УДК 519.63

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. БУЯЛЬСКАЯ[1]***, В. М. ВОЛКОВ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрен спектральный метод Чебышева для двухточечных краевых задач, описывающих процессы встречного взаимодействия оптических волн в средах с кубической нелинейностью и линейных средах с периодической модуляцией показателя преломления. На примере линейной задачи показано, что для достижения заданной точности спектральный метод требует на два-три порядка меньше времени по сравнению с методом сплайн-коллокации 5-го порядка точности. При этом сетка чебышевских узлов обладает естественными адаптивными свойствами для типичных задач встречного нелинейного взаимодействия оптических волн. Предложен консервативный итерационный алгоритм реализации нелинейной спектральной модели. Предлагаемый метод имеет меньшую чувствительность к выбору начального приближения и обеспечивает более высокую скорость сходимости по сравнению с методом Ньютона в условиях сильной связи взаимодействующих волн.

Ключевые слова: спектральный метод Чебышева; двухточечная краевая задача; нелинейное взаимодействие встречных оптических волн; метод Ньютона; консервативный итерационный метод.

CHEBYSHEV SPECTRAL METHOD FOR NUMERICAL SIMULATIONS OF COUNTER-PROPAGATING OPTICAL WAVES INTERACTION IN NONLINEAR MEDIA

Y. V. BUYALSKAYA[a]***, V. M. VOLKOV***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: Y. V. Buyalskaya (buyalskaya.yv@gmail.com)

Chebyshev spectral methods for two-point boundary value problems describing the processes of counter interaction of optical waves in media with cubic nonlinearity and linear media with periodic modulation of the refractive index are considered. On the example of a linear problem, it is shown that the spectral method for achieving a given accuracy requires of two-three orders less time in comparison with the spline collocation method of the 5th accuracy order. Moreover, Chebyshev mesh has natural adaptive properties for the considered problems of the nonlinear interaction of optical waves.

Образец цитирования:
Буяльская ЮВ, Волков ВМ. Спектральный метод Чебышева для численного моделирования встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:75–81.

For citation:
Buyalskaya YV, Volkov VM. Chebyshev spectral method for numerical simulations of counter-propagating optical waves interaction in nonlinear media. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:75–81. Russian.

Авторы:
Юлия Викторовна Буяльская – старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.
Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:
Yuliuya V. Buyalskaya, senior lecturer at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
buyalskaya.yv@gmail.com
Vasiliy M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
v.volkov@tut.by

A conservative iterative algorithm for implementation of the nonlinear spectral model is proposed. The proposed method has a lower sensitivity to the choice of an appropriate initial guess and provides a higher rate of convergence in comparison with Newton's method under conditions of strong coupling of interacting waves.

Key words: Chebyshev spectral methods; two-point boundary value problem; nonlinear interaction of counter-propagating optical waves; Newton's method; conservative iterative method.

Введение

Разработка методов численного моделирования процессов встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах имеет важное практическое значение, поскольку схема такого взаимодействия является типичной для большинства видов лазеров и оптических усилителей. В зависимости от выбора соответствующего приближения задачи данного класса могут приводить как к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 2], так и к системам дифференциальных уравнений в частных производных [3]. И в первом, и во втором случаях для исчерпывающего анализа задачи требуется привлечение численных методик.

Для решения данного класса краевых задач существуют различные подходы, основанные на методах конечных разностей [3], коллокации [4], стрельбы [5] и др. В последние годы большие успехи достигнуты в использовании спектральных методов применительно к задачам численного моделирования оптоволоконных усилителей [6; 7].

Одна из проблем спектральных методов решения нелинейных краевых задач связана с реализацией такого рода дискретных моделей, представляющих собой системы нелинейных алгебраических уравнений. Для этих целей применяют, как правило, итерационный метод Ньютона, который при надлежащем выборе начального приближения обеспечивает высокую скорость сходимости итераций. В данной работе предлагается альтернативная итерационная методика реализации спектральных моделей, обеспечивающая высокую эффективность вне зависимости от выбора начального приближения. На примере модельной задачи показано, что при использовании этой методики достигается уменьшение числа итераций в 2–3 раза по сравнению с методом Ньютона. Показано также, что спектральный метод на основе полиномов Чебышева по эффективности на порядок превосходит стандартные средства численного анализа двухточечных краевых задач, предлагаемые современными математическими пакетами, например *Matlab*.

