Дифференциальные уравнения и оптимальное управление

Differential equations and optimal control

УДК 517.948.32:517.544

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

А. П. ШИЛИН[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Предложена схема исследования линейного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения произвольного порядка на замкнутой кривой, расположенной в комплексной плоскости, в случае, когда его коэффициенты имеют некоторую частную структуру. Схема предусматривает использование обобщенных формул Сохоцкого, решение краевой задачи Римана и решение в классе аналитических функций линейных дифференциальных уравнений. По этой схеме решены явно два уравнения, коэффициенты которых содержат степенные множители, вследствие чего наряду с задачей Римана конструктивно решены возникающие дифференциальные уравнения. Приведены условия разрешимости, формулы решения, рассмотрены примеры.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения; гиперсингулярные интегралы; обобщенные формулы Сохоцкого; краевая задача Римана; линейные дифференциальные уравнения.

Образец цитирования:
Шилин АП. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:48–56.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

For citation:
Shilin AP. Hypersingular integro-differential equations with power factors in coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;3:48–56. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

Автор:
Андрей Петрович Шилин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:
Andrei P. Shilin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
a.p.shilin@gmail.com

HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POWER FACTORS IN COEFFICIENTS

A. P. SHILIN [a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The linear hypersingular integro-differential equation of arbitrary order on a closed curve located on the complex plane is considered. A scheme is proposed to study this equation in the case when its coefficients have some particular structure. This scheme providers for the use of generalized Sokhotsky formulas, the solution of the Riemann boundary value problem and the solution in the class of analytical functions of linear differential equations. According to this scheme, the equations are explicitly solved, the coefficients of which contain power factors, so that along with the Riemann problem the arising differential equations are constructively solved. Solvability conditions, solution formulas, examples are given.

Keywords: integro-differential equations; hypersingular integrals; generalized Sokhotsky formulas; Riemann boundary problem; linear differential equations.

Введение

Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая на расширенной комплексной плоскости, D_+ и D_- – области с границей L, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Выберем на кривой L ту ориентацию, которая оставляет область D_+ слева. В работе [1] решено интегро-дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!b_k}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\right)=f(t),\ t\in L. \tag{1}$$

В этом уравнении искомая функция $\varphi(t)$ вместе со своими производными до порядка n включительно и заданная функция $f(t)$ предполагаются H-непрерывными (т. е. удовлетворяющими условию Гельдера) на кривой L. Коэффициенты a_k и b_k – заданные (комплексные) числа, $k=\overline{0,n}$, $n\in\mathbb{N}$. Интегралы в уравнении (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару [2], такие интегралы называются также гиперсингулярными.

Гиперсингулярные интегральные уравнения возникают в задачах аэродинамики, гидродинамики, квантовой физики, трещиноустойчивости. Основные методы их решения численные (например, [3; 4]). Как сказано в работе [5], «отсутствует общая теория гиперсингулярных интегральных уравнений», и в этой же работе создана основа подобной теории для некоторого класса таких уравнений.

Уравнение (1) является, по-видимому, первым исследованным в математической литературе интегро-дифференциальным уравнением с гиперсингулярными интегралами. Частные случаи переменных коэффициентов в этом уравнении изучались затем в [6; 7]. В настоящей работе решено уравнение (1) с переменными коэффициентами, содержащими степенные множители. Наличие степенных множителей приводит к более «благополучной», чем в [1], картине разрешимости из-за отсутствия бесконечного числа условий разрешимости.

Общая схема исследования. Два уравнения для последующего применения этой схемы

Пусть в уравнении (1) коэффициенты имеют вид

$$a_k=a(t)A_k(t)+b(t)B_k(t),\ b_k=a(t)A_k(t)-b(t)B_k(t),\ t\in L, \tag{2}$$

где $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$, $A_k(t)$, $B_k(t)$ – H-непрерывные заданные функции, $k=\overline{0,n}$. При этом все функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$ аналитически продолжимы в области D_+ и D_- соответственно, лишь у функций $B_k(t)$ допускаются полюсы в точке $z=\infty$.

Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\ z\in D_\pm.$$

Используя для предельных значений функций $\Phi_{\pm}(z)$ и их производных обобщенные формулы Сохоцкого [8]

$$\begin{cases} \Phi_{+}^{(k)}(t) - \Phi_{-}^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t), \\ \Phi_{+}^{(k)}(t) + \Phi_{-}^{(k)}(t) = \dfrac{k!}{\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}},\ t \in L,\ k = \overline{0, n}, \end{cases}$$

сведем уравнение (1) к задаче линейного сопряжения

$$2a(t)\sum_{k=0}^{n} A_k(t)\Phi_{+}^{(k)}(t) = 2b(t)\sum_{k=0}^{n} B_k(t)\Phi_{-}^{(k)}(t) + f(t),\ t \in L. \tag{3}$$

Введем аналитические функции

$$F_{+}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k(z)\Phi_{+}^{(k)}(z),\ z \in D_{+}, \tag{4}$$

$$F_{-}(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k(z)\Phi_{-}^{(k)}(z),\ z \in D_{-} \tag{5}$$

с H-непрерывными предельными значениями $F_{\pm}(t)$ на L и из (3) получим краевую задачу Римана

$$F_{+}(t) = \frac{b(t)}{a(t)}F_{-}(t) + \frac{f(t)}{2a(t)},\ t \in L. \tag{6}$$

Эта задача должна решаться в классе функций, имеющих на бесконечности поведение, вытекающее из формулы (5).

Если задача Римана (6) окажется разрешимой, то соотношения (4), (5) станут линейными дифференциальными уравнениями для нахождения функций $\Phi_{\pm}(z)$. Решение уравнения (5) следует находить с учетом условия $\Phi_{-}(\infty) = 0$, выражающего известное свойство интеграла типа Коши. Решив эти дифференциальные уравнения, получим решение исходного уравнения в виде

$$\varphi(t) = \Phi_{+}(t) - \Phi_{-}(t),\ t \in L. \tag{7}$$

Далее будем решать следующие два уравнения:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a(t)k!\alpha_k + b(t)(-1)^k n! t^k}{k!}\varphi^{(k)}(t) + \frac{a(t)k!\alpha_k - b(t)(-1)^k n! t^k}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}\right) = f(t),\ t \in L, \tag{8}$$

$$a(t)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}\right) +$$

$$+ b(t)\left(\varphi(\tau) - t^{2n}\varphi^{(n)}(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{n! t^{2n}}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{n+1}}\right) = f(t),\ t \in L, \tag{9}$$

где α_k – заданные числа, $k = \overline{0, n}$. Оба уравнения (8) и (9) являются частными случаями (1) с коэффициентами вида (2), в которых $A_k(t) = \alpha_k$, $k = \overline{0, n}$, а функции $B_k(t)$ различны для каждого из уравнений:

- в случае (8): $B_k(t) = \dfrac{(-1)^k n! t^k}{k!}$, $k = \overline{0, n}$;
- в случае (9): $B_0(t) = 1$, $B_n(t) = -t^{2n}$, $B_k(t) = 0$, $k = \overline{1, n-1}$.

В (9) считаем для удобства $n \geq 2$. При $n = 1$ решение этого уравнения также осуществляется по общей схеме (и притом особенно просто), однако выкладки, проводимые с произвольным n, требуют для $n = 1$ частых оговорок.

Вспомогательные факты

1. Задача Римана (6) хорошо изучена [9]. Условия ее разрешимости (если они возникают) записываются в виде

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)} = 0, \tag{10}$$

а сами решения (если они существуют) – в виде

$$F_\pm(z) = X_\pm(z)\left(\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau - z)} + P(z)\right),\ z \in D_\pm. \tag{11}$$

В этих формулах $X_\pm(z)$ – канонические функции задачи (6). Значения k в (10) и выражение для функции $P(z)$ в (11) зависят от индекса $\alpha = \mathrm{Ind}_L \dfrac{b(t)}{a(t)}$ и поведения искомой функции $F_-(z)$ на бесконечности. Это поведение будет разным для уравнений (8), (9), поэтому остальные необходимые пояснения к формулам (10), (11) удобно сделать в дальнейшем.

