Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019;3:134–138
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2019;3:134–138

УДК 519.854

SEMIONLINE-ВЕРСИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С ДВУМЯ ГРУППАМИ ПРЕДМЕТОВ

В. М. КОТОВ[1], **Н. С. БОГДАНОВА**[2]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь*

Предложен метод упаковки для задачи *semionline* с двумя группами предметов. Алгоритмом решения этой задачи является распределение предметов из первой группы с использованием групповой технологии, после чего применяется LS-алгоритм для назначения предметов из второй группы. Чтобы доказать оценку алгоритма, введены разные типы упаковок. В соответствии с весами предметов определены классы предметов. Предложен алгоритм распределения предметов из первой группы для получения необходимых упаковок. На втором этапе применяется алгоритм «в минимально загруженный» с наихудшей оценкой $\frac{17}{9}$.

Ключевые слова: метод упаковки; *semionline*; разбиение; планирование; наихудшая оценка.

BUNCH TECHNIQUE FOR *SEMIONLINE* WITH TWO GROUPS OF ITEMS

V. M. KOTOV[a], ***N. S. BOGDANOVA***[b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Sukhoi State Technical University of Gomel, 48 Kastryčnika Avenue, Gomel 246746, Belarus*
Corresponding author: V. M. Kotov (kotovvm@bsu.by)

Bunch technique for *semionline* with two groups of items is proposed in this paper. Algorithm to solve this problem is to distribute items from the first group bunch approach and after that apply LS-algorithm to assign items from the second group. In order to prove the estimation of our algorithm is introduced different types of bunches to distribute all items from the first group such a way that only one of the entered types of bunches are obtained. During the second stage we use LS with worst case performance is at most $\frac{17}{9}$.

Keywords: bunch technique; *semionline*; partition; scheduling; worst case performance.

Образец цитирования:
Котов ВМ, Богданова НС. *Semionline*-версия задачи теории расписаний с двумя группами предметов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:134–138.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-134-138

For citation:
Kotov VM, Bogdanova NS. Bunch technique for *semionline* with two groups of items. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;3:134–138. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-134-138

Авторы:
Владимир Михайлович Котов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики.
Наталья Сергеевна Богданова – старший преподаватель кафедры информатики факультета автоматизированных и информационных систем.

Authors:
Vladimir M. Kotov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of discrete mathematics and algorithms, faculty of applied mathematics and computer science.
kotovvm@bsu.by
Natallia S. Bogdanova, senior lecturer at the department of computer science, faculty of automation and information systems.
bogdanova@gstu.by

Задачи разбиения *online* часто находят реальное применение и тем самым имеют огромное практическое значение. В основном возникают не чисто *online*-задачи, а с доступной некоторой дополнительной информацией о последующих значениях или с дополнительными алгоритмическими возможностями, что позволяет улучшить эффективность алгоритма их решения. Такие задачи являются задачами *semionline* [1–5]. Таким образом, весьма актуально исследование указанных задач и их решений.

Рассмотрим задачу *semionline* с двумя группами предметов. Веса предметов первой группы известны заранее, а предметы второй группы недоступны до тех пор, пока не будут назначены предметы в первой группе. Как только предмет назначается на один из m компьютеров, он больше не может перемещаться. Предметы из второй группы появляются в порядке невозрастания их веса. Цель задачи – минимизировать суммарную загрузку самого загруженного компьютера.

Наиболее естественным алгоритмом для решения рассматриваемой задачи является распределение предметов из первой группы с использованием LPT-алгоритма [1] и с последующим применением LS-алгоритма для назначения предметов из второй группы [3; 4]. Нетрудно понять, что наихудшей оценкой этого алгоритма будет величина $2-\frac{1}{m}$, т. е. оценка для версии *online* [4; 5]. В данной работе предлагается алгоритм с наихудшей оценкой $\frac{17}{9}$.

Пусть $L=\frac{w_1+w_2+\ldots+w_n}{m}$, где w_i – веса предметов первой группы, $i=\overline{1,n}$. Легко видеть, что L – нижняя граница оптимального решения.

Для требуемого распределения по компьютерам введем различные типы упаковок.

Первый тип упаковок $BU2$ состоит из двух компьютеров ($A1$, $A2$), причем $A1$ имеет общий вес не более $\frac{16L}{9}$, а $A2$ – не более $\frac{8L}{9}$. Кроме того, общий вес упаковки составляет не менее $2L$.

Далее через $W(A)$ будем обозначать общий вес предметов, назначенных на компьютер A.