Постановка задачи

Математическая модель встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах в простейшем случае представляет собой краевую задачу для двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию комплексных, огибающих амплитуды поля волн $E_\pm = E_\pm(z)$, распространяющихся в прямом и обратном направлениях координатной оси z. Данная система уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{dE_\pm}{dz} = G_\pm\left(E_\pm,\, E_\mp\right),\ -1 < z < 1, \tag{1}$$

$$E_+(-1) = E_p,\ E_-(1) = E_m. \tag{2}$$

Функция $G_\pm\left(E_\pm,\, E_\mp\right)$ определяется механизмами взаимодействия волн. Для описания эффекта вынужденного комбинационного рассеяния функция нелинейного взаимодействия имеет вид

$$G_\pm\left(E_\pm,\, E_\mp\right) = -\gamma\left|E_\mp\right|^2 E_\pm, \tag{3}$$

где постоянная γ характеризует интенсивность энергетического обмена взаимодействующих волн.

Для задачи (1)–(3) имеет место закон сохранения

$$\frac{d}{dz}\left|E_+\right|^2 - \left|E_-\right|^2 = 0. \tag{4}$$

Аналогичным инвариантом обладает и задача о распространении волн в средах с периодической модуляцией коэффициента преломления [7, с. 144], для которой функции $G_\pm\left(E_\pm,\, E_\mp\right)$ имеют вид

$$G_\pm\left(E_\pm,\, E_\mp\right) = \mp i\kappa\exp\left(\pm i2\Delta z\right)E_\mp. \tag{5}$$

Здесь действительные постоянные κ и Δ характеризуют амплитуду и отстройку периода модуляции коэффициента преломления среды от длины волны.

Спектральный метод Чебышева

В основе спектральных методов лежит представление искомого решения дифференциальной задачи в виде линейной комбинации некоторых базисных функций, в качестве которых традиционно выступают системы ортогональных алгебраических или тригонометрических полиномов. Для этих целей наиболее удобно интерполяционное представление вида

$$f(z) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \varphi_n(z), \tag{6}$$

где значения коэффициентов f_n совпадают с интерполируемой функцией в узлах сетки z_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $f(z_n) = f_n$, а базисные функции удовлетворяют условию $\varphi_n(z_m) = \delta_{nm}$. В этом случае удается достаточно компактно выразить производные интерполируемой функции в узлах сетки:

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z_m) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \frac{d^k}{dz^k} \varphi_n(z_m), \; m = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{7}$$

Выражение (7) для приближенного вычисления производных сеточной функции $f(z_m)$ представляет собой не что иное, как произведение некоторой матрицы $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – матрицы спектрального дифференцирования – на заданный вектор $f \in \mathbb{R}^N$:

$$f^{(k)} \cong D^{(k)} f, \; f = \left(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\right)^{\mathrm{T}}, \; d_{mn}^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} \varphi_n(z_m). \tag{8}$$

Подробную информацию о вычислении матриц спектрального дифференцирования для различных классов базисных функций можно найти в работах [8; 9]. Мы использовали спектральную матрицу дифференцирования Чебышева для системы узлов

$$z_j = \cos\frac{j\pi}{N-1}, \; j = \overline{0, N-1}, \tag{9}$$

которые являются экстремумами полиномов Чебышева первого рода степени $N-1$: $T_{N-1}(z) \equiv \equiv \cos((N-1)\arccos(z))$. Важно отметить, что сетка (9), сгущающаяся возле границ области $z = \pm 1$, хорошо согласуется с особенностями решений типа пограничного слоя, которые характерны для задач рассматриваемого класса. Матрица дифференцирования спектрального метода Чебышева произвольной размерности для отрезка $z \in [-1, 1]$ может быть сгенерирована стандартными функциями *Matlab*.

