УДК 513.88

ФОРМУЛЫ t-ЭНТРОПИИ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ КЛАССОВ ТРАНСФЕР-ОПЕРАТОРОВ

К. БАРДАДИН [1], Б. К. КВАСЬНЕВСКИЙ [1], К. С. КУРНОСЕНКО [2], А. В. ЛЕБЕДЕВ [2]

[1]Университет Белостока, ул. К. Циолковского, 1М, 15-245, г. Белосток, Польша
[2]Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

t-Энтропия является принципиальным объектом спектральной теории операторов, порожденных динамическими системами (операторов взвешенного сдвига и трансфер-операторов). По существу она представляет собой преобразование Фенхеля – Лежандра от спектрального потенциала оператора, и получение явных формул для ее вычисления – нетривиальная задача. В работе такие формулы получены для t-энтропии двух наиболее часто используемых в приложениях классов трансфер-операторов: порожденных обратимыми отображениями (т. е. операторов взвешенного сдвига) и порожденных локальными гомеоморфизмами (т. е. операторов Перрона – Фробениуса). В первом случае t-энтропия вычисляется с помощью интегралов по инвариантным мерам, во втором – с использованием интегралов по инвариантным мерам и энтропии Колмогорова – Синая.

Ключевые слова: трансфер-оператор; спектральный потенциал; t-энтропия; инвариантная мера; метрическая энтропия.

Образец цитирования:
Бардадин К, Квасьневский БК, Курносенко КС, Лебедев АВ. Формулы t-энтропии для конкретных классов трансфер-операторов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:122–128.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-122-128

For citation:
Bardadyn K, Kwasniewski BK, Kurnosenko KS, Lebedev AV. t-Entropy formulae for concrete classes of transfer operators. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;3:122–128. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-122-128

Авторы:
Кшыштоф Бардадин – ассистент кафедры анализа математического факультета.
Бартош Косма Квасьневский – доктор математических наук; заведующий кафедрой анализа математического факультета.
Кирилл Сергеевич Курносенко – аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – А. В. Лебедев.
Андрей Владимирович Лебедев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета.

Authors:
Krzysztof Bardadyn, assistant at the department of analysis, faculty of mathematics.
kbardadyn@math.uwb.edu.pl
Bartosz Kosma Kwasniewski, doctor of science (mathematics); head of the department of analysis, faculty of mathematics.
bartoszk@math.uwb.edu.pl
Kirill S. Kurnosenko, postgraduate student at the department of functional analysis and analytic economy, faculty of mechanics and mathematics.
kurn.ne@gmail.com
Andrei V. Lebedev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of functional analysis and analytic economy, faculty of mechanics and mathematics.
lebedev@bsu.by

t-ENTROPY FORMULAE FOR CONCRETE CLASSES OF TRANSFER OPERATORS

K. BARDADYN[a]***, B. K. KWASNIEWSKI***[a]***,***
K. S. KURNOSENKO[b]***, A. V. LEBEDEV***[b]

[a]*University of Bialystok, 1M K. Ciolkowskiego Street, Bialystok 15-245, Poland*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: A. V. Lebedev (lebedev@bsu.by)

t-Entropy is a principal object of the spectral theory of operators, generated by dynamical systems, namely, weighted shift operators and transfer operators. In essence *t*-entropy is the Fenchel – Legendre transform of the spectral potential of an operator in question and derivation of explicit formulae for its calculation is a rather nontrivial problem. In the article explicit formulae for *t*-entropy for two the most exploited in applications classes of transfer operators are obtained. Namely, we consider transfer operators generated by reversible mappings (i. e. weighted shift operators) and transfer operators generated by local homeomorphisms (i. e. Perron – Frobenius operators). In the first case *t*-entropy is computed by means of integrals with respect to invariant measures, while in the second case it is computed in terms of integrals with respect to invariant measures and Kolmogorov – Sinai entropy.

Keywords: transfer operator; spectral potential; *t*-entropy; invariant measure; metric entropy.

