Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019;3:18–34
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2019;3:18–34

УДК 517.5

СУММЫ ФЕЙЕРА РАЦИОНАЛЬНОГО РЯДА ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА И АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ $|x|^s$

П. Г. ПОЦЕЙКО[1]***, Е. А. РОВБА***[1]

[1]*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, ул. Э. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь*

Изучаются аппроксимативные свойства сумм Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова и приближения суммами Фейера функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$. Рассматривается одна ортогональная система алгебраических дробей Чебышева – Маркова и вводятся суммы Фейера соответствующих рациональных рядов Фурье – Чебышева. Устанавливаются порядок приближений последовательностями сумм Фейера непрерывных на отрезке функций в терминах модуля непрерывности и достаточные условия на параметр, обеспечивающие равномерную сходимость. Находятся оценки поточечных и равномерных приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$, асимптотические выражения при $n \to \infty$ мажоранты равномерных приближений, а также оптимальное значение параметра, при котором обеспечивается наибольшая скорость приближений исследуемой функции суммами Фейера рациональных рядов Фурье – Чебышева.

Ключевые слова: ряд Фурье – Чебышева; частичные суммы; суммы Фейера; модуль непрерывности; равномерная сходимость; асимптотические оценки; точные константы.

FEJER MEANS OF RATIONAL FOURIER – CHEBYSHEV SERIES AND APPROXIMATION OF FUNCTION $|x|^s$

P. G. PATSEIKA[a]***, Y. A. ROUBA***[a]

[a]*Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažeška Street, Hrodna 230023, Belarus*
Corresponding author: P. G. Patseika (pahamatby@gmail.com)

Approximation properties of Fejer means of Fourier series by Chebyshev – Markov system of algebraic fractions and approximation by Fejer means of function $|x|^s$, $0 < s < 2$, on the interval $[-1, 1]$ are studied. One orthogonal system of Chebyshev – Markov algebraic fractions is considers, and Fejer means of the corresponding rational Fourier – Chebyshev

Образец цитирования:
Поцейко ПГ, Ровба ЕА. Суммы Фейера рационального ряда Фурье – Чебышева и аппроксимации функции $|x|^s$. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:18–34.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-18-34

For citation:
Patseika PG, Rouba YA. Fejer means of rational Fourier – Chebyshev series and approximation of function $|x|^s$. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;3:18–34. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-18-34

Авторы:
Павел Геннадьевич Поцейко – аспирант кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики. Научный руководитель – Е. А. Ровба.
Евгений Алексеевич Ровба – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Authors:
Pavel G. Patseika, postgraduate student at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
pahamatby@gmail.com
*http://orcid.org/*0000-0001-7835-0500
Yauheni A. Rouba, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
rovba.ea@gmail.com

series is introduce. The order of approximations of the sequence of Fejer means of continuous functions on a segment in terms of the continuity module and sufficient conditions on the parameter providing uniform convergence are established. A estimates of the pointwise and uniform approximation of the function $|x|^s$, $0 < s < 2$, on the interval $[-1, 1]$, the asymptotic expressions under $n \to \infty$ of majorant of uniform approximations, and the optimal value of the parameter, which provides the highest rate of approximation of the studied functions are sums of rational use of Fourier – Chebyshev are found.

Keywords: Fourier – Chebyshev series; partial sums; Fejer means; modulus of continuity; uniform convergence; asymptotic estimates; exact constants.

Введение

Метод приближений средними арифметическими рядов Фурье 2π-периодических функций имеет богатую историю и ведет свое начало с работ Л. Фейера [1], А. Лебега [2] и др. К настоящему времени метод средних арифметических Фейера тригонометрических рядов Фурье достаточно хорошо изучен и нашел широкое применение в полиномиальной аппроксимации (см., например, [3–6]). А. В. Ефимов получил выражение главного члена уклонения функции от ее сумм Фейера и сумм Фурье, а также установил асимптотически точные равенства для верхних граней этих уклонений, распространенных на классы H_2^α и $W^r H_2^\alpha$ в непрерывной метрике [7]. Г. К. Лебедь и А. А. Авдеенко пришли к аналогичным результатам в интегральной метрике [8].

В 1956 г. М. М. Джрбашян ввел рациональные ряды Фурье, обобщающие соответствующие классические тригонометрические ряды [9]. Одним из основных результатов этой работы было компактное представление ядра Дирихле рациональных рядов Фурье. Основываясь на таком представлении, В. Н. Русак предложил рациональные операторы типа Фейера, Джексона, Валле Пуссена [10] (см. также [11]).

Рациональные операторы Джексона и Валле Пуссена нашли широкое применение в теории рациональных приближений как с фиксированными, так и со свободными полюсами. С их помощью были найдены новые классы функций, отражающие особенности рациональной аппроксимации (см., например, [12–15]). Рациональные операторы Фейера такого применения не нашли и практически не использовались.

На отрезке $[-1, 1]$ рациональные интегральные операторы типа Фейера на основании частичных сумм рядов Фурье – Чебышева по системе рациональных функций, введенной М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном как метод рациональных приближений с фиксированными полюсами, были построены и исследованы в [16; 17].

Приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, посредством интегральных рациональных операторов типа Фейера были изучены на вещественной оси [12; 13] и на отрезке [18; 19].

Задача аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ ведет свою богатую историю с начала XX в., когда полиномиальная аппроксимация этого примера негладкой функции заинтересовала А. Лебега, Д. Джексона и С. Н. Бернштейна [20]. Проблеме посвящен ряд исследований. Новый импульс в ее изучении придала работа Д. Ньюмена [21] о рациональной аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$. Тема была продолжена во многих трудах (см., например, [22; 23]), и окончательный результат был получен Г. Шталем [24].

Начало исследованию приближений функции $|x|^s$, $s > 0$, также положено С. Н. Бернштейном [25]. К настоящему времени имеется достаточно большое число работ, посвященных как наилучшим приближениям этой функции (см., например, [26–29]), так и конкретным методам приближений (см., например, [30; 31]).

В [32] авторами были построены и исследованы ряды Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова, которая является обобщением классической системы полиномов Чебышева первого рода. В частности, построен интеграл Дирихле и изучены его аппроксимативные свойства в приближениях индивидуальных функций.

В настоящей работе на основании вышеизложенных результатов изучаются аппроксимативные свойства сумм Фейера указанных рациональных рядов Фурье – Чебышева. Ставится задача получить аналоги теорем о равномерной сходимости последовательностей сумм Фейера для непрерывных на отрезке функций (см., например, [33]), а также исследовать приближения индивидуальных функций рассматриваемым методом суммирования.

Суммы Фейера рациональных рядов Фурье – Чебышева на отрезке и их аппроксимативные свойства

Пусть задана частичная сумма порядка $2n$ ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова для четной функции $f \in C[-1, 1]$:

$$s_{2n}(f, x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} c_{2k} M_{2k}(x), \; n = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

Аппроксимативные свойства частичных сумм (1) исследованы нами в [32]. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [32]. *Для частичных сумм (1) справедливо представление*

$$s_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin((2n+1)\varphi(u, v))}{\sin \varphi(u, v)} \lambda(v) dv, \; x = \cos u, \tag{2}$$

где

$$\varphi(u, v) = \int_{u}^{v} \lambda(y) dy, \; \lambda(y) = \frac{1 - \alpha^4}{1 + 2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4}, \; \alpha \in [0, 1), \tag{3}$$

причем оператор $s_{2n} : f \to \mathbb{R}_{2n}(a)$, где $\mathbb{R}_{2n}(a)$ – множество рациональных функций вида $\frac{p_{2n}(x)}{(1 + a^2 x^2)^n}$, $p_{2n}(x) \in \mathbb{P}_{2n}$, является точным на константах.

Составим среднее арифметическое частичных сумм (1)

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_{2k}(f, x), \; x \in [-1, 1], \; n = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Выражения (4) естественно назвать суммами Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова.

Теорема 2. *Если функция f определена и абсолютно суммируема с весом*

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{(1 + a^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}}, \; -1 < x < 1, \; a > 0,$$

на отрезке $[-1, 1]$, то для сумм Фейера справедливо представление

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2((n+1)\varphi(u, v))}{\sin^2 \varphi(u, v)} \lambda(v) dv, \; x = \cos u, \tag{5}$$

здесь $\varphi(u, v)$, $\lambda(v)$ из (3). Кроме этого, оператор $\sigma_{2n} : f \to \mathbb{R}_{2n}(a)$ является положительным и точным для единицы.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы подставим (2) в (4). Тогда для $n = 0, 1, \ldots$ получим

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(\cos v)}{\sin \varphi(u, v)} \sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)\varphi(u, v)) \lambda(v) dv.$$

Отсюда приходим к (5).

Второе утверждение теоремы следует из условия существования ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышева – Маркова для непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ четной функции f, полученного в [32], а также представления (4).

Из (5) вытекает, что оператор $\sigma_{2n}(\cdot, x)$ положительный. Его точность на единице следует из точности на единице частичных сумм $s_{2n}(f, x)$ и соотношения (4), что и доказывает теорему 2.

Лемма 1. *Для сумм Фейера (4) имеет место представление*

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2((n+1)\varphi(u, v))}{\sin^2(v-u)} dv, \quad x = \cos u, \tag{6}$$

здесь $\lambda(u)$ *из (3).*

Доказательство. Из [9, с. 14] следует, что для $\varphi(u, v)$ справедливо

$$\exp[in\varphi(u, v)] = \sqrt{\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}}, \ \pi_n(y) = \left(\frac{y^2+\alpha^2}{1+\alpha^2 y^2}\right)^n, \ \xi = e^{iu}, \ \zeta = e^{iv}, \ x = \cos u.$$

Следовательно,

$$\sin^2\varphi(u, v) = \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \left[\sqrt{\frac{\zeta^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\frac{1+\alpha^2\xi^2}{\xi^2+\alpha^2}} - \sqrt{\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}\frac{1+\alpha^2\zeta^2}{\zeta^2+\alpha^2}}\right]^2 = \sin^2(v-u)\lambda(u)\lambda(v).$$

Подставив последнее выражение в (5), придем к (6), что и доказывает лемму 1.

