
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.872

МНОГОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕЗЕРВНЫМИ ПРИБОРАМИ

В. И. КЛИМЕНОК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается многолинейная система с неограниченным буфером, которая может использоваться при проектировании экономных схем энергопотребления и как математическая модель ненадежных реальных стохастических систем. Запросы поступают в систему в групповом марковском потоке, времена обслуживания распределены по фазовому закону. Если время обслуживания запроса прибором превышает некоторую случайную величину, распределенную по фазовому закону, этот прибор получает помощь от резервного прибора из конечного множества резервных приборов. В статье найдены стационарное распределение вероятностей состояний и основные характеристики производительности системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания; резервные приборы; групповой марковский поток; фазовое распределение времени обслуживания; стационарное распределение; характеристики производительности.

Благодарность. Исследование выполнено в рамках совместного гранта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф18Р-136) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-57-00002).

Образец цитирования:

Клименок В.И. Многолинейная система массового обслуживания с резервными приборами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:57–70.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-57-70>

For citation:

Klimenok V.I. Multi-server queueing system with reserve servers. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;3:57–70. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-57-70>

Автор:

Валентина Ивановна Клименок – доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Valentina I. Klimenok, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
vklimenok@yandex.ru



MULTI-SERVER QUEUEING SYSTEM WITH RESERVE SERVERS

V. I. KLIMENOK^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In this paper, we investigate a multi-server queueing system with an unlimited buffer, which can be used in the design of energy consumption schemes and as a mathematical model of unreliable real stochastic systems. Customers arrive to the system in a batch Markovian arrival process, the service times are distributed according to the phase law. If the service time of the customer by the server exceeds a certain random value distributed according to the phase law, this server receives assistance from the reserve server from a finite set of reserve servers. In the paper, we calculate the stationary distribution and performance characteristics of the system.

Keywords: queueing system; reserve servers; batch Markovian arrival process; phase type distribution; stationary distribution; performance characteristics.

Acknowledgements. This work has been financially supported by the joint grant of Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (No. Ф18Р-136) and Russian Foundation for Fundamental Research (No. 18-57-00002).

Введение

Проблемы, связанные с энергосбережением во многих реальных системах, в частности в центрах обработки данных при облачных вычислениях, могут решаться путем резервирования (с дальнейшим адаптивным подключением) обслуживающих ресурсов. В системах обслуживания разнородной информации, например в кол-центрах, резервирование устройств для приоритетной информации может существенно повысить качество работы. В ненадежных системах передачи данных наличие резервных каналов позволяет улучшить качество передачи. Вследствие стохастического характера обработки и передачи информации актуальным является математическое моделирование систем с резервированием в рамках теории массового обслуживания. Упомянем лишь некоторые публикации в данной области.

В [1; 2] исследуются двухфазные системы массового обслуживания с резервированием каналов для приоритетных заявок на второй фазе, которые моделируют кол-центры, обрабатывающие запросы различных категорий важности. В публикациях [3–6] рассмотрены математические модели гибридных систем связи, состоящих из ненадежного канала FSO (free space optics) и резервного абсолютно надежного радиоканала либо из FSO-канала и резервного канала миллиметрового диапазона, которые могут выходить из строя в непересекающихся интервалах времени. В статье [7] анализируется однолинейная система с бесконечным буфером и резервным прибором, в которой предполагается, что резервный прибор активируется, когда обслуживание заявки становится слишком длинным. После активации основной и резервный приборы обслуживают эту заявку одновременно. В [7] показано, что процесс функционирования системы является векторным процессом гибели и размножения. Доказывается условие эргодичности, вычисляются стационарное распределение и характеристики производительности системы, выводится преобразование Лапласа – Стильтеса распределения времени ожидания.

В настоящей статье результаты [7] обобщаются на случай многолинейной системы с конечным числом резервных приборов. Полученные результаты могут быть использованы для решения проблемы нахождения компромисса между энергопотреблением и качеством обслуживания посредством использования резервных приборов, которые подключаются к обслуживанию заявки в случае превышения времени пребывания заявки на основном приборе (будем говорить также «в случае истечения таймера»). Такой сценарий обслуживания при разумной экономии энергии позволяет избежать слишком больших задержек в системе. Последняя также может рассматриваться как модель ненадежной системы, где при отказе основного ненадежного прибора резервный прибор завершает обслуживание текущей заявки. В этом случае время пребывания на основном приборе интерпретируется как время до поломки этого прибора.

Описание системы

Мы рассматриваем N -линейную систему массового обслуживания с потоком заявок, представляющим собой ВМАР-поток (batch markovian arrival process). Последний задается управляющим процессом $v, t \geq 0$, который является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем, конечным пространством состояний $\{0, \dots, W\}$ и $(W+1) \times (W+1)$ -матрицами $D_k, k \geq 0$, где (v, v') -й элемент матрицы

$D_k, k \geq 1$, есть интенсивность перехода управляющего процесса из состояния v в состояние v' , сопровождающегося генерацией группы, состоящей из k запросов. Недиagonальные элементы матрицы D_0 есть интенсивности переходов управляющего процесса из состояния v в состояние v' , не сопровождающихся генерацией запросов. Диагональные элементы матрицы D_0 есть взятые с противоположным знаком интенсивности выхода управляющего процесса из своих состояний. Отметим, что матрицы $D_k, k \geq 0$, полностью определяются их производящей функцией $D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, |z| \leq 1$. При этом матрица $D(1)$ является инфинитезимальным генератором управляющего процесса $v_t, t \geq 0$.

Приведем некоторые важные характеристики ВМАР. Интенсивность поступления заявок в ВМАР (fundamental rate) определяется как $\lambda = \theta D'(1)e$, где θ – единственное решение системы $\theta D(1) = \theta, \theta e = 1, e$ – вектор-столбец, состоящий из единиц. Интенсивность λ_b поступления групп заявок определяется как $\lambda_b = \theta(-D_0)e$. Коэффициент вариации интервалов между моментами поступления групп заявок находится по формуле $c_{\text{var}}^2 = 2\lambda_b \theta(-D_0)^{-1} e - 1$. Коэффициент корреляции соседних интервалов между моментами поступления групп заявок определяется как $c_{\text{corr}} = \frac{\lambda_b \theta(-D_0)^{-1} (D(1) - D_0)(-D_0)^{-1} e - 1}{c_{\text{var}}^2}$.

(Дополнительную информацию о ВМАР см. в [8].)