Лемма 1. *Если есть распределение предметов из первой группы таким образом, что получаются только упаковки типа $BU2$, то наихудшая оценка LS составляет не более* $\frac{17}{9}$.

Доказательство. Пусть X – вес текущего предмета и $W(A2)\le\frac{8L}{9}$. Легко видеть, что $\frac{W(A2)+X}{\max\{X,L\}}\le$ $\le\frac{17}{9}$. Поэтому можно добавить текущий предмет на компьютер $A2$, обеспечив нужную точность.

Добавим текущие предметы на $A2$ в каждой из $BU2$. Это означает, что общий вес добавленных предметов составит не менее kX, где k – количество упаковок данного типа. Поэтому общий вес имеющихся предметов не меньше $kX+mL$. Следовательно, если $k\ge\frac{m}{2}$, то новая нижняя оценка будет как минимум $L+\frac{X}{2}$.

После этого выполняется неравенство $\frac{W(A1)+X}{\max\left\{X,L+\frac{X}{2}\right\}}\le\frac{17}{9}$. Действительно,

$$\frac{W(A1)+X}{\max\left\{X,L+\frac{X}{2}\right\}}\le\frac{\frac{16L}{9}+\frac{8X}{9}+\frac{X}{9}}{\max\left\{X,L+\frac{X}{2}\right\}}\le\frac{16}{9}+\frac{1}{9}=\frac{17}{9}.$$

Лемма 1 доказана.

Второй тип упаковок $BU3$ состоит из трех компьютеров ($B1$, $B2$, $B3$), причем $W(B1)\le\frac{17L}{9}$, $W(B2)\le$ $\le\frac{4L}{3}$ и $W(B3)\le\frac{8L}{9}$. Кроме того, общий вес упаковки не менее $3L$.

Лемма 2. *Если есть распределение предметов из первой группы таким образом, что получаются только упаковки типа $BU3$, то наихудшая оценка LS составляет не более* $\frac{17}{9}$.

Доказательство. Пусть X – вес текущего предмета. Очевидно, что этот предмет можно добавить на $B3$ в силу $\frac{W(B3)+X}{\max\{X, L\}} \le \frac{17}{9}$. Добавим текущие предметы на $B3$ в каждой из $BU3$. Это означает, что общий вес добавленных предметов составит не менее kX, где k – количество упаковок данного типа. Поэтому общий вес всех имеющихся предметов не меньше $kX + mL$. Следовательно, если $k \ge \frac{m}{3}$, то новая нижняя оценка будет как минимум $L + \frac{X}{3}$.

Докажем, что после этого выполняется соотношение $\frac{W(B2)+X}{\max\left\{X, L + \frac{X}{3}\right\}} \le \frac{17}{9}$. Действительно,

$$\frac{W(B2)+X}{\max\left\{X, L + \frac{X}{3}\right\}} \le \frac{\frac{4L}{3} + \frac{4X}{9} + \frac{5X}{9}}{\max\left\{X, L + \frac{X}{3}\right\}} \le \frac{4}{3} + \frac{5}{9} = \frac{17}{9}.$$

Добавим текущие предметы на $B2$ в каждой из $BU3$. Это означает, что общий вес имеющихся предметов не меньше $2kX + mL$, где k – количество упаковок. Следовательно, если $k \ge \frac{m}{3}$, то новая нижняя оценка будет как минимум $L + \frac{2X}{3}$.

Докажем, что после этого выполняется неравенство $\frac{W(B1)+X}{\max\left\{X, L + \frac{2X}{3}\right\}} \le \frac{17}{9}$. Действительно,

$$\frac{W(B1)+X}{\max\left\{X, L + \frac{2X}{3}\right\}} = \frac{\frac{17L}{9} + \frac{34X}{27} - \frac{7X}{27}}{\max\left\{X, L + \frac{2X}{3}\right\}} \le \frac{17}{9}.$$

Лемма 2 доказана.

Третий тип упаковок $BU4$ состоит из четырех компьютеров ($C1$, $C2$, $C3$, $C4$), причем $W(C1) \le \frac{17L}{9}$, $W(C2) \le \frac{16L}{9}$, $W(C3) \le \frac{10L}{9}$ и $W(C4) \le \frac{8L}{9}$. Кроме того, общий вес упаковки составляет не менее $4L$.

Лемма 3. *Если есть распределение предметов из первой группы таким образом, что получаются только упаковки* $BU4$, *то наихудшая оценка LS составляет не более* $\frac{17}{9}$.

Доказательство аналогично доказательству лемм 1 и 2.