Замечание 1. Положив в (6) $\alpha = 0$, получим

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2((n+1)(v-u))}{\sin^2(v-u)} dv, \ x = \cos u.$$

Другими словами, при переходе к полиномиальному случаю выражение (6) представляет собой классические суммы Фейера рядов Фурье – Чебышева при условии четности функции *f*.

Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций

Изучим поведение последовательности сумм Фейера (4) для $n \to \infty$ при приближении функций $f \in C[-1, 1]$, а также определим достаточные условия, которым должен удовлетворять параметр α для равномерной сходимости этой последовательности.

Отметим, что в данном случае при каждом значении индекса *n* могут выбираться соответствующие значения параметра α, т. е., вообще говоря, $\alpha = \alpha_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Это обстоятельство будем учитывать в дальнейшем.

Рассмотрим последовательность сумм Фейера

$$\{\sigma_{2n}(f, x, \alpha_n)\}_{n=0}^{n=+\infty}. \tag{7}$$

Теорема 3. *Для всякой четной функции* $f \in C[-1, 1]$ *справедливо неравенство*

$$|f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n)| \le 4\left(\omega_f\left(\frac{\ln((n+1)\lambda(u))\sqrt{1-x^2}}{(n+1)\lambda(u)}\right) + \omega_f\left(\frac{|x|}{(n+1)\lambda(u)}\right)\right), \tag{8}$$

где ω_f *– модуль непрерывности функции f на отрезке* $[-1, 1]$, $\lambda(u)$ *из (3),* $x = \cos u$, $u \in [0, \pi]$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (6). Из π-периодичности подынтегральной функции следует, что

$$\sigma_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \le \pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^2((n+1)\varphi(u, v))}{\sin^2(v-u)} dv, \ x = \cos u.$$

Учитывая точность оператора $\sigma_{2n}(\cdot, x)$ для единицы, из последнего соотношения получим

$$f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)} \int_{|v-u| \le \pi/2} (f(\cos u) - f(\cos v)) \frac{\sin^2((n+1)\varphi(u, v))}{\sin^2(v-u)} dv. \tag{9}$$

После замены переменной $v - u = t$ имеем

$$f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n) = \frac{1}{\pi(n+1)\lambda(u)}\left(\int_{-\pi/2}^{0} + \int_{0}^{\pi/2}\right)\left(f(\cos u) - f(\cos(u+t))\right)\frac{\sin^2((n+1)\varphi(+u, t))}{\sin^2 t}dt,$$

где

$$\varphi(+u, t) = \int_0^t \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2(y+u)+\alpha^4}dy, \ \alpha \in [0, 1).$$

Выполнив в первом интеграле еще одну замену: $t \sim -t$, приходим к выражению

$$f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n) = \frac{1}{\pi}\left[I_n(u) + I_n(-u)\right], \tag{10}$$

где

$$I_n(\pm u) = \frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\int_0^{\pi/2}\left(f(\cos u) - f(\cos(u \pm t))\right)\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin^2 t}dt.$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся методом А. Ф. Тимана [34, с. 269]. Заметив, что

$$\left|f(\cos u) - f(\cos(u \pm t))\right| \le \omega_f(|\sin t \sin u|) + 2\omega_f\left(\left|\sin^2\frac{t}{2}\cos u\right|\right),$$

имеем

$$|I_n(\pm u)| \le \frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\left[\int_0^{\pi/2}\omega_f(|\sin t\sin u|)\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin^2 t}dt + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^{\pi/2}\omega_f\left(\left|\sin^2\frac{t}{2}\cos u\right|\right)\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin^2 t}dt\right] \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\left[\omega_f\left(\frac{\ln((n+1)\lambda(u))\sin u}{(n+1)\lambda(u)}\right)\int_0^{\pi/2}\left(\sin t\frac{(n+1)\lambda(u)}{\ln((n+1)\lambda(u))} + 1\right)\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin^2 t}dt + \right.$$

$$\left. + 2\omega_f\left(\frac{\cos u}{(n+1)\lambda(u)}\right)\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\frac{t}{2}(n+1)\lambda(u) + 1\right)\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin^2 t}dt\right] \le$$

$$\le \omega_f\left(\frac{\ln((n+1)\lambda(u))\sin u}{(n+1)\lambda(u)}\right)(I_1 + I_2) + 2\omega_f\left(\frac{\cos u}{(n+1)\lambda(u)}\right)(I_3 + I_2), \tag{11}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\ln((n+1)\lambda(u))}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin t}dt;$$

$$I_2 = \frac{1}{(n+1)\lambda(u)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\sin^2 t}dt;$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2((n+1)\varphi(\pm u, t))}{\cos^2\frac{t}{2}}dt.$$