2. Для обоих уравнений (8), (9) соответствующее дифференциальное уравнение (4) может быть записано в виде

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Phi_+^{(k)}(z) = F_+(z),\ z \in D_+. \tag{12}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k = 0$, которые мы для простоты далее считаем попарно различными. Решение уравнения (12) представимо формулой

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j + N_j \int_0^z e^{-\lambda_j \zeta} F_+(\zeta)d\zeta\right)e^{\lambda_j z}, \tag{13}$$

где C_j – произвольные постоянные; $N_j = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n \prod\limits_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{n}(\lambda_m - \lambda_j)}$, $j = \overline{1, n}$. (При $n = 1$ произведение $\prod\limits_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{n}(\lambda_m - \lambda_j)$ следует заменить на 1.)

Формула (13) взята из работы [1], причем здесь приведен более подробный ее вариант. Отметим еще, что если среди корней характеристического уравнения будут кратные, то (13) может быть надлежащим образом видоизменена.

Решение уравнения (8)

Для уравнения (8) соответствующее уравнение (5) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!} z^k \Phi_-^{(k)}(z) = F_-(z),\ z \in D_-. \tag{14}$$

Поскольку $\Phi_-(\infty) = 0$, то все слагаемые в левой части (14) также, очевидно, на бесконечности равны нулю, поэтому $F_-(\infty) = 0$. Следовательно, задачу Римана (6) следует решать в классе функций, исчезающих на бесконечности.

Уравнение (14) есть линейное уравнение Эйлера. Известно [10, с. 562], что фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения образуют функции $z, z^2, \ldots, z^n$. Решать это уравнение удобнее, не используя известные методы, а делая замену $\tilde{\Phi}_-(z) = \dfrac{\Phi_-(z)}{z}$, после которой получим

$$\Phi_-(z) = \tilde{\Phi}_-(z)z,\ \ \Phi_-^{(k)}(z) = \tilde{\Phi}_-^{(k)}(z)z + k\tilde{\Phi}_-^{(k-1)}(z),\ \ k = \overline{1, n},$$

а (14) примет вид

$$(-1)^{n+1}\tilde{\Phi}_-^{(n)}z^{n+1}z^{n+1} = F_-(z),$$

откуда

$$\tilde{\Phi}_-(z) = Q(z) + (-1)^{n+1}\int_\infty^z d\zeta_1\int_\infty^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_\infty^{\zeta_{n-1}} \frac{F_-(\zeta_n)}{\zeta_n^{n+1}}d\zeta_n,$$

где $Q(z)$ – многочлен степени n – 1 с произвольными коэффициентами. Следовательно,

$$\Phi_-(z) = zQ(z) + (-1)^{n+1}z\int_\infty^z d\zeta_1\int_\infty^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_\infty^{\zeta_{n-1}} \frac{F_-(\zeta_n)}{\zeta_n^{n+1}}d\zeta_n. \quad (15)$$

Поскольку $\frac{F_-(\zeta_n)}{\zeta_n^{n+1}} = O\left(\frac{1}{\zeta_n^{n+2}}\right)$ при $\zeta_n \to \infty$, то n-кратное интегрирование в (15) приведет к тому, что $(-1)^{n+1}z\int_\infty^z d\zeta_1\int_\infty^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_\infty^{\zeta_{n-1}} \frac{F_-(\zeta_n)}{\zeta_n^{n+1}}d\zeta_n = O\left(\frac{1}{z}\right)$ при $z \to \infty$, и тогда для выполнения условия $\Phi_-(\infty) = 0$ следует положить $Q(z) \equiv 0$.