Теорема 1. *Если все предметы первой группы распределены таким образом, что образованы* k_1 *упаковок первого типа,* k_2 *упаковок второго типа и* k_3 *упаковок третьего типа, причем* $2k_1 + 3k_2 + 4k_3 = m$, *то наихудшая оценка LS составляет не более* $\frac{17}{9}$.

Доказательство. Сначала текущие предметы могут добавляться на компьютеры вида $A2$, $B3$ и $C4$, количество которых не меньше чем $\frac{m}{4}$. Затем текущие предметы могут добавляться на компьютеры вида $C3$. Общее количество $A2$, $B3$, $C3$ и $C4$ не меньше чем $\frac{m}{3}$. Поэтому новые текущие предметы можно добавлять на $B2$. Общее количество компьютеров вида $A2$, $B2$, $B3$, $C3$ и $C4$ не меньше чем $\frac{m}{2}$, поэтому следующие текущие предметы можно добавлять на $A1$ и $C2$, затем на $B1$ и $C1$.

Теорема 1 доказана.

Теперь покажем, как можно распределить предметы из первой группы, чтобы получить необходимые упаковки. В соответствии с весами предметов введем следующие *классы предметов*:

• $I1$ – предметы с $\frac{2L}{3} < X \le \frac{8L}{9}$;

• $I2$ – предметы с $0{,}6L < X \le \frac{4L}{3}$;

• $I3$ – предметы с $0{,}5L < X \le 0{,}6L$;

• $I4$ – предметы с $\frac{4L}{9} < X \le 0{,}5L$;

• $I5$ – предметы с $X \le \frac{4L}{9}$.

Пусть H является классом предметов с весом больше $\frac{8L}{9}$.

Следствие. *Для достаточного количества элементов из каждого класса $I1$, $I2$, $I3$, $I4$, $I5$ можно составить базовую упаковку одного из типов $BU2 - BU4$:*

• *для 3 предметов из $I1$ упаковка $BU2$ имеет вид* $A1 = \{a1, a2\}$*;* $A2 = \{a3\}$*;*

• *для 5 предметов из $I2$ упаковка $BU3$ имеет вид* $B1 = \{a1, a2\}$*;* $B2 = \{a3, a4\}$*;* $B3 = \{a5\}$*;*

• *для 6 предметов из $I3$ упаковка $BU3$ имеет вид* $B1 = \{a1, a2, a3\}$*;* $B2 = \{a4, a5\}$*;* $B3 = \{a6\}$*;*

• *для 9 предметов из $I4$ упаковка $BU4$ имеет вид* $C1 = \{a1, a2, a3\}$*;* $C2 = \{a4, a5, a6\}$*;* $C3 = \{a7, a8\}$*;* $C4 = \{a9\}$.

Легко заметить, что из имеющихся предметов класса $I5$ можно составить упаковку $BU3$ следующим образом. Будем помещать предметы в $B1$ и $B2$ пока позволяют ограничения, а 2 предмета, которые не поместились ни в $B1$ и ни в $B2$, поместим в $B3$.

Пусть теперь $|H| > 0$. Следует отметить, что в H могут быть предметы, вес которых превосходит L. В этом случае каждый из них назначается на отдельный компьютер. Для предметов из H, вес которых не превосходит L, упаковки требуемого типа следующие:

• упаковка $BU2$ имеет вид $A1 = \{h, i\_1 \text{ или } i\_2 \text{ или } i\_3\}$, $A2 = \{i\_1 \text{ или } i\_2 \text{ или } i\_3\}$ при $W(i\_3) \ge \frac{5}{9}$;

• упаковка $BU4$ имеет вид $C1 = \{h, i\_3 \text{ или } i\_4\}$, $C2 = \{h, i\_3 \text{ или } i\_4\}$, $C3 = \{i\_3 \text{ или } i\_4, i\_3 \text{ или } i\_4\}$, $C4 = \{i\_3 \text{ или } i\_4\}$ при $W(i\_3) < \frac{5}{9}$, $W(h) > \frac{8}{9}$;

• упаковка $BU3$ строится для предметов из $I4$ и имеет вид $B1 = \{h, \text{ предметы } i\_5\}$, $B2 = \{h, \text{ предметы } i\_5\}$, $B3 = \{2 \text{ предмета } i\_5\}$.

(Здесь i_j соответствует предмету из класса Ij, $j = 1, 2, \ldots, 5$.) При этом на пустые компьютеры сначала назначаются все предметы из H.

В случае $|H| > m$ нижняя граница оптимального решения может быть уточнена, так как на один компьютер будет назначено минимум 2 предмета из класса H.