Учитывая, что $\varphi(\pm u, t) \le \lambda(u)t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, разобьем интеграл I_1 на два интеграла по промежуткам $\left[0, \frac{\pi}{2(n+1)\lambda(u)}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2(n+1)\lambda(u)}, \frac{\pi}{2}\right]$. Применив к первому из них неравенства $\sin\left((n+1)\lambda(u)t\right) \le$ $\le (n+1)\lambda(u)t$, $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$, а ко второму – неравенство $\sin\left((n+1)\lambda(u)t\right) \le 1$, получим

$$I_1 \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{2\ln\left((n+1)\lambda(u)\right)} + \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Рассуждая аналогично, оценим интегралы I_2 и I_3:

$$I_2 \le \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}, \tag{13}$$

$$I_3 \le \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Подставив (12)–(14) в (11), имеем

$$\left|I_n(\pm u)\right| \le \omega_f\left(\frac{\ln\left((n+1)\lambda(u)\right)\sin u}{(n+1)\lambda(u)}\right)\left[\frac{1}{2\ln\left((n+1)\lambda(u)\right)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \pi + \frac{2}{\pi}\right] +$$

$$+ \omega_f\left(\frac{\cos u}{(n+1)\lambda(u)}\right)\left[1 + \pi + \frac{4}{\pi}\right].$$

С учетом последнего соотношения при достаточно больших n в (10) получим

$$\left|f(x) - \sigma_{2n}(f, x, \alpha_n)\right| \le \omega_f\left(\frac{\ln\left((n+1)\lambda(u)\right)\sin u}{(n+1)\lambda(u)}\right)\left[\frac{\pi^2}{8} + 2 + \frac{4}{\pi^2}\right] +$$

$$+ \omega_f\left(\frac{\cos u}{(n+1)\lambda(u)}\right)\left[\frac{2}{\pi} + 2 + \frac{8}{\pi^2}\right].$$

Воспользовавшись свойством модуля непрерывности, а также вычислив

$$\frac{\pi^2}{8} + 2 + \frac{4}{\pi^2} \approx 3,63, \quad \frac{2}{\pi} + 2 + \frac{8}{\pi^2} \approx 3,44,$$

приходим к оценке (8). Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Если выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\ln(n+1)}(1 - \alpha_n) = \infty, \tag{15}$$

то последовательность сумм Фейера (7) сходится к $f(x)$ *равномерно на всем отрезке* $[-1, 1]$.

Заметим, что здесь и далее для каждого индекса n может выбираться соответствующее α_n. Мы не будем указывать эту зависимость, так как все приведенные оценки являются равномерными относительно $\alpha \in [0, 1)$.

О приближениях функции $|x|^s$ суммами Фейера

Следующий этап наших исследований – изучение приближений функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера. Введем обозначения

$$\varepsilon_{2n}(x, \alpha) = |x|^s - \sigma_{2n}\left(|\cdot|^s, x\right), \ x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \left\||x|^s - \sigma_{2n}\left(|\cdot|^s, x\right)\right\|_{C[-1, 1]}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Для приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера (4) справедливы следующие соотношения:*

1) $$\varepsilon_{2n}(x, \alpha) = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)\lambda(u)} \sin\frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}\left[(-1)^n \chi_{n+1}(t)\cos\psi_{n+1}(u, t) + \cos\left(2\arg\frac{\xi}{1+t^2\xi^2}\right)\right]}{1+2t^2\cos 2u + t^4} dt, \quad (16)$$

где

$$\psi_{n+1}(u, t) = 2\arg\frac{\xi}{1+t^2\xi^2} + (n+1)\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2},\ \ \xi = e^{iu},\ \ x = \cos u;$$

2) $$|\varepsilon_{2n}(x, \alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)\lambda(u)} \sin\frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}\sqrt{1+2(-1)^n \chi_{n+1}(t)\cos\gamma_{n+1}(u) + \chi_{n+1}^2(t)}}{1+2t^2\cos 2u + t^4} dt, \quad (17)$$

где

$$\chi_{n+1}(t) = \left(\frac{t^2-\alpha^2}{1-\alpha^2 t^2}\right)^{n+1},\ \ \gamma_{n+1}(u) = (n+1)\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2},\ \ \xi = e^{iu},\ x = \cos u,\ x \in [-1, 1];$$

3) $$\varepsilon_{2n}(\alpha) \le \varepsilon_{2n}^*(\alpha), \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_{2n}^*(\alpha) = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)} \sin\frac{\pi s}{2}\left(I_1(\alpha, n) + I_2(\alpha, n)\right); \quad (19)$$

$$I_1(\alpha, n) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\int_\alpha^1 \left(1-t^2\right)^{s-1} t^{1-s}\,\frac{1-\chi_{n+1}(t)}{1-t^2} dt;$$

$$I_2(\alpha, n) = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^\alpha \frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{\left(1+t^2\right)^2}\left(1-|\chi_{n+1}(t)|\right) dt,\ \ \alpha \in [0, 1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Неравенство (17) является точным. Равенство достигается в точке $x = 0$, что соответствует значению параметра $u = \frac{\pi}{2}$, а также на концах отрезка, где $u = 0$.

Доказательство. Вывод интегрального представления (16) и оценки (17) опустим в связи с тем, что он аналогичен таковому соответствующего результата в [36].