Введение

В данной работе получены явные формулы для основных компонент вариационных принципов, используемых при вычислении спектральных потенциалов двух конкретных типов трансфер-операторов.

Пусть (X, α) – динамическая система, где X – компактное пространство; $\alpha : X \to X$ – непрерывное отображение.

Линейный оператор $A : C(X) \to C(X)$ называется *трансфер-оператором* для (X, α), если он:

а) является положительным оператором (отображает неотрицательные функции в неотрицательные функции);

б) удовлетворяет *гомологическому тождеству*

$$A(f \circ \alpha \cdot g) = fAg, \quad f, g \in C(X).$$

По заданному трансфер-оператору A определим семейство операторов $A_\varphi : C(X) \to C(X)$, зависящих от функционального параметра $\varphi \in C(X)$, с помощью формулы

$$A_\varphi f := A\left(e^\varphi f\right).$$

Операторы такого типа являются принципиальными объектами спектральной теории динамических систем, эллиптической теории функционально-дифференциальных уравнений и т. д.

Обозначим через $\lambda(\varphi)$ логарифм спектрального радиуса оператора A_φ. Обычно $\lambda(\varphi)$ называют *спектральным потенциалом* трансфер-оператора A. В соответствии с формулой Гельфанда имеем

$$\lambda(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| A_\varphi^n \right\|. \tag{1}$$

Положительность оператора A_φ^n означает, что

$$\lambda(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| A_\varphi^n 1 \right\|, \tag{2}$$

где 1 – единичная функция на X; норма $\|f\|$ – равномерная норма функции $f \in C(X)$: $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

Непосредственно из гомологического тождества вытекает равенство

$$A_\varphi^n f = A^n\left(e^{S_n \varphi} f\right), \tag{3}$$

где

$$S_n \varphi := \varphi + \varphi \circ \alpha + \ldots + \varphi \circ \alpha^{n-1}. \tag{4}$$

Известен вариационный принцип для вычисления $\lambda(\varphi)$ [1]:

$$\lambda(\varphi) = \max_{\mu \in M_\alpha}\left(\mu(\varphi) + \tau(\mu)\right), \tag{5}$$

где M_α – множество α-инвариантных вероятностных мер; $\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu$; $\tau(\mu)$ – t-энтропия (довольно сложно вычисляемый динамический инвариант). Конкретнее для определения $\tau(\mu)$ нужно выполнить следующие три шага [2]:

1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого разбиения единицы G, т. е. набора $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ неотрицательных функций $g_i \in C(X)$, удовлетворяющих тождеству $g_1 + \ldots + g_k \equiv 1$, вводится число

$$\tau_n(\mu, G) := \sum_{g_i \in G} \mu(g_i) \ln \frac{\mu(A^n g_i)}{\mu(g_i)},$$

здесь полагается $\ln(0) := -\infty$, а если $\mu(g_i) = 0$, то соответствующее слагаемое приравнивается к 0 независимо от значения $\mu(A^n g_i)$;

2) полагается

$$\tau_n(\mu) := \inf_G \tau_n(\mu, G),$$

где инфимум берется по всем разбиениям единицы G в $C(X)$;

3) окончательно t-энтропия $\tau(\mu)$ определяется как

$$\tau(\mu) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\tau_n(\mu)}{n}.$$

В настоящей работе получены явные формулы t-энтропии для двух конкретных классов трансфер-операторов.

Отметим также, что связь процедуры вычисления t-энтропии и дивергенции Кульбака – Лейблера обсуждается в работе [3].

Трансфер-операторы и положительные функционалы

Для начала дадим более явное описание трансфер-операторов, связав их со специальным семейством положительных функционалов.

Для каждой точки $x \in X$ определим функционал φ_x по формуле

$$\varphi_x(f) := [Af](x), \ f \in C(X). \tag{6}$$

Очевидно, φ_x – положительный функционал.