Использование формализма матриц спектрального дифференцирования (6)–(8) позволяет весьма просто перейти от дифференциальной модели к ее спектральному аналогу путем замены неизвестных функций и их производных на соответствующие векторы и матрицы с учетом краевых условий задачи. В нашем случае спектральная модель приводит к системе алгебраических уравнений, которая может быть представлена в виде

$$A\mathbf{u} + g(\mathbf{u}) = f, \tag{10}$$

где $A = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{pmatrix}$ – блочно-диагональная матрица размерности $2N \times 2N$, блоки которой строятся из спектральной матрицы дифференцирования с учетом краевых условий задачи; $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_+ \\ \mathbf{u}_- \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_\pm = \big(u_\pm(z_0), u_\pm(z_1), \ldots, u_\pm(z_{N-1})\big)^{\mathrm{T}}$, $u_\pm(z_n)$ – приближенные значения искомого решения в узлах сетки (9); $g(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} G_+(\mathbf{u}) \\ G_-(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ – вектор-функция размерности $2N$, описывающая нелинейную часть задачи. В случае линейной задачи, например (1), (2), (5), функции $G_\pm(E_\pm, E_\mp)$ могут быть учтены в виде соответствующих блоков матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} D_+ & G_+ \\ G_- & D_- \end{pmatrix},$$

здесь $G_+ = \mathrm{diag}\left(0, g_1^+, \ldots, g_{N-1}^+\right)$; $G_- = \mathrm{diag}\left(g_0^-, \ldots, g_{N-2}^-, 0\right)$, $g_n^\pm = \pm i\kappa \exp(\pm i 2\Delta z_n)$. Заметим, что первая и последняя строки матрицы A отвечают краевым условиям задачи, в связи с чем все компоненты данных строк, за исключением $a_{11} = a_{2N,2N} = 1$, полагаются равными нулю. Первая и последняя компоненты вектор-функции $g(\mathbf{u})$ также полагаются равными нулю. В соответствии с краевыми условиями вектор правой части системы (10) $f \in \mathbb{R}^{2N}$ имеет вид

$$f = \left(E_p,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ E_m\right)^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

где E_p и E_m определяются краевыми условиями (2).

Отметим, что, в отличие от разностных методов [3], спектральная модель не обладает свойством консервативности. В частности, для нее не удается получить дискретного аналога закона сохранения (4), поскольку необходимое для этого свойство производных $(ug)' = u'g + ug'$ не выполняется в строгом смысле для формул спектрального дифференцирования. Тем не менее для достаточно гладких функций спектральные методы обеспечивают весьма высокую точность вычисления производных, сравнимую с вычислительной точностью. В силу этого при достаточном разрешении сетки все качественные характеристики таких решений, включая и законы сохранения вида (4), могут быть обеспечены в рамках спектральной модели с точностью в пределах вычислительной погрешности [10].

В качестве иллюстрации преимущества спектрального метода (10) на рис. 1 представлены результаты численных экспериментов по оценке эффективности данного подхода в сравнении со стандартными функциями *Matlab* для решения двухточечных краевых задач [11]. Как тестовый пример рассмотрена линейная задача (1), (2), (5) при значениях параметров: $\kappa = 1$, $\Delta = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 0$. Погрешность приближенных решений оценивалась относительно точного значения амплитуды отраженной волны $E_-(-1)$, согласно аналитическому решению [7, c. 146]:

$$\left|E_-(-1)\right| = \frac{\left|\mathrm{sh}(2\alpha)\right|}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\left(2\alpha - \chi^2\right)}},\ \alpha = \kappa^2 - \Delta^2,\ \chi = \frac{\Delta}{\kappa}. \tag{12}$$

На рис. 1 представлены зависимости относительной погрешности приближенного решения $\delta = \frac{\left\|E_-(-1)\right| - \left|u_-(-1)\right\|}{\left|E_-(-1)\right|}$, вычисленной в соответствии с (12), от времени решения задачи при использовании спектрального метода Чебышева (10) и метода сплайн-коллокации 5-го порядка точности [11]. Более высокая точность результатов достигалась за счет увеличения размерности сетки от $N = 21$ до $N = 47$ в спектральном методе и от $N = 17$ до $N = 700$ – в методе сплайн-коллокации. С ростом размерности сетки соответственно возрастали вычислительные затраты на решение задачи.