Для доказательства точности оценки (17) положим в ней $x = 0$ и $x = \pm 1$. Тогда

$$|\varepsilon_{2n}(0, \alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)} \sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{s-1} t^{1-s}\,\frac{1-\chi_{n+1}(t)}{1-t^2} dt,$$

$$|\varepsilon_{2n}(\pm 1, \alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)} \sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{\left(1+t^2\right)^2}\left(1-|\chi_{n+1}(t)|\right) dt.$$

Подставив аналогичные значения в соотношение (16), видим, что последние неравенства обращаются в равенства.

Для доказательства оценки (18) исследуем величину $\varepsilon_{2n}(\alpha)$. Имеем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \max_{x\in[-1,1]}|\varepsilon_{2n}(x, \alpha)| = \max_{x\in[-1,1]}\left||x|^s - \sigma_{2n}\left(|\cdot|^s, x\right)\right| = \max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\delta_{2k}(x, \alpha)\right|, \quad (20)$$

где $\delta_{2k}(x, \alpha) = |x|^s - s_{2k}\left(|\cdot|^s, x\right)$, $k = 0, \ldots, n$, – приближения функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами (2). Для величины $\delta_{2k}(x, \alpha)$ справедливо представление [36]

$$\delta_{2k}(x,\alpha)=\frac{(-1)^k}{\pi\cdot 2^{s-2}}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\chi_k(t)\cos\eta_k\,dt,$$

$$\eta_k=\eta_k(x,t,\alpha)=\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2\xi^2}+k\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}.$$

Подставив представление для $\delta_{2k}(x,\alpha)$ в (20), имеем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha)=\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\max_{x\in[-1,1]}\left|\int_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\sum_{k=0}^n(-1)^k\cos\eta_k(x,t,\alpha)\chi_k(t)dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\max_{x\in[-1,1]}I_3(x,\alpha),$$

здесь

$$I_3(x,\alpha)=\int_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\sum_{k=0}^n\left|\chi_k(t)\right|dt,\quad x=\cos u.$$

Учитывая, что $\cos 2u=2x^2-1$, из последнего соотношения получим

$$I_3(x,\alpha)=\left(1-\alpha^2\right)\int_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sqrt{\frac{1+A^2x^2}{1+T^2x^2}}\sum_{k=0}^n\left|\chi_k(t)\right|dt,\tag{21}$$

где $A=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$; $T=\dfrac{2t}{1-t^2}$. Исследовав функцию $\gamma(x)=\sqrt{\dfrac{1+A^2x^2}{1+T^2x^2}}$ по аналогии с [32], заключаем, что при $0<t<\alpha$ она возрастает, а значит, достигает максимального значения при $x=1$, что соответствует значению параметра $u=0$. В то же время при $\alpha<t<1$ функция $\gamma(x)$ убывает и, следовательно, максимальное ее значение будет уже при $x=0$, что соответствует значению параметра $u=\dfrac{\pi}{2}$. Разбивая интеграл в правой части (21) на два интеграла по промежуткам $[0,\alpha]$ и $[\alpha,1]$, найдем

$$\varepsilon_{2n}(\alpha)\le\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\left(1-\alpha^2\right)\int_\alpha^1\frac{\left(1-t^2\right)^{s-1}t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sum_{k=0}^n\chi_k(t)dt+\right.$$

$$\left.+\left(1+\alpha^2\right)\int_0^\alpha\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{\left(1-\alpha^2t^2\right)\left(1+t^2\right)}\sum_{k=0}^n\left|\chi_k(t)\right|dt\right].$$

Заметив, что суммы в каждом из интегралов представляют собой суммы членов геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями, придем к оценке (18).

Неравенства (17) и (18) получены в предположении, что $x\in(0,1)$. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что они также будут верны и на промежутке $(-1,0)$. Справедливость неравенства (17) в точках $x=\pm1$, а также при $x=0$ следует из непрерывности левой и правой частей этого неравенства относительно переменной x на $[-1,1]$. Теорема 4 доказана полностью.

Замечание 2. Учитывая, что $\cos\gamma_{n+1}(u)=M_{2n+2}(x)$, $x=\cos u$, есть алгебраическая дробь Чебышева – Маркова порядка $2n+2$, оценку (17) можно переписать в виде

$$\left|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)\right|\le\frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)\lambda(u)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t^2\right)^s t^{1-s}}{1+2t^2\cos 2u+t^4}\sqrt{1+(-1)^n2\chi_{n+1}(t)M_{2n+2}(x)+\chi_{n+1}^2(t)}\,dt.$$

Исследование приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, суммами Фейера в полиномиальном случае

В формулировке теоремы 4 положим $\alpha = 0$. Тогда $\varepsilon_{2n}(x, 0) = \varepsilon_{2n}(x)$ и $\varepsilon_{2n}(0) = \varepsilon_{2n}$ есть соответственно поточечные и равномерные приближения функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера рядов Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода $T_{2n}(x)$. В этом случае

$$|\varepsilon_{2n}(x)| \leq \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}\sqrt{1+(-1)^n 2t^{2n+2}T_{2n+2}(x)+t^{4n+4}}}{1+2t^2\cos 2u + t^4}dt, \ x\in[-1, 1], \tag{22}$$

$$\varepsilon_{2n} \leq \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 (1-t^2)^{s-1} t^{1-s}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}dt, \ n\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Оценка (22) точна. Равенство достигается при $x = 0$, а также на концах отрезка.