Для точки x возможны две ситуации:

1) $[A1](x) = 0$. Это значит, что $\varphi_x(1) = 0$, следовательно, $\varphi_x = 0$, так как φ_x есть положительный функционал;

2) $[A1](x) \neq 0$. В этом случае $\varphi_x \neq 0$ и φ_x определяет некоторую меру ν_x на X.

Гомологическое тождество означает также, что для любой функции $f \in C(X)$ справедливо

$$[A(f \circ \alpha)](x) = [A(f \circ \alpha \cdot 1)](x) = f(x) \cdot A1(x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{A1(x)} \varphi_x(f \circ \alpha) = f(x),$$

и, значит,

$$\operatorname{supp} \nu_x \subset \alpha^{-1}(x). \tag{7}$$

Ясно, что отображение $x \to \varphi_x$ является *-слабо непрерывным.

Отметим также, что если $x \notin \alpha(X)$, то $A1(x) = 0$. В самом деле если $A1(x) \neq 0$, то можно выбрать функцию $f \in C(X)$ такую, что $f\big|_{\alpha(X)} = 0$ и $f(x) = 1$. Тогда

$$0 = \frac{1}{A1(x)}\big[A(f \circ \alpha)\big](x) = f(x) = 1,$$

что приводит к противоречию.

Рассмотренные выше объекты дают полное описание трансфер-операторов, так как, очевидно, любое *-слабо непрерывное отображение $x \to \varphi_x$, где φ_x – положительные функционалы такие, что справедливо:

• $\varphi_x = 0$, когда $x \notin \alpha(X)$;

• φ_x удовлетворяет соотношению (7), когда $x \in \alpha(X)$ (здесь может быть также $\varphi_x = 0$),

задает трансфер-оператор, действующий по формуле (6).

Замечание. Из данного описания трансфер-операторов вытекают два наблюдения:

1) если $\alpha : X \to X$ является гомеоморфизмом, то трансфер-оператор имеет вид

$$Af(x) = \rho(x) f\big(\alpha^{-1}(x)\big),$$

где $\rho \in C(X)$ – некоторая неотрицательная функция. Иными словами, трансфер-оператор есть оператор взвешенного сдвига;

2) если $\alpha : X \to X$ – локальный гомеоморфизм (в этом случае прообраз каждой точки x содержит конечное число точек), то трансфер-оператор имеет вид

$$Af(x) = \sum_{y \in \alpha^{-1}(x)} \rho(y) f(y),$$

где $\rho \in C(X)$ – некоторая неотрицательная функция. В этом случае трансфер-оператор является оператором Перрона – Фробениуса.

Именно для таких двух типов трансфер-операторов будут получены основные результаты в данной работе.

Спектральный потенциал, *t*-энтропия и преобразование Фенхеля – Лежандра

Отметим еще одно наблюдение, которое будем использовать в дальнейшем.

В [1, предложения 8.4, 8.6] доказано, что $\tau(\mu)$ является вогнутой и полунепрерывной сверху в *-слабой топологии функцией от μ. Поэтому формула (5) означает, что спектральный потенциал $\lambda(\varphi)$ (2) есть не что иное, как преобразование Фенхеля – Лежандра от $-\tau(\mu)$. Более того, в силу двойственности Фенхеля – Лежандра – Моро из полунепрерывности сверху $\tau(\mu)$ следует, что $-\tau(\mu) = \lambda^*$ (здесь через λ^* обозначен двойственный к $\lambda(\cdot)$ по Фенхелю – Лежандру функционал), т. е. $\tau(\mu)$ однозначно определяется спектральным потенциалом λ. В силу уже упомянутой двойственности мы также заключаем, что если $S(\mu)$ – некоторая вогнутая полунепрерывная сверху в *-слабой топологии функция от μ такая, что

$$\lambda(\varphi) = \sup_{\mu \in M_\alpha} \big(\mu(\varphi) + S(\mu)\big) \tag{8}$$

(т. е. $\lambda(\varphi)$ есть преобразование Фенхеля – Лежандра от $-S(\mu)$), то $-S(\mu) = \lambda^*$, и, значит,

$$S(\mu) = \tau(\mu). \tag{9}$$

Следующий результат относится к обратимым динамическим системам.

