}\left[m_1^2(m_1+1) - \left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_1 +\right.\right.\right.$$
$$+\left.\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]x^{m_1} - \frac{m_1}{m_2}\left[m_2^2(m_2+1) - \left(k^2-(Nn)^2\nu_{\theta r}\right)m_2 +\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left((Nn)^2-1\right)k^2\right]x^{m_2}\right\}\sin Nn\theta\right\}.$$

Заключение

Полученные формулы (24), (25) для напряжений и перемещений полностью описывают напряженно-деформированное состояние вращающихся полярно-ортотропных кольцевых и сплошных дисков постоянной толщины с системой сосредоточенных сил на внешнем контуре. Результаты данной работы могут быть использованы при проектировании стаканчиковых центрифуг или стендов для эрозионных испытаний конструкционных материалов с предложенной формой ротора.

Библиографические ссылки

1. Соболев ЮФ, Выгонный ВГ, Мякота ВК, Кушко ВМ, Королевич ВВ. Установки для фракционирования крови и классификации микропорошков. *Технический прогресс в атомной промышленности. Серия: Твэлостроение.* 1988;4(24):103–105.
2. Соболев ЮФ, Сафрошкин АИ, Карнейчик СД, Ивановский АМ, Воропаев МЕ, Королевич ВВ и др. Стенды для эрозионных испытаний конструкционных материалов. *Технический прогресс в атомной промышленности. Серия: Твэлостроение.* 1988;4(24):106–109.
3. Тимошенко СП, Гудьер Дж. *Теория упругости.* Москва: Наука; 1978.
4. Лехницкий СГ. *Анизотропные пластинки.* Москва: Физматгиз; 1959.

References

1. Sobolev YuF, Vygonny VG, Myakota VK, Kushko VM, Korolevich VV. [Installations for blood fractionation and classification of micropowders]. *Tekhnicheskii progress v atomnoi promyshlennosti. Seriya: Tvelostroenie* [Technical progress in the nuclear industry. Series: Tvelostroenie]. 1988;4(24):103–105. Russian.
2. Sobolev YuF, Safroshkin AI, Karneychik SD, Ivanovskiy AM, Voropaev ME, Korolevich VV, et al. [Stands for erosion testing of construction materials]. *Tekhnicheskii progress v atomnoi promyshlennosti. Seriya: Tvelostroenie* [Technical progress in the nuclear industry. Series: Tvelostroenie]. 1988;4(24):106–109. Russian.
3. Timoshenko SP, Goodyer J. *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Moscow: Nauka; 1978. Russian.
4. Lehnitsky SG. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow: Fizmatgiz; 1959. Russian.

Статья поступила в редколлегию 07.05.2018.
Received by editorial board 07.05.2018.