Если оказалось, что для предметов из классов $I1$, $I2$, $I3$, $I4$, $I5$ нет пустых компьютеров для формирования компьютера вида $A2$ в упаковке $BU2$, компьютера вида $B3$ в упаковке $BU3$ или компьютеров вида $C3$, $C4$ в упаковке $BU4$, то это означает, что на оставшиеся компьютеры (не входящие в требуемые упаковки) уже назначены предметы из H.

Если еще остались не назначенные предметы из классов $I1$, $I2$, $I3$, $I4$, то нижняя граница оптимального решения может быть уточнена, а все оставшиеся предметы из $I1$, $I2$, $I3$, $I4$ назначены по одному к предмету из класса H. Если остались предметы из класса $I5$, то они будут назначаться на компьютер с предметом из H до тех пор, пока суммарная загрузка компьютера не превосходит $\frac{4L}{3}$. В силу определения величины L все предметы первой группы будут распределены.

После распределения всех предметов из первой группы на втором этапе будет выполняться алгоритм «в минимально загруженный». При этом новая нижняя граница оптимального решения $L1$ пересчитается по следующему правилу.

Пусть $k_1 = |H|$, k_2 соответствует количеству предметов, поступивших из второй группы, $k_3 = m - k_1 - k_2$. Кроме того, пусть $Z1$ соответствует весу максимального предмета из первой группы, $X1$ – весу первого поступившего предмета из второй группы. Отсортируем предметы из первой группы в порядке невозрастания весов, и пусть $Z2$ соответствует весу предмета на позиции $2k_3 + 1$ (если предметов меньше, то полагаем $Z2 = 0$).

Утверждение. Если поступил предмет из второй группы, вес которого не больше $\frac{8L}{9}$, то алгоритм «в минимально загруженный» обеспечивает оценку $\frac{17}{9}$.

Доказательство очевидно, так как всегда существует компьютер, суммарная загрузка которого не превосходит величины нижней границы оптимального решения.

Поэтому в дальнейшем будем полагать, что для любого предмета из второй группы его вес не меньше $\frac{8L}{9}$.

Лемма 4. *В качестве новой границы оптимального решения* $L1$ *будем выбирать максимальное значение из трех величин:* S, $Z1$ *или* $\min\left\{\frac{8L}{9} + Z2, 3 \cdot Z2\right\}$ *в случае* $k_3 > 0$*;* S, $Z1$ *или* $\frac{8L}{9} + Z2$ *в случае* $k_3 = 0$. *Здесь* mS *соответствует сумме весов всех имеющихся предметов из первой и второй групп. Кроме того, в качестве* $L1$ *можно полагать* $Z3 + Z4$*, где* $Z3$ *и* $Z4$ *соответствуют значениям весов, стоящих на позициях* m *и* $m + 1$ *в отсортированном по невозрастанию массиве весов всех имеющихся предметов (первой группы и поступивших из второй группы).*

Доказательство следует из того факта, что при $k_3 > 0$ либо 3 предмета с весом как минимум $Z2$ должны назначаться на один компьютер в оптимальном решении, либо один из них должен назначаться с предметом из H или с поступившим предметом второй группы. Если $k_3 = 0$, то предмет с весом $Z2$ должен назначаться с предметом из H или с поступившим предметом второй группы. Кроме того, два предмета из $m + 1$ предметов с наибольшим весом должны назначаться на один компьютер в оптимальном решении.

Теорема 2. *Наихудшая оценка алгоритма* $\frac{17}{9}$.

Доказательство следует из лемм 1–4, следствия и утверждения.

Библиографические ссылки / References

1. Kellerer H, Kotov V, Speranza MG, Tuza Z. Semi on-line algorithms for the partition problem. *Operations Research Letters*. 1997;21(5):235–242. DOI: 10.1016/ S0167-6377(98)00005-4.

2. Albers S, Hellwig M. Semi-online scheduling revisited. *Theoretical Computer Science*. 2012;443:1–9. DOI: 10.1016/jagm. 2012.03.031.

3. He Y, Zhang G. Semi on-line scheduling on two identical machines. Computing. 1999;62(3):179–187. DOI: 10.1007/s006070050020.

4. Gabay M, Kotov V, Brauner N. Semi-online bin stretching with bunch techniques. *Theoretical Computer Science*. 2015;602: 103–113. DOI: 10.1016/j.tcs.2015.07.065.

5. Kellerer H, Kotov V, Gabay M. An efficient algorithm for semi-online multiprocessor scheduling with given total processing time. *Journal of Scheduling*. 2015;18(6):623–630. DOI: 10.1007/s10951-015-0430-4.

Статья поступила в редколлегию 24.10.2019.
Received by editorial board 24.10.2019.