Теорема 1. *Пусть* (X, α) *– обратимая динамическая система,* $\psi \in C(X)$ *и трансфер-оператор имеет вид*

$$(Af)(x) := e^{\psi(x)} f\big(\alpha^{-1}(x)\big)$$

(любой трансфер-оператор для обратимой динамической системы имеет такой вид). Тогда $\tau(\mu) = \mu(\psi)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае справедливо соотношение

$$A_\varphi f = A\big(e^\varphi f\big) = e^\psi e^{\varphi \circ \alpha^{-1}} f \circ \alpha^{-1} = e^{\psi + \varphi \circ \alpha^{-1}} f \circ \alpha^{-1}.$$

Из этого равенства и вариационного принципа для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига, порожденного гомеоморфизмом компакта [4; 5], следует, что

$$\lambda(\varphi) = \max_{\mu \in M_\alpha} \mu\big(\varphi \circ \alpha^{-1} + \psi\big) = \max_{\mu \in M_\alpha}\Big[\mu\big(\varphi \circ \alpha^{-1}\big) + \mu(\psi)\Big] = \max_{\mu \in M_\alpha}\big[\mu(\varphi) + \mu(\psi)\big], \tag{10}$$

где в последнем выражении использовалось равенство $\mu(\varphi \circ \alpha^{-1}) = \mu(\varphi)$, вытекающее из α-инвариантности меры μ.

Так как $\mu(\psi)$ линейно и непрерывно в *-слабой топологии зависит от параметра μ, то равенство (10) с учетом наблюдений (8) и (9) означает, что $\tau(\mu) = \mu(\psi)$. Теорема 1 доказана.

Следующий результат относится к динамическим системам, порожденным растягивающими отображениями.

Теорема 2. *Пусть X – метрический компакт, α – растягивающее непрерывное отображение, для которого* $\alpha^{-1}(x) \equiv \text{const}$, $\psi \in C(X)$ *и трансфер-оператор имеет вид*

$$(Af)(x) := \sum_{y \in \alpha^{-1}(x)} e^{\psi(y)} f(y).$$

Тогда

$$\tau(\mu) = \mu(\psi) + h(\mu),$$

где $h(\mu)$ – энтропия Колмогорова – Синая.

Доказательство. Из [6; 7] следует, что в рассматриваемой ситуации (т. е. для растягивающих отображений) справедливо равенство

$$\lambda(\varphi) = P((\varphi + \psi), \alpha), \tag{11}$$

где $P(c, \alpha)$ – топологическое давление, ассоциированное с динамической системой (X, α) и непрерывной функцией $c \in C(X)$ (определение топологического давления см. в [8; 9]).

Для топологического давления и любой динамической системы (X, α) известен следующий вариационный принцип [8; 9]:

$$P(c, \alpha) = \sup_{\mu \in M_\alpha} (\mu(c) + h(\mu)), \tag{12}$$

где $h(\mu)$ – энтропия Колмогорова – Синая.

Равенства (11) и (12) означают, что

$$\lambda(\varphi) = \sup_{\mu \in M_\alpha} (\mu(\varphi + \psi) + h(\mu)) = \sup_{\mu \in M_\alpha} (\mu(\varphi) + [\mu(\psi) + h(\mu)]). \tag{13}$$

Энтропия $h(\mu)$ является вогнутой функцией от μ. При этом так как α – растягивающее отображение, то согласно [10, theorem 8.2] $h(\mu)$ есть полунепрерывная сверху в *-слабой топологии функция от μ. Кроме того, $\mu(\psi)$ – линейная и непрерывная в *-слабой топологии функция от μ. Значит, $[\mu(\psi) + h(\mu)]$ является вогнутой и полунепрерывной сверху в *-слабой топологии функцией от μ.

Теперь равенство (13) с учетом наблюдений (8) и (9) означает, что $\tau(\mu) = [\mu(\psi) + h(\mu)]$. Теорема 2 доказана.