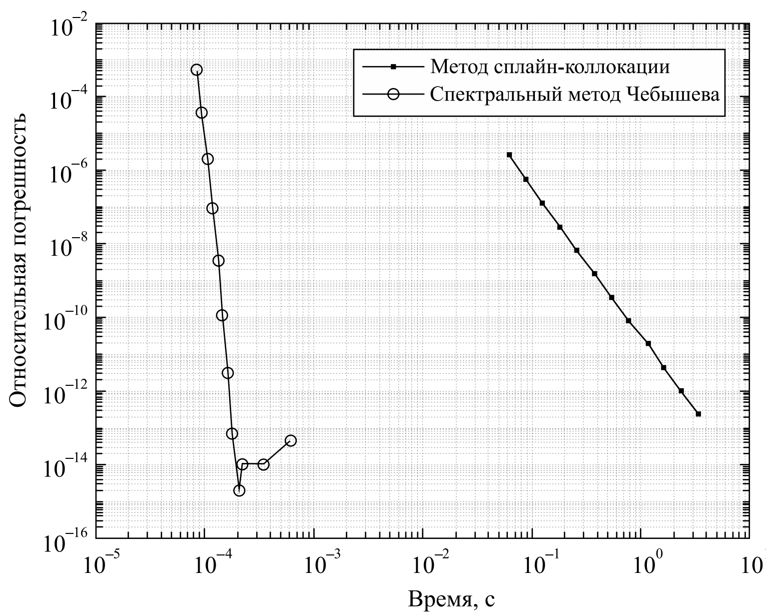

Рис. 1. Зависимости относительной погрешности приближенных решений от времени вычислений для спектрального метода Чебышева (10) и метода сплайн-коллокации 5-го порядка точности [11], реализованных в функции *Matlab tpbvp5c*

Fig. 1. Dependences of the relative error of the approximate solutionы on the calculation time for the Chebyshev spectral method (10) and the spline-collocation methods of the fifth orders of accuracy [11] implemented in *Matlab* (function *tpbvp5c*)

Из рис. 1 следует, что спектральный метод Чебышева позволяет сократить время решения задачи на один-два порядка для получения заданной относительной погрешности в диапазоне от $\delta = 10^{-4}$ до $\delta = 10^{-12}$, причем с ростом требований к точности приближенного решения преимущества спектрального метода возрастают.

Среди преимуществ спектрального метода Чебышева для рассмотренного класса задач следует отметить естественную адаптацию расчетной сетки к характеру типичных решений. Пример решения задачи (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$, представлен на рис. 2. При возрастании значения параметра $\gamma \gg 1$ решение приобретает структуру пограничного слоя, для описания которого требуется лучшее разрешение сетки вблизи границ области, что естественным образом обеспечивается расчетной сеткой (9).