Поскольку

$$|\varepsilon_{2n}(0)| = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 (1-t^2)^{s-1} t^{1-s}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}dt, \ n\in\mathbb{N},$$

заключаем, что в (23) имеет место знак равенства, т. е.

$$\varepsilon_{2n} = \frac{1}{2^{s-2}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 (1-t^2)^{s-1} t^{1-s}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}dt, \ n\in\mathbb{N}. \tag{24}$$

Представляет интерес найти асимптотическую оценку равномерных приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева.

Теорема 5. *Для равномерных приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева при $n \to \infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n} \sim \frac{1}{\pi}\begin{cases} \dfrac{1}{2^{s-1}(1-s)}\sin\dfrac{\pi s}{2}\dfrac{\Gamma(s)}{(n+1)^s}, \ s\in(0, 1), \\ \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}, \ s = 1, \\ \dfrac{1}{2^{s-1}(1-s)}\sin\dfrac{\pi s}{2}\dfrac{\Gamma(s)\Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)(n+1)}, \ s\in(1, 2), \end{cases} \tag{25}$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем интеграл в (24):

$$I_4 = \int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}dt, \quad 0 < s < 2, n\in\mathbb{N}.$$

Рассмотрим случай $s\in(0, 1]$. Воспользуемся методом, предложенным в [37]. Продифференцируем последний интеграл по параметру n. Имеем

$$\frac{\partial I_4}{\partial n} = -2\int_0^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1}\frac{\ln t}{1-t^2}e^{(2n+2)\ln t}dt, \ 0 < s \leq 1, \ n\in\mathbb{N}.$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла справа применим метод Лапласа [38–40]. Функция $\ln t$ возрастает в промежутке $0 < t < 1$, следовательно, достигает своего максимального значения при $t = 1$. Используя разложение $\ln t = (t-1) + o(t-1)$ и асимптотическое соотношение

$$\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{s-1} \frac{\ln t}{1-t^2} \sim -2^{s-2}(1-t)^{s-1},$$

справедливые при $t \to 1$, находим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$\frac{\partial I_4}{\partial n} \sim 2^{s-1} \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} (1-t)^{s-1} e^{(2n+2)(t-1)} dt.$$

В последнем интеграле выполним замену $1 - t = u$. Тогда

$$\frac{\partial I_4}{\partial n} \sim 2^{s-1} \int\limits_0^{\varepsilon} u^{s-1} e^{-(2n+2)u} du, \quad n \to \infty.$$

Положив в интеграле справа $(2n+2)u = t$, получим

$$\frac{\partial I_4}{\partial n} \sim \frac{\Gamma(s)}{2(n+1)^s}, \quad n \to \infty.$$

Чтобы прийти к асимптотике интеграла I_4, необходимо в последнем асимптотическом равенстве произвести интегрирование по параметру n. В итоге при $n \to \infty$ для интеграла I_4 имеем

$$I_4 \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(s)}{2(1-s)(n+1)^{s-1}} + C_1, & s \in (0, 1), \\ \dfrac{1}{2}\ln(n+1), & s = 1, \end{cases} \tag{26}$$

где C_1 – некоторая константа, не зависящая от n.

Пусть теперь $s \in (1, 2)$. Тогда

$$I_4 = \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-2}}{t^{s-1}} dt - \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-2}}{t^{s-1}} t^{2n+2} dt.$$

Применяя те же методики исследования, найдем

$$I_4 \sim \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}{2(s-1)\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)} + \frac{\Gamma(s)}{2(s-1)(n+1)^{s-1}}, \quad s \in (1, 2), \quad n \to \infty. \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует (25). Теорема 5 доказана.

Асимптотика мажоранты равномерных приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, рациональными суммами Фейера

На этом этапе исследования найдем асимптотическое выражение при $n \to \infty$ величины (19). С этой целью в интегралах $I_1(\alpha, n)$ и $I_2(\alpha, n)$ выполним замену переменной интегрирования: $t^2 = \dfrac{1-u}{1+u}$, $dt = -\dfrac{du}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}$. Тогда

$$\varepsilon_{2n}^*(\alpha) = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\frac{\pi s}{2} \left[I_1(\alpha, n) + I_2(\alpha, n)\right], \tag{28}$$

где

$$I_1(\alpha, n) = \beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-1}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} \left(1 - \left(\frac{\beta - u}{\beta + u}\right)^{n+1}\right) \frac{du}{u};$$

$$I_2(\alpha, n) = \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^{1} \frac{u^s}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} \left(1 - \left(\frac{u - \beta}{\beta + u}\right)^{n+1}\right) du, \ \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Теорема 6. *Для мажоранты* $\varepsilon_{2n}^*(\alpha)$ *равномерных приближений функции* $|x|^s$, $0 < s < 2$, *на отрезке* $[-1, 1]$ *суммами Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n}^*(\alpha) \sim \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{2}\right)^s \dfrac{2\Gamma(s)}{(1-s)(n+1)^s} + \nu_n(\beta, s), \ s \in (0, 1), \\[2ex] \beta \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} + \nu_n(\beta, 1), \ s = 1, \\[2ex] \dfrac{\beta}{n+1} \displaystyle\int_0^{\beta} \dfrac{u^{s-2} du}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} + \nu_n(\beta, s), \ s \in (1, 2), \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\nu_n(\beta, s) = \frac{1}{\beta(n+1)} \int_0^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta d\theta - \frac{1}{2}\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1} \frac{\left(1-\beta^2\right)^{1-\frac{s}{2}}}{\left(\beta(n+1)\right)^{2-\frac{s}{2}}}.$$