Полагаем, что все приборы одинаковы и независимы друг от друга. Время обслуживания заявки прибором имеет распределение PH -типа с неприводимым представлением (β, S) , т. е. указанное время интерпретируется как время, за которое цепь Маркова $m_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, M+1\}$ достигнет поглощающего состояния $M+1$. Переходы цепи $m_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, M\}$ задаются субгенератором S , а интенсивности переходов в поглощающее состояние – вектором $S_0 = -Se$. В момент начала обслуживания состояние процесса $m_t, t \geq 0$, выбирается из пространства состояний $\{1, \dots, M\}$ в соответствии с вероятностным вектором-строкой β . Полагаем, что матрица $S + S_0\beta$ неприводима. Интенсивность обслуживания задается как $\mu = -(\beta S^{-1}e)^{-1}$. Более подробно о PH -распределении и его свойствах можно узнать из [9].

Если в момент поступления группы заявок необходимое количество приборов свободно, то заявки забирают соответствующие приборы. Если свободных приборов недостаточно (или все приборы заняты), часть заявок (или все заявки) помещаются в конец очереди в бесконечном буфере в случайном порядке.

Кроме рабочих обслуживающих приборов, в системе имеется R резервных приборов. Считаем, что $R \leq N$. Свободный резервный прибор подключается к обслуживанию текущей заявки, если время обслуживания этой заявки превышает некоторое предельное время нахождения на приборе. Это предельное время определяется как случайная величина (таймер), имеющая PH -распределение с неприводимым представлением (τ, T) и пространством состояний управляющего процесса $(1, 2, \dots, L)$. Интенсивности переходов в абсорбирующее состояние задаются вектором $T_0 = -Te$. Интенсивность таймера вычисляется как $\tau = -(\gamma T^{-1}e)^{-1}$. При подключении к обслуживанию резервного прибора распределение времени до конца обслуживания заявки задается как PH -распределение с неприводимым представлением $(\tilde{\beta}, \tilde{S})$ и пространством состояний управляющего процесса $(1, 2, \dots, \tilde{M})$. Интенсивности переходов в абсорбирующее состояние определяются вектором $\tilde{S}_0 = -\tilde{S}e$. Интенсивность такого обслуживания задается как $\tilde{\mu} = -(\tilde{\beta} \tilde{S}^{-1}e)^{-1}$.

Если в момент окончания предельного времени обслуживание заявки еще не закончилось, а свободных резервных приборов нет, то с вероятностью p заявка покидает систему недообслуженной и с дополнительной вероятностью $1-p$ обслуживание на этом приборе начинается заново.

Процесс изменения состояний системы

Пусть в момент времени t :

- i_t – число заявок в системе, $i_t \geq 0$;
- r_t – число занятых резервных приборов, $r_t = 0, \min\{i_t, R\}$;
- $m_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса обслуживания на j -м приборе, работающем без поддержки, $m_t^{(j)} = \overline{1, M}$ (полагаем, что работающие без поддержки приборы нумеруются в порядке их занятия,

т. е. прибор, который начинает обслуживание, нумеруется максимальным числом среди всех занятых приборов. Когда прибор заканчивает работу, происходит перенумерация);

- $\eta_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса таймера на j -м приборе, работающем без поддержки, $\eta_t^{(j)} = \overline{1, L}$;

- $\tilde{m}_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса на j -м приборе, работающем с поддержкой, $\tilde{m}_t^{(j)} = \overline{1, \tilde{M}}$ (полагаем, что прибор, на котором только что закончился таймер, получает первый номер среди всех приборов, работающих с поддержкой, а номера остальных таких приборов увеличиваются на единицу. Когда на каком-либо из этих приборов заканчивается обслуживание, остальные приборы перенумеровываются);

- v_t – состояние управляющего процесса ВМАР, $v_t = \overline{0, W}$, $t \geq 0$.

Процесс изменения состояний системы описывается регулярной неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний

$$\Omega = \{(i, v), i = 0, v = \overline{0, W}\} \cup \\ \cup \left\{ (i, r, v, m^{(1)}, l^{(1)}, m^{(2)}, l^{(2)}, \dots, m^{(\min\{i, N\}-r)}, l^{(\min\{i, N\}-r)}, \tilde{m}^{(1)}, \dots, \tilde{m}^{(r)}), i > 0, \right. \\ \left. r = \overline{0, \min\{i, R\}}, v = \overline{0, W}, m^{(1)}, \dots, m^{(\min\{i, N\}-r)} = \overline{1, M}, \right. \\ \left. l^{(1)}, \dots, l^{(\min\{i, N\}-r)} = \overline{1, L}, \tilde{m}^{(1)}, \dots, \tilde{m}^{(r)} = \overline{1, \tilde{M}} \right\}.$$

Число состояний пространства состояний при $i = 0$ вычисляется как

$$K_0 = (W + 1) \sum_{i=0}^N \sum_{r=0}^{\min\{i, R\}} (ML)^{i-r} \tilde{M}^r,$$

и для любого фиксированного $i > 0$ число состояний равно

$$K = (W + 1) \sum_{r=0}^R (ML)^{N-r} \tilde{M}^r.$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

- $\otimes (\oplus)$ – кронекерово произведение (сумма) матриц;
- $A^{\otimes l} = \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_l$, $l \geq 1$, $A^{\otimes 0} = 1$;
- $A^{\oplus l} = \sum_{m=0}^{l-1} I_{n^m} \otimes A \otimes I_{n^{l-m-1}}$, $l \geq 1$, для матрицы A , имеющей n строк;
- $\bar{W} = W + 1$; $a = ML$;
- $\mathcal{B}^{(N, r)} = I_{\bar{W}} \otimes (\mathcal{S}_0 \beta \otimes e \tau)^{\oplus N-r} \otimes I_{\tilde{M}^r}$, $r = \overline{0, R}$;
- $\tilde{\mathcal{B}}^{(N, r)} = I_{\bar{W}} \otimes I_{a^{N-r}} \otimes (\beta \otimes \tau) \otimes \tilde{\mathcal{S}}_0^{\oplus r}$, $r = \overline{1, R}$;
- $\mathcal{T}_0^{(i, r)} = I_{\bar{W}} \otimes \left[(e_M \otimes T_0)^{\oplus \min\{i, N\}-r} \otimes I_{\tilde{M}^r} \right] \left(I_{a^{\min\{i, N\}-r-1}} \otimes \tilde{\beta} \otimes I_{\tilde{M}^r} \right)$, $i > r$, $r = \overline{0, R}$;
- $\mathcal{S}_0^{(i, r)} = I_{\bar{W}} \otimes (\mathcal{S}_0 \otimes e_L)^{\oplus i-r} \otimes I_{\tilde{M}^r}$, $r = \overline{0, i}$, $i = \overline{1, N}$;
- $\tilde{\mathcal{S}}_0^{(i, r)} = I_{\bar{W}} \otimes I_{a^{i-r}} \otimes \tilde{\mathcal{S}}_0^{\oplus r}$, $r = \overline{0, i}$, $i = \overline{1, N}$;
- $\mathcal{C}^{(i, r)} = D_0 \oplus (S \oplus T)^{\oplus \min\{i, N\}-r} \oplus \tilde{\mathcal{S}}^{\oplus r}$, $r = \overline{0, \min\{i, R\}}$, $i \geq 0$;
- $\mathcal{D}_k^{(i, r)} = D_k \otimes I_{a^{i-r}} \otimes (\beta \otimes \tau)^{\otimes \min\{k, N-i\}} \otimes I_{\tilde{M}^r}$, $k \geq 1$, $r = \overline{0, \min\{i, R\}}$, $i = \overline{0, N}$.