Итак, если соответствующая задача Римана (6) разрешима, то всегда можно с помощью формул (13), (15) найти функции $\Phi_\pm(z)$, а затем по формуле (7) записать решение исходного уравнения. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При $\alpha \geq 0$ уравнение (8) безусловно разрешимо. При $\alpha < 0$ для его разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий (10), в которых $k = \overline{0, -\alpha - 1}$.*

В случае разрешимости уравнения (8) его решение содержит $n + \max(0, \alpha)$ произвольных постоянных и дается формулой

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j + N_j\int_0^t e^{-\lambda_j\zeta}F_+(\zeta)d\zeta\right)e^{\lambda_j t} + (-1)^n t\int_\infty^t d\zeta_1\int_\infty^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_\infty^{\zeta_{n-1}} \frac{F_-(\zeta_n)}{\zeta_n^{n+1}}d\zeta_n,$$

где C_j – произвольные постоянные, $j = \overline{1, n}$; функции $F_\pm(z)$ выражаются по формуле (11), в которой $P(z)$ – многочлен степени $\alpha - 1$ с произвольными коэффициентами при $\alpha \geq 1$, $P(z) \equiv 0$ при $\alpha < 1$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (8), полагая в нем $n = 2$, $a(t) = e^{-t}$, $b(t) = t$, $\alpha_0 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $f(t) = 2e^{-t}$. Получим

$$\left(e^{-t} + 2t\right)\varphi(t) + 2\left(e^{-t} - t^2\right)\varphi'(t) + \left(e^{-t} + t^3\right)\varphi''(t) +$$
$$+\frac{e^{-t} - 2t}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{2\left(e^{-t} + t^2\right)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \frac{2\left(e^{-t} - t^3\right)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^3} = 2e^{-t},\ t \in L.$$

В этом случае задача Римана (6) записывается в виде

$$F_+(t) = te^tF_-(t) + 1,\ t \in L,$$

и имеет в классе исчезающих на бесконечности функций решение $F_+(z) = 1 + \beta e^z$, $F_-(z) = \frac{\beta}{z}$, где β – произвольная постоянная.

Дифференциальные уравнения (4), (5) соответственно приобретают вид

$$\Phi_+(z) + 2\Phi_+'(z) + \Phi_+''(z) = 1 + \beta e^z,\ \ 2\Phi_-(z) - 2z\Phi_-'(z) + z^2\Phi_-''(z) = \frac{\beta}{z}$$

и имеют решения

$$\Phi_+(z) = C_1e^{-z} + C_2ze^{-z} + \frac{\beta}{4}e^z + 1,\ \Phi_-(z) = \frac{\beta}{6z},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Решение примера 1 согласно формуле (7) есть

$$\varphi(t) = e^{-t}(C_1 + C_2t) + \beta\left(\frac{e^t}{4} - \frac{1}{6t}\right) + 1.$$

Решение уравнения (9)

Для уравнения (9) соответствующее уравнение (5) принимает вид

$$z^{2n}\Phi_-^{(n)}(z) - \Phi_-(z) = -F_-(z), \tag{16}$$

из которого понятно, что $F_-(z) = O\left(z^{n-1}\right)$ при $z \to \infty$, т. е. задачу Римана (6) надо решать в классе функций, допускающих на бесконечности полюс порядка не выше $n - 1$.

Пусть $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi ki}{n}}$ – комплексные корни n-й степени из единицы, $k = \overline{1, n}$. Известно [10, с. 484], что фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции $z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}}$, $k = \overline{1, n}$.

Лемма 1. *Для* $k = \overline{1, n}$, $m = \overline{1, n-1}$ *справедлива формула*

$$\left(z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}}\right)^{(m)} = e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}} \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_k^j l_{mj} z^{n-m-j-1}, \tag{17}$$

где l_{mj} *– некоторые постоянные (не зависящие от* k*), причем* $l_{mm} = 1$.

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции по m. Для $m = 1$ формула (17), очевидно, верна. Пусть она верна для некоторого $m \geq 1$. Тогда

$$\left(z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}}\right)^{(m+1)} = \left(e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}} \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_k^j l_{mj} z^{n-m-j-1}\right)' =$$

$$= e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}} \frac{\varepsilon_k}{z^2} \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_k^j l_{mj} z^{n-m-j-1} + e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}} \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_k^j l_{mj} (n-m-j-1) z^{n-m-j-2} = e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}} \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon_k^j l_{m+1,\,j} z^{n-m-j-2},$$