Ниже приводится еще один результат, который можно использовать при вычислении спектральных потенциалов для трансфер-операторов, ассоциированных с произведениями динамических систем.

Пусть (X, α) и (Y, β) – некоторые динамические системы и $A_X : C(X) \to C(X)$ – фиксированный трансфер-оператор для (X, α), $A_Y : C(Y) \to C(Y)$ – фиксированный трансфер-оператор для (Y, β). Как отмечено в разделе «Трансфер-операторы и положительные функционалы», операторам A_X и A_Y отвечают семейства положительных функционалов (мер) $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ и $\{\nu_y\}_{y \in Y}$ соответственно. Эти семейства мер задают трансфер-оператор $A_{X \times Y} : C(X \times Y) \to C(X \times Y)$ для динамической системы $(X \times Y, (\alpha, \beta))$ по формуле

$$(A_{X \times Y} f)(x, y) := \iint_{\alpha^{-1}(x) \times \beta^{-1}(y)} f d\varphi_x \otimes d\nu_y. \tag{14}$$

То, что $A_{X \times Y}$ действительно трансфер-оператор, следует из рассуждений раздела «Трансфер-операторы и положительные функционалы» и того факта, что $(\alpha, \beta)^{-1}(x, y) = \alpha^{-1}(x) \times \beta^{-1}(y)$.

Теорема 3. *Пусть A_X, A_Y и $A_{X \times Y}$ – вышеупомянутые трансфер-операторы;* $\varphi \in C(X)$, $\psi \in C(X)$ *и* $\theta(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) \in C(X \times Y)$. *Тогда*

$$\lambda(\theta) = \lambda(\varphi) + \lambda(\psi),$$

где $\lambda(\varphi)$ – *спектральный потенциал оператора* $A_{X\varphi}$; $\lambda(\psi)$ – *спектральный потенциал оператора* $A_{Y\psi}$; $\lambda(\theta)$ – *спектральный потенциал оператора* $A_{X\times Y\theta}$.

Доказательство. Для сокращения записи обозначим

$$A_\theta := A_{X\times Y\theta},\ A_\varphi := A_{X\varphi},\ A_\psi := A_{Y\psi}.$$

Проверим, что

$$\left\|A_\theta^n\right\| = \left\|A_\varphi^n\right\|\left\|A_\psi^n\right\|. \tag{15}$$

Действительно, из формулы (14) следует

$$A_\theta 1(x, y) = A\left(e^\theta 1\right)(x, y) = \iint\limits_{\alpha^{-1}(x)\times\beta^{-1}(y)} \left(e^\theta 1\right) d\varphi_x \otimes d\nu_y = \int\limits_{\alpha^{-1}(x)}\left(\int\limits_{\beta^{-1}(y)} e^\theta 1\, d\nu_y\right) d\varphi_x =$$

$$= \int\limits_{\alpha^{-1}(x)}\left(\int\limits_{\beta^{-1}(y)} e^\varphi e^\psi\, d\nu_y\right) d\varphi_x = \int\limits_{\alpha^{-1}(x)} e^\varphi \left(\int\limits_{\beta^{-1}(y)} e^\psi d\nu_y\right) d\varphi_x = \left(\int\limits_{\alpha^{-1}(x)} e^\varphi d\varphi_x\right)\left(\int\limits_{\beta^{-1}(y)} e^\psi d\nu_y\right) =$$

$$= A_\varphi 1(x) \cdot A_\psi 1(y).$$

Отсюда с учетом положительности операторов A_θ, A_φ, A_ψ имеем

$$\left\|A_\theta\right\| = \left\|A_\theta 1\right\| = \left\|A_\varphi 1\right\|\left\|A_\psi 1\right\| = \left\|A_\varphi\right\|\left\|A_\psi\right\|.$$

Рассуждая аналогично и применяя равенства (3) и (4), можно показать, что

$$A_\theta^n 1(x, y) = A_{X\times Y}^n\left(e^{S_n\theta}1\right)(x, y) = A_X^n\left(e^{S_n\varphi}1\right)(x) \cdot A_Y^n\left(e^{S_n\psi}1\right)(y) = A_\varphi^n 1(x) \cdot A_\psi^n 1(y).$$

Из последних соотношений следует равенство (15).