Полагаем, что состояния цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, перенумерованы в лексикографическом порядке.

Лемма. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, имеет следующую блочную структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \dots \\ \tilde{Q}_{-1} & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots \\ O & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & \dots \\ O & O & Q_{-1} & Q_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матрица F_0 порядка $K_0 \times K_0$ имеет блочный вид $F_0 = (F_0^{(i,j)})_{i,j=0,\overline{N}}$, где

$$F_0^{(i,i-1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{(i,0)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{S}}_0^{(i,1)} & \mathcal{S}_0^{(i,1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{S}}_0^{(i,2)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathcal{S}}_0^{(i,i-1)} & \mathcal{S}_0^{(i,i-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{\mathcal{S}}_0^{(i,i)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$F_0^{(i,i)} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{(i,0)} & \mathcal{T}_0^{(i,0)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}^{(i,1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{C}^{(i,i-1)} & \mathcal{T}_0^{(i,i-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{C}^{(i,i)} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq i \leq R,$$

$$F_0^{(i,i+k)} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_k^{(i,0)} & O & O & \dots & O & O & \dots & O \\ O & \mathcal{D}_k^{(i,1)} & O & \dots & O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \mathcal{D}_k^{(i,i)} & O_{\tilde{M}^i \times d^{k-1} \tilde{M}^{i+1}} & \dots & O_{\tilde{M}^i \times d^{i+k-\min\{i+k,R\}} \tilde{M}^{\min\{i+k,R\}}} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N-i,$$

$$F_0^{(i,i-1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{(i,0)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{S}}_0^{(i,1)} & \mathcal{S}_0^{(i,1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{S}_0^{(i,R-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathcal{S}}_0^{(i,R)} & \mathcal{S}_0^{(i,R)} + (1 - \delta_{N,R}) p I_{\tilde{W}} \otimes \\ & & & & \otimes (\mathbf{e}_M \otimes \mathbf{T}_0)^{\oplus i-R} \otimes I_{\tilde{M}^R} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$F_0^{(i,i)} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{(i,0)} & \mathcal{T}_0^{(i,0)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}^{(i,1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{C}^{(i,R-1)} & \mathcal{T}_0^{(i,R-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{C}^{(i,R)} + (1-p) I_{\tilde{W}} \otimes \\ & & & & \otimes (I_M \otimes \mathbf{T}_0 \boldsymbol{\tau})^{\oplus i-R} \otimes I_{\tilde{M}^R} \end{pmatrix}, \quad R < i < N, \quad (3)$$

$$F_0^{(i, i+k)} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_k^{(i,0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_k^{(i,1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{D}_k^{(i,R)} \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq N - i.$$

Если $R < N$, то матрицы $F_0^{(N, N-1)}$ и $F_0^{(N, N)}$ вычисляются по формулам (2) и (3) соответственно, где полагается $i = N$. Если $R = N$, то матрица $F_0^{(N, N-1)}$ вычисляется по формуле (1), а матрица $F_0^{(N, N)}$ – по формуле (3).

Матрицы F_k , $k \geq 1$, порядка $K_0 \times K$ имеют следующий вид:

$$F_k = \begin{pmatrix} \text{diag} \left\{ \mathcal{D}_{N+k}^{(0,r)}, r = \overline{0, \min\{0, R\}} \right\} & O_{\bar{W} \times \bar{W} \sum_{r=1}^R a^{N-r} \bar{M}^r} \\ \text{diag} \left\{ \mathcal{D}_{N+k-1}^{(1,r)}, r = \overline{0, \min\{1, R\}} \right\} & O_{\bar{W} \sum_{r=0}^1 a^{1-r} \bar{M}^r \times \bar{W} \sum_{r=2}^R a^{N-r} \bar{M}^r} \\ \vdots & \vdots \\ \text{diag} \left\{ \mathcal{D}_{k+1}^{(N-1,r)}, r = \overline{0, \min\{N-1, R\}} \right\} & O_{\bar{W} \sum_{r=0}^{N-1} a^{N-1-r} \bar{M}^r \times \bar{W} \sum_{r=N-1}^R a^{N-r} \bar{M}^r} \\ \text{diag} \left\{ \mathcal{D}_k^{(N,r)}, r = \overline{0, R} \right\} & \end{pmatrix}, k \geq 1.$$

Матрица \tilde{Q}_{-1} имеет порядок $K \times K_0$ и задается как

$$\tilde{Q}_{-1} = \left(O_{K \times (K_0 - K)} \mid Q_{-1} \right).$$

Матрицы Q_k , $k = -1, 0, 1, \dots$, имеют порядок $K \times K$ и задаются как

$$Q_{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{(N,0)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{B}}^{(N,1)} & \mathcal{B}^{(N,1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{B}^{(N, R-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathcal{B}}^{(N, R)} & \mathcal{B}^{(N, R)} + pI_{\bar{W}} \otimes (\mathbf{e}_M \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{T}_0 \boldsymbol{\tau})^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R} \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{(N,0)} & \mathcal{T}_0^{(N,0)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}^{(N,1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{C}^{(N, R-1)} & \mathcal{T}_0^{(N, R-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{C}^{(N, R)} + (1-p)I_{\bar{W}} \otimes (I_M \otimes \mathbf{T}_0 \boldsymbol{\tau})^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R} \end{pmatrix},$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_k^{(N,0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_k^{(N,1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{D}_k^{(N,R)} \end{pmatrix}, k \geq 1.$$

Следствие. Цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, принадлежит классу квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем [10].