Доказательство. Исследуем каждый из интегралов, входящих в (28), по отдельности. Изучим их асимптотическое поведение при $n \to \infty$. Дальнейшему доказательству теоремы 6 предпошлем две леммы.

Лемма 2. *Справедливы асимптотические равенства* $(n \to \infty)$

$$I_1(\alpha, n) \sim \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{2}\right)^s \dfrac{2\Gamma(s)}{(1-s)(n+1)^{1-s}}, \ s \in (0, 1), \\[2ex] \beta \ln(n+1), \ s = 1, \\[2ex] \beta \displaystyle\int_0^{\beta} \dfrac{u^{s-2} du}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} - \beta\left(\dfrac{\beta}{2(n+1)}\right)^{s-1} \Gamma(s-1), \ s \in (1, 2). \end{cases} \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $s \in (0, 1]$. Тогда воспользуемся методиками исследования подобных интегралов, изложенными в [37]. Продифференцируем интеграл $I_1(\alpha, n)$ по параметру n:

$$\frac{\partial I_1(\alpha, n)}{\partial n} = -\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-1}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} \left(\frac{\beta - u}{\beta + u}\right)^{n+1} \ln \frac{\beta - u}{\beta + u} \cdot \frac{du}{u}.$$

Для изучения асимптотического поведения интеграла справа в последнем соотношении применим метод Лапласа (см., например, [38–40]). Перепишем интеграл в виде

$$\frac{\partial I_1(\alpha, n)}{\partial n} = -\beta \int_0^{\beta} f(u) e^{(n+1)S(u)} du, \ S(u) = \ln \frac{\beta - u}{\beta + u}, \ f(u) = \frac{u^{s-1}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} \left(\frac{1}{u} \ln \frac{\beta - u}{\beta + u}\right).$$

Функция $S(u)$ убывает на промежутке $0 < u < \beta$, $0 < \beta \le 1$, поскольку $S'(u) < 0$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $u = 0$. Используя разложения $S(u) = \frac{-2u}{\beta} + o(u)$, а также $f(u) \sim -\frac{2}{\beta} u^{s-1}$, справедливые при $u \to 0$, для бесконечно малого $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ получим

$$\frac{\partial I_1(\alpha, n)}{\partial n} \sim 2\int_0^{\varepsilon} u^{s-1} e^{-2(n+1)u/\beta} du.$$

Выполнив замену $\frac{2(n+1)u}{\beta} = v$ в интеграле справа, имеем

$$\frac{\partial I_1(\alpha, n)}{\partial n} \sim 2\left(\frac{\beta}{2(n+1)}\right)^s \int_0^{\frac{2(n+1)\varepsilon}{\beta}} v^{s-1} e^{-v} dv \sim 2\left(\frac{\beta}{2(n+1)}\right)^s \Gamma(s), \; n \to \infty.$$

После интегрирования в последнем соотношении по параметру n найдем

$$I_1(\alpha, n) \sim \begin{cases} \left(\frac{\beta}{2}\right)^s \frac{2\Gamma(s)}{(1-s)(n+1)^{1-s}}, \; s \in (0, 1), \\ \beta \ln(n+1), \; s = 1, \; n \to \infty. \end{cases} \tag{31}$$

Пусть теперь $s \in (1, 2)$. В этом случае

$$I_1(\alpha, n) = \beta\int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} du - \beta\int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} \left(\frac{\beta - u}{\beta + u}\right)^{n+1} du.$$

В правой части последнего равенства первый интеграл не зависит от n. Применив для исследования второго интеграла соответствующие методики нахождения асимптотик, получим

$$I_1(\alpha, n) \sim \beta\int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} du - \beta\left(\frac{\beta}{2(n+1)}\right)^{s-1} \Gamma(s-1), \; 1 < s < 2, \; n \to \infty. \tag{32}$$

Из асимптотических соотношений (31) и (32) приходим к (30). Лемма 2 доказана.

Перейдем к рассмотрению интеграла $I_2(\alpha, n)$.