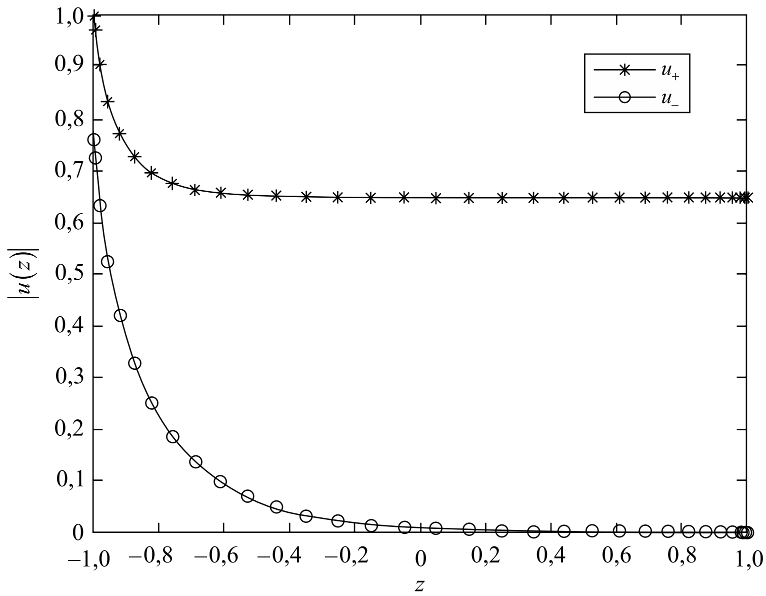

Рис. 2. Решения задачи (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$
Fig. 2. The solution of problem (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$

В случае линейной задачи спектральный метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей блочного вида. При решении нелинейных задач соответствующая спектральная модель (10) также нелинейная, поэтому для ее реализации требуется использование итерационных методов.

Итерационные методы реализации спектральной модели

Рассмотрим итерационный метод Ньютона, который для задачи (1)–(3), (10) имеет следующий вид:

$$J^s \mathbf{u}^{s+1} = J^s \mathbf{u}^s - \tau F\left(\mathbf{u}^s\right), \tag{13}$$

$$J^s = J\left(\mathbf{u}^s\right) = A + \gamma \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

$$G_{11} = \operatorname{diag}\left(0, \left|u_-^s(z_1)\right|^2, \ldots, \left|u_-^s\left(z_{N-1}\right)\right|^2\right),$$

$$G_{22} = \operatorname{diag}\left(\left|u_+^s(z_0)\right|^2, \ldots, \left|u_+^s\left(z_{N-2}\right)\right|^2, 0\right),$$

$$G_{12} = \operatorname{diag}\left(0, u_+^{*s}(z_1)u_-^s(z_1), \ldots, u_+^{*s}\left(z_{N-1}\right)u_-^s\left(z_{N-1}\right)\right), \tag{14}$$

$$G_{21} = \operatorname{diag}\left(u_-^{*s}(z_0)u_+^s(z_0), \ldots, u_-^{*s}\left(z_{N-2}\right)u_+^s\left(z_{N-2}\right), 0\right),$$

$$F\left(\mathbf{u}^s\right) = A\mathbf{u}^s + g\left(\mathbf{u}^s\right) - f, \; s = 0, 1, \ldots .$$

Здесь $u_\pm^*$ означает комплексно-сопряженное значение $u_\pm$, $0 < \tau \le 1$ – итерационный параметр, обеспечивающий глобальную сходимость метода Ньютона в пространстве начальных приближений вне зависимости от попадания в достаточно малую окрестность искомого решения. Максимальная скорость сходимости достигается при $\tau = 1$. Если сходимость итерационного метода (13), (14) отсутствует при $\tau = 1$, тогда следует повторить процедуру с меньшим значением τ, например $\tau = \frac{1}{2}$. Использование модифицированного метода Ньютона с параметром позволяет достичь сходимости при произвольном начальном приближении, например нулевом: $\mathbf{u}_{\pm}^{0} = 0$.

Наряду с итерационным методом Ньютона (13), (14) рассмотрим также итерационный процесс, аналогичный консервативному методу, успешно примененному ранее для реализации разностных моделей аналогичных нелинейных задач встречного взаимодействия оптических волн [12]:

$$C^{s}\mathbf{u}^{s+1} = f, \tag{15}$$

$$C^{s} = C\left(\mathbf{u}^{s}\right) = \begin{pmatrix} D_{+} & \gamma G_{12} \\ \gamma G_{21} & D_{-} \end{pmatrix}, \ s = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в формулах (13), (14). Структура матрицы C в итерационном методе (15) совпадает со структурой матрицы Якоби в методе Ньютона, что позволяет говорить о сопоставимой вычислительной сложности одной итерации в рассмотренных двух итерационных процедурах.