Доказательство. Инфинитезимальный генератор Q рассматриваемой цепи имеет блочную верхнюю хессенбергову структуру, и блоки, образованные интенсивностями переходов из состояний со значением i счетной компоненты, $i \geq N + 1$, в состояния со значением j этой компоненты, зависят от значений i, j только через их разность $i - j$. Согласно определению квазитеплицевых цепей Маркова, приведенному в [10], это означает, что рассматриваемая цепь принадлежит классу квазитеплицевых цепей Маркова с $N + 1$ граничным состоянием.

Следствие доказано.

Условие эргодичности. Стационарное распределение

Пусть $B^{(r)}, \tilde{B}^{(r)}, T_0^{(r)}$ – матрицы, полученные из матриц $B^{(N,r)}, \tilde{B}^{(N,r)}, T_0^{(N,r)}$ соответственно путем формального удаления выражений $I_{\bar{w}} \otimes C^{(r)}$ – матрица, полученная из матрицы $C^{(N,r)}$ удалением выражения $D_0 \oplus$. Пусть также Q_{-1}, Q_0 – матрицы, полученные из Q_{-1}, Q_0 формальной заменой $B^{(N,r)}, T_0^{(N,r)}, S_0^{(N,r)}, C^{(N,r)}$, $r = \overline{0, R}$, на матрицы $B^{(r)}, T_0^{(r)}, S_0^{(r)}, C^{(r)}$ соответственно. Выражение $pI_{\bar{w}} \otimes (e_M \beta \otimes T_0 \tau)^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R}$ заменим на $p(e_M \beta \otimes T_0 \tau)^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R}$ и выражение $(1-p)I_{\bar{w}} \otimes (I_M \otimes T_0 \tau)^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R}$ – на $(1-p)(I_M \otimes T_0 \tau)^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R}$.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием эргодичности цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, является выполнение неравенства*

$$\lambda < \sum_{r=0}^R (x_r^{(1)} S_0 \otimes e_L)^{\oplus N-r} e + p x_R^{(1)} (e_M \otimes T_0)^{\oplus N-R} e + \sum_{r=1}^R x_r^{(2)} \tilde{S}_0^{\oplus r} e, \quad (4)$$

где

$$x_r^{(1)} = x_r (I_{a^{N-r}} \otimes e_{\bar{M}^r}), \quad x_r^{(2)} = x_r (e_{a^{N-r}} \otimes I_{\bar{M}^r}),$$

а вектор $x = (x_0, x_1, \dots, x_R)$ – единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$x(Q_{-1} + Q_0) = 0, \quad x e = 1. \quad (5)$$

Доказательство. Как следует из [10], необходимое и достаточное условие эргодичности квазитеплицевой цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, может быть сформулировано в терминах блоков генератора Q следующим образом:

$$y \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) Q_k e < 0, \quad (6)$$

где вектор y – единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$y \sum_{k=-1}^{\infty} Q_k = 0, \quad y e = 1. \quad (7)$$

Вектор y представим в виде

$$y = (\theta \otimes x_0, \theta \otimes x_1, \dots, \theta \otimes x_R).$$

Принимая во внимание соотношение $\sum_{k=0}^{\infty} D_k e = 0$, легко проверить, что такой вектор является единственным решением системы (7) тогда и только тогда, когда $x = (x_0, x_1, \dots, x_R)$ является единственным решением системы (5). Заметим, что система (5) имеет единственное решение, так как матрица $Q_{-1} + Q_0$ есть неприводимый генератор. Таким образом, мы перешли от системы (7) для вектора y к системе (5) для вектора x .

Теперь перейдем от неравенства (6) к неравенству (4). Перепишем (6) в виде

$$y \sum_{k=1}^{\infty} k Q_k e < -y \sum_{k=0}^{\infty} Q_k e.$$

Используя равенство $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k e = -Q_{-1} e$, имеем

$$y \sum_{k=1}^{\infty} k Q_k e < y Q_{-1} e. \quad (8)$$

Подставляя в левую часть неравенства (8) выражения для Q_k , $k \geq 1$, и принимая во внимание, что $\theta \sum_{k=0}^{\infty} kD_k e = \lambda$, получим

$$y \sum_{k=1}^{\infty} kQ_k e = \lambda. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим правую часть неравенства (8). Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} yQ_{-1}e &= (\theta \otimes x_0, \theta \otimes x_1, \dots, \theta \otimes x_R) \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{(N,0)} e \\ \mathcal{B}^{(N,1)} e + \tilde{\mathcal{B}}^{(N,1)} e \\ \vdots \\ \mathcal{B}^{(N,R-1)} e + \tilde{\mathcal{B}}^{(N,R-1)} e \\ \mathcal{B}^{(N,R)} e + \tilde{\mathcal{B}}^{(N,R)} e + p \left[I_{\bar{W}} \otimes \right. \\ \left. \otimes (e_M \beta \otimes T_0 \tau)^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R} \right] e \end{pmatrix} = \\ &= x_0 (S_0 \beta \otimes e \tau)^{\oplus N} e + \sum_{r=1}^R x_r \left[(S_0 \beta \otimes e \tau)^{\oplus N-r} \otimes I_{\bar{M}^r} \right] e + \\ &+ \sum_{r=1}^R x_r \left[I_{a^{N-r}} \otimes (\beta \otimes \tau) \otimes \tilde{S}_0^{\oplus r} \right] e + p x_R \left[(e_M \beta \otimes T_0 \tau)^{\oplus N-R} \otimes I_{\bar{M}^R} \right] e = \\ &= x_0 (S_0 \beta \otimes e \tau)^{\oplus N} e + \sum_{r=1}^R x_r (I_{a^{N-r}} \otimes e_{\bar{M}^r}) (S_0 \otimes e_L)^{\oplus N-r} e + \\ &+ \sum_{r=1}^R x_r (e_{a^{N-r}} \otimes I_{\bar{M}^r}) \tilde{S}_0^{\oplus r} e + p x_R (I_{a^{N-r}} \otimes e_{\bar{M}^r}) (e_M \otimes T_0)^{\oplus N-R} e = \\ &= \sum_{r=0}^R x_r^{(1)} (S_0 \otimes e_L)^{\oplus N-r} e + \sum_{r=1}^R x_r^{(2)} \tilde{S}_0^{\oplus r} e + p x_R^{(1)} (e_M \otimes T_0)^{\oplus N-R} e. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя (9), (10) в (8), получим искомое неравенство (4). Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что условие эргодичности (4) выполняется.