Теперь из (1) и (15) получим

$$\lambda(\theta) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left\|A_\theta^n\right\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\left\|A_\varphi^n\right\|\left\|A_\psi^n\right\|\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left\|A_\varphi^n\right\| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left\|A_\psi^n\right\| = \lambda(\varphi) + \lambda(\psi).$$

Теорема 3 доказана.

Библиографические ссылки

1. Antonevich AB, Bakhtin VI, Lebedev AV. On *t*-entropy and variational principle for the spectral radii of transfer and weighted shift operators. *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* 2011;31(4):995–1042. DOI: 10.1017/S0143385710000210.

2. Bakhtin VI, Lebedev AV. A New Definition of *t*-Entropy for Transfer Operators. *Entropy.* 2017;19(11):573. DOI: 10.3390/e19110573.

3. Сокол ЭЭ. Введение информационной функции Кульбака – Лейблера с помощью разбиений вероятностного пространства. *Журнал БГУ. Математика. Информатика.* 2018;1:59–67.

4. Китовер АК. О спектре автоморфизмов с весом и теореме Камовица – Шайнберга. *Функциональный анализ и его приложения.* 1979;13(1):70–71.

5. Лебедев АВ. Об обратимости элементов в C^*-алгебрах, порожденных динамическими системами. *Успехи математических наук.* 1979;34(4):199–200.

6. Латушкин ЮД, Степин АМ. Оператор взвешенного сдвига на топологической марковской цепи. *Функциональный анализ и его приложения.* 1988;22(4):86–87.

7. Латушкин ЮД, Степин АМ. Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем. *Успехи математических наук.* 1991;46(2):85–143.

8. Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1973;185:237–251. DOI: 10.2307/1996437.

9. Walters P. A variational principle for the pressure on continuous transformations. *American Journal of Mathematics.* 1975;97(4):937–971. DOI: 10.2307/2373682.

10. Walters P. *An introduction to ergodic theory.* New York: Springer-Verlag; 1982. 250 p.

References

1. Antonevich AB, Bakhtin VI, Lebedev AV. On t-entropy and variational principle for the spectral radii of transfer and weighted shift operators. *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* 2011;31(4):995–1042. DOI: 10.1017/S0143385710000210.
2. Bakhtin VI, Lebedev AV. A New Definition of t-Entropy for Transfer Operators. *Entropy.* 2017;19(11):573. DOI: 10.3390/e19110573.
3. Sokal EE. Introduction of the Kullback – Leibler information function by means of partitions of the probability space. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;1:59–67. Russian.
4. Kitover AK. [Spectrum of automorphisms with weight and the Kamowitz – Scheinberg theorem]. *Funktional'nyi analiz i ego prilozheniya.* 1979;13(1):70–71. Russian.
5. Lebedev AV. [On the invertibility of elements in C^*-algebras generated by dynamical systems]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1979;34(4):199–200. Russian.
6. Latushkin JuD, Stepin AM. [Weighted shift operator on a topological Markov chain]. *Funktional'nyi analiz i ego prilozheniya.* 1988;22(4):86–87. Russian.
7. Latushkin JuD, Stepin AM. [Weighted translation operators and linear extensions of dynamical systems]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1991;46(2):85–143. Russian.
8. Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with Z^{ν} action satisfying expansiveness and specification. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1973;185:237–251. DOI: 10.2307/1996437.
9. Walters P. A variational principle for the pressure on continuous transformations. *American Journal of Mathematics.* 1975;97(4):937–971. DOI: 10.2307/2373682.
10. Walters P. *An introduction to ergodic theory.* New York: Springer-Verlag; 1982. 250 p.

Статья поступила в редколлегию 22.09.2019.
Received by editorial board 22.09.2019.