Отличительная особенность итерационного метода (15), (16) заключается в том, что в пределах спектральной точности он является консервативным, т. е. приближенное решение на каждой итерации удовлетворяет закону сохранения (4) с точностью не хуже, чем погрешность спектральной производной. Иными словами, консервативность итерационного метода выполняется настолько, насколько спектральная производная обеспечивает точность дифференцирования квадрата сеточных функций на текущей итерации.

Результаты численных экспериментов показывают, что скорость сходимости итерационных методов (13), (14) и (15), (16) существенно зависит от интенсивности взаимодействия волн, однако для консервативного итерационного метода замедление скорости сходимости с ростом параметра γ существенно ниже по сравнению с методом Ньютона (13), (14). В частности, на рис. 3 представлены результаты сравнительного анализа эффективности рассмотренных численных методов, а именно зависимости числа итераций для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-8}$. В качестве критерия точности использовалась относительная норма невязки приближенного решения. Рассмотрен пример решения задачи (1)–(3) в диапазоне

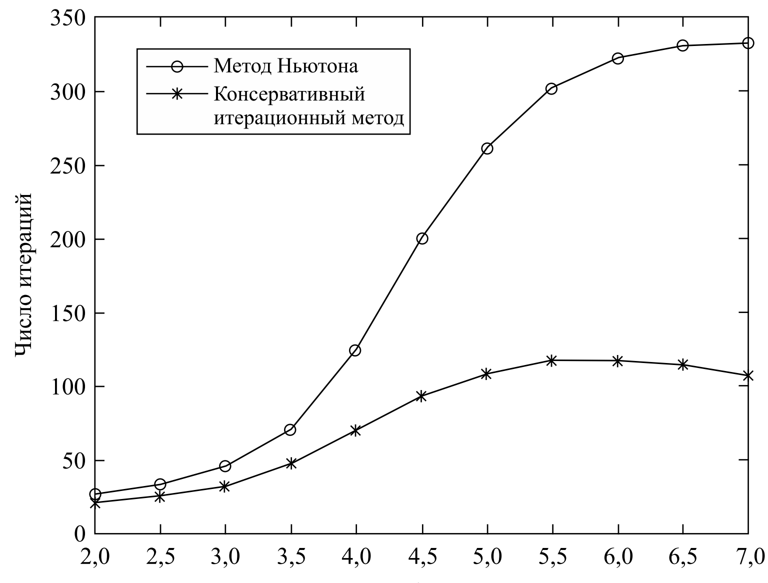

Рис. 3. Количество итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-8}$ при реализации нелинейной спектральной схемы (10), (11) посредством консервативного итерационного метода (15), (16) и методом Ньютона (13), (14) при различных значениях параметра γ, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$

Fig. 3. The number of iterations at the accuracy goal $\varepsilon = 10^{-8}$ when the nonlinear spectral scheme (10), (11) is realized by means of the conservative iterative method (15), (16) and Newton's method (13), (14) at different values of the parameter γ and $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$

значений параметра γ от 2 до 7 при $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$. Как видно из рис. 3, консервативный итерационный метод требует меньше итераций по сравнению с методом Ньютона и при $\gamma > 5$ в два-три раза превосходит его в эффективности. Как отмечалось выше, вычислительные затраты на отдельную итерацию в рассмотренных методах приблизительно одинаковы.

Заключение

Представленные материалы показывают, что спектральный метод Чебышева для краевых задач, описывающих встречное взаимодействие оптических волн в нелинейных средах, обладает бесспорным преимуществом в обеспечении высокой точности результатов по сравнению со стандартными методиками, предоставляемыми математическим пакетом *Matlab*. В частности, для модельной линейной задачи спектральный метод Чебышева позволяет на 2–3 порядка сократить время решения по сравнению с методом сплайн-коллокации 5-го порядка точности.