Перенумеруем стационарные вероятности цепи ξ_t , $t \geq 0$, в лексикографическом порядке и образуем векторы-строки p_i вероятностей, соответствующих значению i первой компоненты цепи, $i \geq 0$. Чтобы вычислить векторы p_i , $i \geq 0$, применим адаптированный к нашему случаю численно устойчивый алгоритм, который был разработан в [10] для многомерных квазитеплицевых цепей Маркова. При разработке этого алгоритма использовались элементы теории матриц и техника сенсорных цепей Маркова (см., например, [11; 12]). Для удобства читателя приводим здесь основные шаги адаптированного алгоритма.

Алгоритм. 1. Находим матрицу G как минимальное неотрицательное решение матричного уравнения

$$\sum_{n=-1}^{\infty} Q_n G^{n+1} = O.$$

2. Вычисляем матрицу G_1 , используя уравнение

$$Q_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n G^n G_1 = O,$$

из которого следует, что

$$G_1 = - \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n G^n \right)^{-1} Q_{-1}.$$

3. Находим матрицу G_0 из уравнения

$$\tilde{Q}_{-1} + \left(Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n G^{n-1} G_1 \right) G_0 = O,$$

откуда

$$G_0 = - \left(Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n G^{n-1} G_1 \right)^{-1} \tilde{Q}_{-1}.$$

4. Вычисляем матрицы

$$\bar{Q}_{i,l} = \begin{cases} F_l + \sum_{n=l+1}^{\infty} F_n G_{n-1} G_{n-2} \cdots G_l, & i=0, l \geq 0, \\ Q_{l-i} + \sum_{n=l+1}^{\infty} Q_{n-i} G_{n-1} G_{n-2} \cdots G_l, & i \geq 1, l \geq i, \end{cases}$$

где $G_i = G, i \geq 2$.

5. Находим матрицы Φ_l по рекуррентной формуле

$$\Phi_l = \left(\bar{Q}_{0,l} + \sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i \bar{Q}_{i,l} \right) (-\bar{Q}_{l,l})^{-1}, \quad l \geq 1.$$

6. Вычисляем вектор π как единственное решение системы

$$\begin{cases} \pi \bar{Q}_{0,0} = \mathbf{0}, \\ \pi \left(e_{K_0} + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l e_K \right) = 1. \end{cases}$$

7. Находим векторы p_{N+l} следующим образом: $p_{N+l} = \pi \Phi_l, l \geq 1$.

8. Вычисляем векторы p_l :

$$p_l = \pi \begin{pmatrix} O & O & O \\ \bar{W} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{r=0}^{\min\{l,R\}} a^{i-r} \tilde{M}^r & O & O \\ O & I \bar{W} \sum_{r=0}^{\min\{l,R\}} a^{i-r} \tilde{M}^r & O \\ O & O & \bar{W} \sum_{i=l+1}^N \sum_{r=0}^{\min\{l,R\}} a^{i-r} \tilde{M}^r \end{pmatrix}, \quad l = \overline{0, N}.$$

Характеристики производительности

Определив стационарное распределение $p_i, i \geq 0$, можно найти ряд стационарных характеристик производительности системы. Приведем наиболее важные из них:

- среднее число заявок в системе $L = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i e$;
- вероятность того, что система пуста, $p_0 = p_0 e$;
- стационарное распределение числа занятых приборов

$$p_n = p_n e, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad p_N = \sum_{i=N}^{\infty} p_i e;$$

- среднее число занятых приборов $N_{\text{busy}} = \sum_{n=1}^N n p_n$;

• совместная вероятность в произвольный момент застать r занятых резервных приборов, $\min\{i, N\} - r$ приборов, работающих без поддержки, и i заявок в системе

$$p_i(r) = p_i J^{(i,r)} \mathbf{e}, i \geq 0, r = \overline{0, \min\{i, R\}},$$

где

$$J^{(i,r)} = \begin{pmatrix} O & & \\ \bar{w} \sum_{n=0}^{r-1} a^{\min\{i, N\}-n} \tilde{M}^n \times \bar{w} a^{\min\{i, N\}-r} \tilde{M}^r & & \\ & I_{\bar{w} a^{\min\{i, N\}-r} \tilde{M}^r} & \\ O & & \\ \bar{w} \sum_{n=r+1}^{\min\{i, R\}} a^{\min\{i, N\}-n} \tilde{M}^n \times \bar{w} a^{\min\{i, N\}-r} \tilde{M}^r & & \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Дадим краткое пояснение формулы (11). Умножая вектор p_i на матрицу $J^{(i,r)}$, мы выделяем часть этого вектора, соответствующую r занятым резервным приборам. Суммируя все элементы этого вектора, получаем искомую вероятность $p_i(r)$;

- стационарное распределение числа занятых резервных приборов

$$q_r = \sum_{i=r}^{\infty} p_i(r), r = \overline{0, R};$$

- среднее число занятых резервных приборов

$$N_{\text{busy}}^{(\text{reserve})} = \sum_{r=1}^R r q_r;$$

- стационарное распределение числа занятых приборов, работающих без поддержки,

$$g_l = \sum_{i=0}^{\infty} p_i q_{\min\{i, N\}-l}, l = \overline{0, N};$$

- среднее число занятых приборов, работающих без поддержки,

$$N_{\text{busy}}^{(\text{non-support})} = \sum_{l=1}^N l g_l;$$

- вероятность потери произвольной заявки

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{r=1}^{\min\{i, R\}} J^{(i,r)} \right) \left(S_0^{(\min\{i, N\}, r)} \mathbf{e} + \tilde{S}_0^{(\min\{i, N\}, r)} \mathbf{e} \right)}{\lambda}. \quad (12)$$

В формуле (12) выражение $p_i J^{(i,r)} \cdot S_0^{(\min\{i, N\}, r)} \mathbf{e}$ есть интенсивность выходного потока заявок, обслуженных на основных приборах, работающих без поддержки резервных приборов, когда в системе находится i заявок и r занятых резервных приборов. Выражение $p_i J^{(i,r)} \cdot \tilde{S}_0^{(\min\{i, N\}, r)} \mathbf{e}$ есть интенсивность выходного потока заявок, обслуженных на основных приборах, работающих с поддержкой резервных приборов, когда в системе находится i заявок и r занятых резервных приборов. Тогда числитель дроби в (12) – это суммарная интенсивность выходного потока, в то время как знаменатель – интенсивность входного потока. Значит, вычитаемое в (12) есть вероятность того, что произвольная заявка не будет потеряна, а искомое значение P_{loss} вычисляется как дополнительная вероятность.