где $l_{m+1,0} = l_{m,0}(n-m-1)$; $l_{m+1,\,j} = l_{m,\,j-1} + l_{m,\,j}(n-m-1-j)$, $j = \overline{1, m}$; $l_{m+1,\,m+1} = l_{m,m} = 1$. Полученное выражение соответствует замене m на $m + 1$ в формуле (17). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Определитель* W *Вронского функций* $z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}}$ *равен определителю Вандермонда чисел* ε_k, $k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Запишем определитель W, используя лемму 1:

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{\varepsilon_1}{z}} z^{n-1} & e^{-\frac{\varepsilon_2}{z}} z^{n-1} & \ldots & e^{-\frac{\varepsilon_n}{z}} z^{n-1} \\ e^{-\frac{\varepsilon_1}{z}}\left(l_{10}z^{n-2} + \varepsilon_1 z^{n-3}\right) & e^{-\frac{\varepsilon_2}{z}}\left(l_{10}z^{n-2} + \varepsilon_2 z^{n-3}\right) & \ldots & e^{-\frac{\varepsilon_n}{z}}\left(l_{10}z^{n-2} + \varepsilon_n z^{n-3}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-\frac{\varepsilon_1}{z}} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_1^j l_{n-1,\,j} z^{-j} & e^{-\frac{\varepsilon_2}{z}} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_2^j l_{n-1,\,j} z^{-j} & \ldots & e^{-\frac{\varepsilon_n}{z}} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^j l_{n-1,\,j} z^{-j} \end{vmatrix}.$$

Вынесем общие множители столбцов $e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}}$, $k = \overline{1, n}$, за знак определителя. Получим перед определителем коэффициент $\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}} = e^{-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{z}} = 1$, поскольку $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = 0$.

Оставшийся определитель представим в виде надлежащей суммы определителей, элементами которых служат отдельные слагаемые строк определителя. Все указанные определители из-за пропорциональности элементов каких-либо строк обратятся в нуль, ненулевым будет лишь определитель из последних слагаемых всех строк:

$$\begin{vmatrix} z^{n-1} & z^{n-1} & \ldots & z^{n-1} \\ \varepsilon_1 z^{n-3} & \varepsilon_2 z^{n-3} & \ldots & \varepsilon_n z^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1^{n-1} z^{-n+1} & \varepsilon_2^{n-1} z^{-n+1} & \ldots & \varepsilon_n^{n-1} z^{-n+1} \end{vmatrix}.$$

Вынесем общие множители строк последнего определителя за знак определителя, тогда перед определителем будет коэффициент $z^{n-1}z^{n-3}\cdots z^{-n+1}=1$ и в результате останется, очевидно, определитель Вандермонда чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $k=\overline{1,n}$, $k\neq j$. *Тогда для каждого* $j=\overline{1,n}$ *определитель Вронского функций* $z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_k}{z}}$ *равен* $W_j z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_j}{z}}$, *где* W_j *– определитель Вандермонда чисел* ε_k.

Доказательство леммы 3 не приводится, поскольку оно вполне аналогично доказательству леммы 2.

Будем решать уравнение (16) методом вариации произвольных постоянных. Для этого вначале следует решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_j}{z}}\right)^{(k)}\tilde{D}_j(z)=\tilde{F}_k(z),\ k=\overline{0,n-1},$$

где $\tilde{F}_k(z)=0$ при $k=\overline{0,n-2}$; $\tilde{F}_{n-1}(z)=-\dfrac{F_-(z)}{z^{2n}}$. Решая ее по правилу Крамера и используя леммы 2, 3 для записи необходимых определителей, получим

$$\tilde{D}_j(z)=-\frac{(-1)^{n+j}W_j z^{n-1}e^{-\frac{\varepsilon_j}{z}}F_-(z)}{Wz^{2n}}=\frac{M_j e^{\frac{\varepsilon_j}{z}}F_-(z)}{z^{n+1}},$$

где $M_j=\dfrac{(-1)^{n+j-1}W_j}{W}=\dfrac{(-1)^{n+j-1}\prod\limits_{\substack{m,k=1,\,m>k,\\ m\neq j,\,k\neq j}}^{n}(\varepsilon_m-\varepsilon_k)}{\prod\limits_{\substack{m,k=1,\\ m>k}}^{n}(\varepsilon_m-\varepsilon_k)}=\dfrac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{n}(\varepsilon_m-\varepsilon_j)}$, $j=\overline{1,n}$.