Предложенный консервативный итерационный метод (15) для реализации нелинейной задачи (1)–(3) тестировался как на рассмотренном двухволновом варианте, так и на более сложных примерах многоволновых задач, характерных для моделирования оптоволоконных усилителей на основе эффекта вынужденного комбинационного рассеяния [1; 2]. При этом в подавляющем большинстве случаев данный итерационный метод демонстрировал убедительное преимущество в скорости сходимости и меньшую чувствительность к выбору начального приближения по сравнению с методом Ньютона.

Библиографические ссылки

1. Headley C, Agrawal GP. *Raman amplification in fiber optical communication systems.* San Diego: Academic Press; 2005.
2. Perlin VE, Winful HG. Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers. *Journal of lightwave technology.* 2002; 20(2):250–254. DOI: 10.1109/50.983239.
3. Карамзин ЮН, Сухоруков АП, Трофимов ЮН. *Математическое моделирование в нелинейной оптике.* Москва: МГУ; 1989.
4. Serdar Gokhan F, Yilmaz G. Solution of Raman fiber amplifier equations using MATLAB BVP solvers. *COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering.* 2011;30(2):398–411. DOI: 10.1108/03321641111100998.
5. Liu X, Zhang M. An effective method for two-point boundary value problems in Raman amplifier propagation equations. *Optics communications.* 2004;235(1):75–82. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.03.003.
6. Tarman HI, Berberoğlu H. A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations. *Optics Communications.* 2009;282(8):1551–1556.
7. Виноградова МБ, Сухоруков АП, Руденко ОВ. *Теория волн.* Москва: Наука; 1979.
8. Trefethen LN. *Spectral Methods in MATLAB.* Philadelphia: SIAM; 2000.
9. Weideman JA, Reddy SC. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS).* 2000;26(4):465–519.
10. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods.* New York: DOVER Publications; 2000.
11. Shampine LF, Gladwell I, Thompson S. *Solving ODEs with Matlab.* New York: Cambridge University Press; 2003.
12. Волков ВМ. Итерационные методы решения стационарных задач встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах. *Дифференциальные уравнения.* 1998;34(7):935–941.

References

1. Headley C, Agrawal GP. *Raman amplification in fiber optical communication systems.* San Diego: Academic Press; 2005.
2. Perlin VE, Winful HG. Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers. *Journal of lightwave technology.* 2002; 20(2):250–254. DOI: 10.1109/50.983239.
3. Karamzin JuN, Suhorukov AP, Trofimov JuN. *Matematicheskoe modelirovanie v nelineinoi optike* [Mathematic modeling in the non-linear optics]. Moscow: MGU; 1989. Russian.
4. Serdar Gokhan F, Yilmaz G. Solution of Raman fiber amplifier equations using MATLAB BVP solvers. *COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering.* 2011;30(2):398–411. DOI: 10.1108/03321641111100998.
5. Liu X, Zhang M. An effective method for two-point boundary value problems in Raman amplifier propagation equations. *Optics communications.* 2004;235(1):75–82. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.03.003.
6. Tarman HI, Berberoğlu H. A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations. *Optics Communications.* 2009;282(8):1551–1556.
7. Vinogradova MB, Suhorukov AP, Rudenko OV. *Teoriya voln* [The waves theory]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.
8. Trefethen LN. *Spectral Methods in MATLAB.* Philadelphia: SIAM; 2000.
9. Weideman JA, Reddy SC. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS).* 2000;26(4):465–519.
10. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods.* New York: DOVER Publications; 2000.
11. Shampine LF, Gladwell I, Thompson S. *Solving ODEs with Matlab.* New York: Cambridge University Press; 2003.
12. Volkov VM. The iterative methods for solving stationary problems of counter propagating optical waves in nonlinear spaces. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1998;34(7):935–941. Russian.

Статья поступила в редколлегию 25.06.2018.
Received by editorial board 25.06.2018.