Численные примеры

Цель этого раздела – продемонстрировать выполнимость представленных алгоритмов, привести графики зависимости характеристик производительности системы от корреляции и интенсивности входного потока и пример численного решения задачи оптимизации. Для этого ниже представлены результаты двух численных экспериментов.

Эксперимент 1. В данном эксперименте исследуется влияние коэффициента корреляции во входном потоке на среднее число заявок в системе и вероятность потери заявок. Рассмотрим три потока МАР (markovian arrival process) с разными коэффициентами корреляции: $МАР^{(0)}$, $МАР^{(0,2)}$ и $МАР^{(0,4)}$.

$МАР^{(0)}$ является стационарным пуассоновским потоком. Он имеет коэффициент корреляции $c_{\text{corr}} = 0$. Задающие его матрицы вырождаются в скаляры: $D_0 = -1, 0$; $D = 1, 0$.

$МАР^{(0,2)}$ имеет коэффициент корреляции $c_{\text{corr}} = 0,2$ и задается матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -1,3526 & 0 \\ 0 & -0,04391 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1,3436 & 0,009 \\ 0,02446 & 0,01945 \end{pmatrix}.$$

$MAP^{(0,4)}$ имеет коэффициент корреляции $c_{\text{corr}} = 0,4$ и задается матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -3,39823 & 0 \\ 0,00101 & -0,11024 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3,36283 & 0,0354 \\ 0,01214 & 0,09709 \end{pmatrix}.$$

На основе этих MAP-потоков построим три ВМАР-потока: $MAP^{(0)}$, $MAP^{(0,2)}$ и $MAP^{(0,4)}$, каждый из которых определяется матрицами D_k , $k = 0, \dots, 4$. Матрица D_0 такая же, как матрица D_0 в соответствующем MAP-потоке, а остальные матрицы вычисляются как $D_k = \frac{Dq^{k-1}(1-q)}{(1-q^4)}$, $k = \overline{0, 4}$, где $q = 0,8$.

Время обслуживания на основном приборе, работающем без поддержки резервного прибора, имеет распределение Эрланга порядка 2 и задается вектором $\beta = (1 \ 0)$ и матрицей $S = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$.

Время обслуживания на основном приборе, работающем с поддержкой резервного прибора, имеет PH-распределение, которое задается вектором $\tilde{\beta} = (0,05 \ 0,95)$ и матрицей $\tilde{S} = \begin{pmatrix} -3,72 & 1,0 \\ 10,0 & -292,0 \end{pmatrix}$. Время до срабатывания таймера имеет гиперэкспоненциальное распределение, которое задается вектором $\tau = (0,4 \ 0,6)$ и матрицей $T = \begin{pmatrix} -5,971281 & 0,0 \\ 0,0 & -0,50718 \end{pmatrix}$.

Рассматриваемая система имеет $N = 5$ основных обслуживающих приборов, $R = 5$ резервных приборов, и с вероятностью $p = 0,5$ заявка покидает систему, если в момент срабатывания таймера нет свободных резервных приборов.

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости среднего числа заявок в системе от интенсивности входного потока для ВМАР с различными коэффициентами корреляции.

Как видно из рис. 1 и 2, с увеличением интенсивности входного потока ожидаемо возрастает среднее число L заявок в системе. Более интересно заметить тот факт, что при одинаковой интенсивности потока величина L существенно зависит от коэффициента корреляции – с увеличением последнего растет и среднее число заявок. Можно также заметить, что при приближении к точке $\lambda = 105$, после которой условие эргодичности нарушается, происходит повышение скорости возрастания данной характеристики.

Далее представим графики зависимости вероятности потерь P_{loss} от интенсивности входного потока для ВМАР с различными коэффициентами корреляции (рис. 3). При этом частично изменим приведенные ранее данные эксперимента, взяв $R \neq N$, а именно $N = 5$, $R = 1$. Такое изменение вызвано тем, что при любых N, R таких, что $N = R$, вероятность P_{loss} равна нулю.

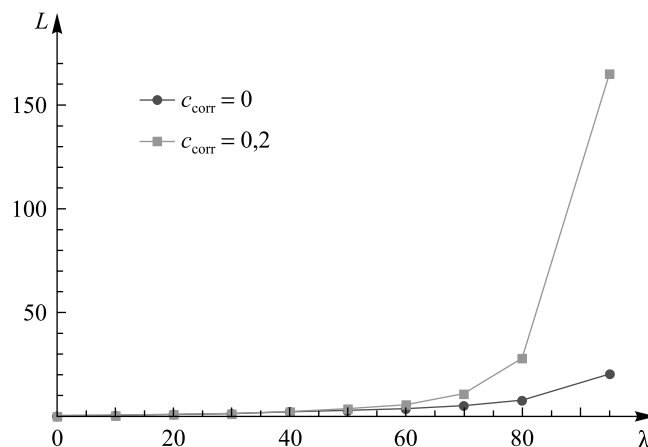


Рис. 1. Зависимость среднего числа L заявок в системе от λ при различных значениях c_{corr}

Fig. 1. Mean number of customers in the system, L ; as a function of λ for BMAPs at various values of coefficients of correlation c_{corr}

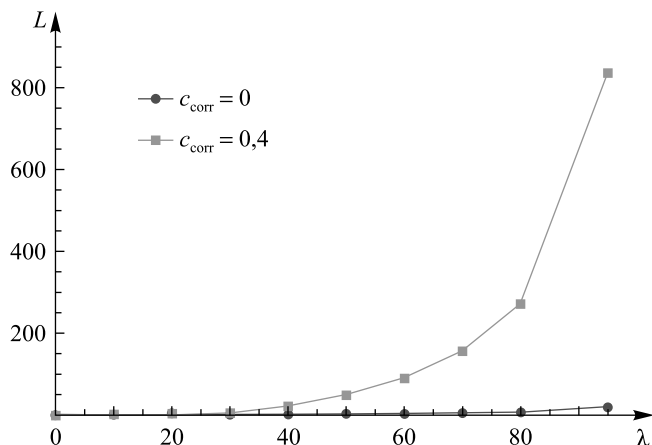


Рис. 2. Зависимость среднего числа L заявок в системе от λ при различных значениях c_{corr}