Метод вариации произвольных постоянных позволяет записать общее решение уравнения (16) в виде

$$\Phi_-(z)=z^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(D_j+M_j\int\limits_{\infty}^{z}\frac{e^{\frac{\varepsilon_j}{\zeta}}F_-(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right)e^{-\frac{\varepsilon_j}{z}},\tag{18}$$

где D_j – произвольные постоянные.

Заметим, что $\dfrac{e^{\frac{\varepsilon_j}{\zeta}}F_-(\zeta)}{\zeta^{n+1}}=O\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)$ при $\zeta\to\infty$, поэтому интегралы из (18) сходятся и дают исчезающие на бесконечности функции.

Функция $\Phi_-(z)$ в формуле (18), вообще говоря, имеет полюс порядка $n-1$ на бесконечности. Покажем, что постоянные D_j можно подобрать, и притом единственным образом, так, чтобы добиться равенства $\Phi_-(\infty)=0$.

Пусть $\dfrac{\gamma_1}{z}+\dfrac{\gamma_2}{z^2}+\ldots+\dfrac{\gamma_{n-1}}{z^{n-1}}+\ldots$ есть разложение в ряд Тейлора в окрестности бесконечности функции $\sum\limits_{j=1}^{n}M_j\left(\int\limits_{\infty}^{z}\dfrac{e^{\frac{\varepsilon_j}{\zeta}}F_-(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right)e^{-\frac{\varepsilon_j}{z}}$. Делая аналогичные разложения для функций $e^{-\frac{\varepsilon_j}{z}}$, в окрестности бесконечности получим

$$\Phi_-(z)=z^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon_j}{1!z}+\frac{\varepsilon_j^2}{2!z^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\varepsilon_j^{n-1}}{(n-1)!z^{n-1}}+\ldots\right)D_j+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots+\frac{\gamma_{n-1}}{z^{n-1}}+\ldots\right).$$

Устраним полюс на бесконечности, подчинив постоянные D_j требованиям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} D_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^k D_j = (-1)^{k+1} \gamma_k k!,\ k = \overline{1,\ n-1}. \end{cases} \tag{19}$$

Эти требования представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных D_j, причем определитель системы есть определитель Вандермонда $W \neq 0$, поэтому она всегда имеет единственное решение.

Теперь установлены все факты, позволяющие сформулировать результат в отношении уравнения (9).

Теорема 2. *При $n + \alpha \geq 0$ уравнение (9) безусловно разрешимо. При $n + \alpha < 0$ для разрешимости уравнения (9) необходимо и достаточно выполнения условий (10), в которых $k = \overline{0, -n-\alpha-1}$. В случае разрешимости уравнения (9) его решение содержит $n + \max(0, n+\alpha)$ произвольных постоянных и дается формулой*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(C_j + N_j \int_0^t e^{-\lambda_j \zeta} F_+(\zeta) d\zeta \right) e^{\lambda_j t} - t^{n-1} \left(D_j + M_j \int_\infty^t \frac{e^{\frac{\varepsilon_j}{\zeta}} F_-(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) e^{-\frac{\varepsilon_j}{t}} \right),$$

где C_j – произвольные постоянные; D_j – вполне определенные постоянные, являющиеся решением системы (19), $j = \overline{1, n}$.

Функции $F_\pm(z)$ выражаются формулой (11), в которой $P(z)$ – многочлен степени $n + \alpha - 1$ с произвольными коэффициентами при $n + \alpha - 1 \geq 0$, $P(z) \equiv 0$ при $n + \alpha - 1 < 0$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$3\varphi(t) - \left(2t^4 + 1\right)\varphi''(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{2\left(2t^4 - 1\right)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^3} = e^{2t},\ t \in L.$$

Такой вид можно придать уравнению (9) при $n = 2$, $a(t) = 1$, $b(t) = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $f(t) = e^{2t}$.