Fig. 2. Mean number of customers in the system, L , as a function of λ for BMAPs at various values of coefficients of correlation c_{corr}

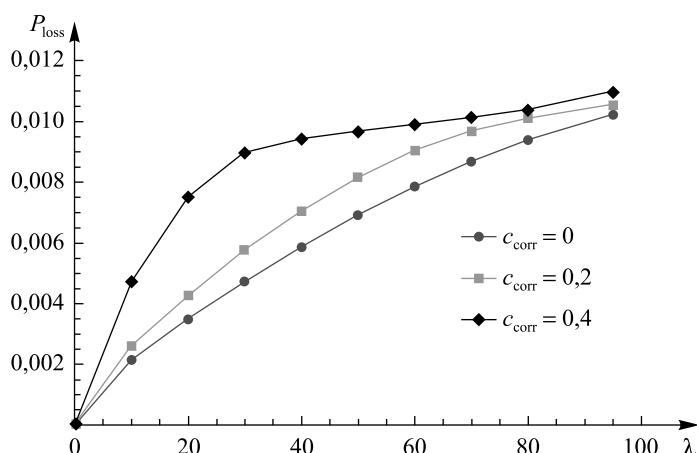


Рис. 3. Зависимость вероятности потерь P_{loss} от λ при различных значениях c_{corr}

Fig. 3. Loss probability P_{loss} as a function of λ for BMAP at various values of coefficients of correlation c_{corr}

Как видно из рис. 3, вероятность потери произвольной заявки зависит как от интенсивности входного потока, так и от коэффициента корреляции. Представленные графики показывают, что с увеличением коэффициента корреляции вероятность потерь также возрастает.

Результаты данного эксперимента свидетельствуют о том, что факт наличия корреляции во входном потоке нельзя игнорировать, иначе можно получить слишком оптимистические оценки характеристик производительности системы.

Эксперимент 2. В этом эксперименте решается задача численной оптимизации параметров системы: числа резервных приборов R и интенсивности таймера τ . Критерием качества служит стоимостный критерий – средний штраф в единицу времени

$$J = aL + cN_{\text{busy}}^{(\text{reserve})},$$

где a – штраф за пребывание одной заявки в системе в единицу времени; c – стоимость единицы времени использования резервного прибора.

Задача оптимизации состоит в нахождении величин R и τ , доставляющих минимум критерию J . Минимум ищется путем перебора значений R и с определенным шагом τ (отсчет τ ведется от точки, где начинает выполняться условие существования стационарного режима).

В данном случае положим $N = R = 5$ и $p = 0$. В качестве входного потока возьмем $BMAP^{(0,2)}$, нормализовав матрицы D_k , $k = 0, 4$, так, чтобы получить интенсивность $\lambda = 125$. Вид распределений

времен обслуживания и таймера такой же, как в эксперименте 1, но матрицы S и \tilde{S} нормализуются таким образом, чтобы получить интенсивности обслуживания $\mu = 10$ и $\tilde{\mu} = 60$. Для стоимостных коэффициентов полагаем $a = 1$ и $c = 200$.

Зависимость критерия качества J от R и τ изображена на рис. 4. Соответствующие значения приведены также в таблице.

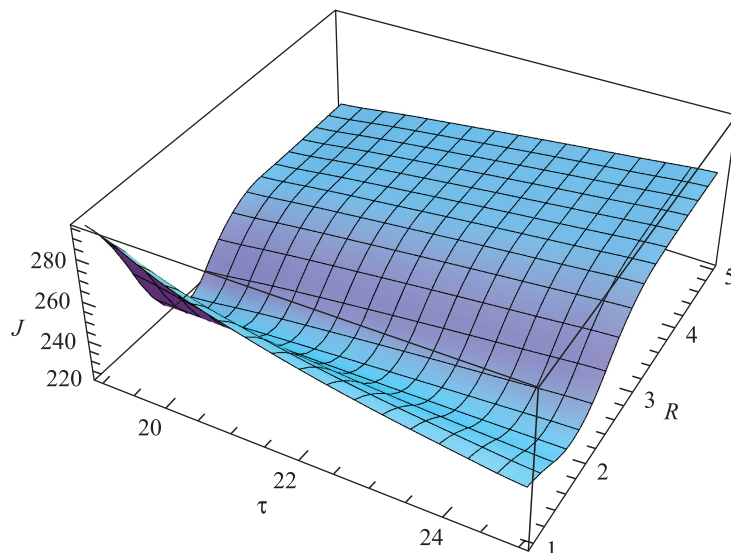


Рис. 4. Значения критерия J при различных величинах R и τ ($a = 1, c = 200$)

Fig. 4. The cost criterion J as a function of the number R of backup servers and the rate τ ($a = 1, c = 200$)

Значения критерия качества при различных величинах R и τ ($a = 1, c = 200$)

Dependence of the cost criterion on R and τ ($a = 1, c = 200$)

R	τ						
	19	20	21	22	23	24	25
1	294,80	280,78	270,25	262,08	255,60	250,35	246,05
2	224,19	226,31	228,32	230,24	232,08	233,84	235,52
3	244,11	247,24	250,23	253,07	255,79	258,39	260,87
4	249,26	252,77	256,12	259,33	262,40	265,35	268,17
5	249,80	253,37	256,79	260,06	263,20	266,21	269,10

Примечание. Полу жирным шрифтом выделено минимальное значение.

Заклучение

Рассмотрена модель многолинейной системы массового обслуживания, потенциально полезная для оптимизации работы реальных систем, где требуется удовлетворить противоречивые цели высокой производительности и низкого энергопотребления. В данной системе предполагается интенсификация процесса обслуживания, если последнее длится слишком долго, за счет подключения дополнительного ресурса (резервных приборов). Система исследована при довольно общих предположениях о процессе поступления заявок и процессе обслуживания. Получено нетривиальное условие эргодичности, найдены стационарное распределение вероятностей состояний системы и формулы для основных характеристик ее производительности, выполнены численные эксперименты по изучению поведения характеристик производительности системы в зависимости от интенсивности входного потока и от корреляции в этом потоке.

Эксперименты показали, что качество обслуживания в системе значительно зависит от корреляции во входном потоке. В частности, с увеличением корреляции растет и вероятность потерь. Это означает, что наличие корреляции должно быть учтено при проектировании и оценке производительности реальных систем. Также в статье численно решается задача оптимизации по нахождению числа резервных приборов и параметра таймера, которые доставляют минимум экономическому критерию качества функционирования системы.

Полученные результаты могут использоваться для поддержки экспертных решений при проектировании и оценке производительности реальных систем в целях уменьшения энергозатрат при сохранении их высокой производительности.

Библиографические ссылки

1. Klimenok V, Savko R. A retrial tandem queue with two types of customers and reservation of channels. In: Dudin A, Klime-nok V, Tsarenkov G, Dudin S, editors. *Modern probabilistic methods for analysis of telecommunication networks. Proceedings on the Belarusian winter workshops in queueing theory. BWWQT-2013; 2013 January 28–31; Minsk, Belarus*. Berlin: Springer; 2013. p. 105–114. (Communications in Computer and Information Science; volume 356). DOI: 10.1007/978-3-642-35980-4_12.
2. Kim CS, Klimenok V, Taramin O. A tandem retrial queueing system with two Markovian flows and reservation of channels. *Computers and Operations Research*. 2010;37(7):1238–1246. DOI: 10.1016/j.cor.2009.03.030.
3. Arnon S, Barry J, Karagiannidis G, Schober R, Uysal M, editors. *Advanced optical wireless communication systems*. Cambridge: Cambridge University Press; 2012.
4. Vishnevsky V, Kozyrev D, Semenova OV. Redundant queueing system with unreliable servers. In: *Proceedings of the 6th International congress on ultra modern telecommunications and control systems and workshops (ICUMT); 2014 October 6–8; Saint Petersburg, Russia*. [S. l.]: IEEE; 2014. p. 383–386. DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002116.
5. Vishnevsky VM, Semenova OV, Sharov SYu. Modeling and analysis of a hybrid communication channel based on free-space optical and radio-frequency technologies. *Automation and Remote Control*. 2013;74(3):521–528. DOI: 10.1134/S0005117913030144.
6. Шаров СЮ, Семёнова ОВ. Имитационная модель беспроводного канала связи на основе лазерной и радиотехнологий. В: *Distributed computer and communication networks. Theory and applications (DCCN-2010). Proceedings of the 14th International Conference; 26–28 октября 2010 г.; Москва, Россия*. Москва: Информационные и сетевые технологии; 2010. с. 368–374.
7. Klimenok V, Dudin A, Vishnevsky V, Shumchenya V, Krishnamoorthy A. Performance measures and optimization of queueing system with reserve server. In: Vishnevskiy V, Samouylov K, Kozyrev D, editors. *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN-2016. 19th International Conference; 2016 November 21–25; Moscow, Russia*. Cham: Springer; 2017. p. 74–88. (Communications in Computer and Information Science; volume 678). DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_8.
8. Lucantoni DM. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stochastic Models*. 1991;7(1):1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174.
9. Neuts MF. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press; 1981. 332 p.
10. Klimenok VI, Dudin AN. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory. *Queueing Systems*. 2006;54(4):245–259. DOI: 10.1007/s11134-006-0300-z.
11. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1967. 576 с.
12. Kemeni JG, Snell JL, Knapp AW. *Denumerable Markov chains*. New York: Springer-Verlag; 1976. 484 p. (Graduate texts in mathematics; volume 40). DOI: 10.1007/978-1-4684-9455-6.

References

1. Klimenok V, Savko R. A retrial tandem queue with two types of customers and reservation of channels. In: Dudin A, Klime-nok V, Tsarenkov G, Dudin S, editors. *Modern probabilistic methods for analysis of telecommunication networks. Proceedings on the Belarusian winter workshops in queueing theory. BWWQT-2013; 2013 January 28–31; Minsk, Belarus*. Berlin: Springer; 2013. p. 105–114. (Communications in Computer and Information Science; volume 356). DOI: 10.1007/978-3-642-35980-4_12.
2. Kim CS, Klimenok V, Taramin O. A tandem retrial queueing system with two Markovian flows and reservation of channels. *Computers and Operations Research*. 2010;37(7):1238–1246. DOI: 10.1016/j.cor.2009.03.030.
3. Arnon S, Barry J, Karagiannidis G, Schober R, Uysal M, editors. *Advanced optical wireless communication systems*. Cambridge: Cambridge University Press; 2012.
4. Vishnevsky V, Kozyrev D, Semenova OV. Redundant queueing system with unreliable servers. In: *Proceedings of the 6th International congress on ultra modern telecommunications and control systems and workshops (ICUMT); 2014 October 6–8; Saint Petersburg, Russia*. [S. l.]: IEEE; 2014. p. 383–386. DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002116.
5. Vishnevsky VM, Semenova OV, Sharov SYu. Modeling and analysis of a hybrid communication channel based on free-space optical and radio-frequency technologies. *Automation and Remote Control*. 2013;74(3):521–528. DOI: 10.1134/S0005117913030144.
6. Sharov SYu, Semenova OV. [Simulation model of wireless channel based on FSO and RF technologies]. In: *Distributed computer and communication networks. Theory and applications (DCCN-2010). Proceedings of the 14th International Conference; 2010 October 26–28; Moscow, Russia*. Moscow: Informatsionnye i setevye tekhnologii; 2010. p. 368–374. Russian.
7. Klimenok V, Dudin A, Vishnevsky V, Shumchenya V, Krishnamoorthy A. Performance measures and optimization of queueing system with reserve server. In: Vishnevskiy V, Samouylov K, Kozyrev D, editors. *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN-2016. 19th International Conference; 2016 November 21–25; Moscow, Russia*. Cham: Springer; 2017. p. 74–88. (Communications in Computer and Information Science; volume 678). DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_8.
8. Lucantoni DM. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stochastic Models*. 1991;7(1):1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174.
9. Neuts MF. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press; 1981. 332 p.
10. Klimenok VI, Dudin AN. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory. *Queueing Systems*. 2006;54(4):245–259. DOI: 10.1007/s11134-006-0300-z.
11. Gantmakher FR. *Teoriya matrits*. Moscow: Nauka; 1967. 576 p. Russian.
12. Kemeni JG, Snell JL, Knapp AW. *Denumerable Markov chains*. New York: Springer-Verlag; 1976. 484 p. (Graduate texts in mathematics; volume 40). DOI: 10.1007/978-1-4684-9455-6.