Тогда краевая задача Римана (6) запишется как

$$F_+(t) = 2F_-(t) + \frac{1}{2} e^{2t},\ t \in L.$$

Решать ее следует в классе функций, допускающих полюс 1-го порядка на бесконечности. В итоге получим

$$F_+(z) = \frac{1}{2} e^{2z} + \beta_0 + \beta_1 z,\ F_-(z) = \frac{\beta_0}{2} + \frac{\beta_1 z}{2},$$

где β_0 и β_1 – произвольные постоянные.

Далее следует решать дифференциальные уравнения, которые для рассматриваемого примера имеют вид

$$\Phi_+(z) - \Phi_+''(z) = \frac{1}{2} e^{2z} + \beta_0 + \beta_1 z,\ \Phi_-(z) - z^4 \Phi_-''(z) = \frac{\beta_0}{2} + \frac{\beta_1 z}{2}.$$

Решением являются функции

$$\Phi_+(z) = \beta_0 + \beta_1 z - \frac{1}{6} e^{2z} + C_1 e^z + C_2 e^{-z},\ \Phi_-(z) = \frac{1}{2}\left(\beta_0 + \beta_1 z - \beta_0 z \operatorname{sh}\frac{1}{z} - \beta_1 z \operatorname{ch}\frac{1}{z} \right),$$

здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные, а решение $\Phi_-(z)$ найдено с учетом условия $\Phi_-(\infty) = 0$.

Наконец, решение примера получим по формуле (7)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_0 t \operatorname{sh}\frac{1}{t} + \beta_1 t \operatorname{ch}\frac{1}{t} \right) - \frac{1}{6} e^{2t} + C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Заключение

Формулы решений, указанные в формулировках теорем 1 и 2, верны как для однородных, так и неоднородных уравнений (8), (9). Отметим как очевидное следствие этих теорем безусловную разрешимость однородных уравнений и наличие у них нетривиальных решений.

Наряду с уравнениями (8), (9) по указанной в настоящей статье схеме можно решить многие уравнения (1), коэффициенты которых имеют вид (2). Важно при этом уметь решать в классе аналитических функций возникающие дифференциальные уравнения (4), (5).

Библиографические ссылки

1. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2010;54(6):5–8.

2. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*. Москва: Наука; 1978. 352 с.

3. Boykov IV, Ventsel ES, Boykova AI. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60(6):607–628. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.03.003.

4. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and application to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

5. Бойков ИВ. О разрешимости гиперсингулярных интегральных уравнений. *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2016;3(39):86–102. DOI: 10.21685/2072-3040-2016-3-6.

6. Зверович ЭИ, Шилин АП. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2018; 54(4):404–407. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.

7. Шилин АП. Явное решение одного гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;2:67–72. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-2-67-72.

8. Зверович ЭИ. Обобщение формул Сохоцкого. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2012;2:24–28.

9. Гахов ФД. *Краевые задачи*. Москва: Наука; 1977. 640 с.

10. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание*. Фомин СВ, переводчик. Санкт-Петербург: Лань; 2003. 576 с.

References

1. Zverovich EI. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2010;54(6):5–8. Russian.

2. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineinykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [The Cauchy problem of linear equations with partial derivatives of hyperbolic type]. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. Russian.

3. Boykov IV, Ventsel ES, Boykova AI. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2010;60(6):607–628. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.03.003.

4. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and application to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

5. Boykov IV. On solubility of hypersingular integral equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki*. 2016:3(39):86–102. Russian. DOI: 10.21685/2072-3040-2016-3-6.

6. Zverovich EI, Shilin AP. [Solution of the integro-differential equations with a singular and hypersingular integrals]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2018;54(4):404–407. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407.

7. Shilin AP. Explicit solution of one hypersingular integro-differential equation of the second order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;2:67–72. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-2-67-72.

8. Zverovich EI. [Generalization of Sohotsky formulas]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2012;2:24–28. Russian.

9. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.

10. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Leipzig: B. G. Teubner; 1977. DOI: 10.1007/978-3-663-05925-7.

Russian edition: Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. 6-e izdanie*. Fomin SV, translator. Saint Petersburg: Lan'; 2003. 576 p.

Статья поступила в редколлегию 08.09.2019.
Received by editorial board 08.09.2019.