Лемма 3. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_2(\alpha, n) \sim \frac{1}{\beta}\int_0^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta d\theta - \frac{1}{2\beta}\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)}\right)^{1-\frac{s}{2}}, \; n \to \infty. \tag{33}$$

Доказательство. В интеграле $I_2(\alpha, n)$ выполним замену переменной по формуле $u = \cos\theta$. Тогда

$$I_2(\alpha, n) = \frac{1}{\beta}\int_0^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta d\theta - \frac{1}{\beta}\int_0^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta \left(\frac{\cos\theta - \beta}{\cos\theta + \beta}\right)^{n+1} d\theta. \tag{34}$$

Первый интеграл в последнем соотношении не зависит от n и существует при любых $0 < \beta \le 1$, $0 < s < 2$. Для исследования асимптотического поведения при $n \to \infty$ второго интеграла воспользуемся методом Лапласа. Запишем

$$I_5(\alpha, n) = \frac{1}{\beta}\int_0^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta \left(\frac{\cos\theta - \beta}{\cos\theta + \beta}\right)^{n+1} d\theta = \frac{1}{\beta}\int_0^{\arccos\beta} f(\theta) e^{(n+1)S(\theta)} d\theta,$$

где $f(\theta) = \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta$, $S(\theta) = \ln\frac{\cos\theta - \beta}{\cos\theta + \beta}$. Функция $S(\theta)$ убывает на промежутке $0 < \theta < \arccos\beta$, $0 < \beta \le 1$, поскольку $S'(\theta) < 0$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Используя разложение

$$S(\theta) = \ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - \frac{\beta}{1-\beta^2}\theta^2 + o\left(\theta^2\right),$$

а также асимптотическое равенство $f(\theta) \sim \theta^{1-s}$, справедливые при $\theta \to 0$, для бесконечно малого $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ находим, что

$$I_5(\alpha, n) \sim \frac{1}{\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1} \int_0^{\varepsilon} \theta^{1-s} e^{-\frac{(n+1)\beta}{1-\beta^2}\theta^2} d\theta.$$

После замены переменной по формуле $\frac{(n+1)\beta}{1-\beta^2}\theta^2 = u^2$ придем к соотношению

$$I_5(\alpha, n) \sim \frac{1}{\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1} \left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)}\right)^{1-\frac{s}{2}} \int_0^{\varphi(\varepsilon, n)} u^{1-s} e^{-u^2} du, \ n \to \infty,$$

где $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon\sqrt{\frac{(n+1)\beta}{1-\beta^2}} \to \infty$, $n \to \infty$. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} u^{1-s} e^{-u^2} du = -\frac{s}{4}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right),$$

окончательно имеем

$$I_5(\alpha, n) \sim \frac{1}{2\beta}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta(n+1)}\right)^{1-\frac{s}{2}}, \ n \to \infty.$$

Подставив асимптотическое выражение интеграла $I_5(\alpha, n)$ в соотношение (34), придем к (33). Лемма 3 доказана.

Объединяя в (28) соотношения (30) и (33), получим асимптотические равенства (29), что доказывает теорему 6.

Следствие 2. *Положив в формулировке теоремы 6 значение α равным нулю, приходим к асимптотическим равенствам (25). Значит, в полиномиальном случае оценка (18) точна. Равенство достигается при $x = 0$.*

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (29) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра $\beta = \beta^*$. Другими словами, искать оценку наилучшего равномерного приближения функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, суммами Фейера (4). С этой целью положим

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{0 \le \alpha < 1} \varepsilon_{2n}(\alpha), \ \varepsilon_{2n}^* = \inf_{0 \le \alpha < 1} \varepsilon_{2n}^*(\alpha).$$

Очевидно следующее соотношение (см. (18)):

$$\varepsilon_{2n} \le \varepsilon_{2n}^*, \ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7. *Для заданного $0 < s < 2$ при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n}^* \sim \begin{cases} 2^{1-s}\Gamma(s)\frac{1+s}{s}\left[\left(\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{2s+1}\frac{s}{1-s}\Gamma^{2s}\left(1-\frac{s}{2}\right)\right]^{\frac{1}{s+1}}\frac{1}{(n+1)^{\frac{2s}{s+1}}}, \ s \in (0, 1), \\ \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}, \ s = 1, \\ \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\inf_{0<\beta\le 1}\left[\beta\int_0^{\beta}\frac{u^{s-2}du}{\left(1-u^2\right)^{s/2}} + \frac{1}{\beta}\int_{\beta}^{1}\frac{u^s du}{\left(1-u^2\right)^{s/2}}\right]\frac{1}{n+1}, \ s \in (1, 2). \end{cases} \quad (35)$$

Доказательство. Исследуем равенства (29). При выполнении условия (15) второе слагаемое в выражении для $\nu_n(\beta, s)$ имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с первым, и, следовательно,

$$\nu_n(\beta, s) \sim \frac{1}{\beta(n+1)} \int_0^{\arccos\beta} \cos^s\theta \sin^{1-s}\theta d\theta, \ 0 < s < 2, \ n \to \infty. \tag{36}$$

Рассмотрим случай $s \in (0, 1]$. В соотношении (36) положим $\beta = \beta(n) \to 0$ с сохранением условия (15) и получим

$$\nu_n(\beta, s) \sim \frac{2^{1-s}\Gamma(s)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}} \cdot \frac{1}{\beta(n+1)}, \ n \to \infty.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ для мажоранты $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$ справедливы асимптотические равенства

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) \sim \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2} \frac{2^{1-s}\beta^s\Gamma(s)}{(1-s)(n+1)^s} + \frac{2^{1-s}\Gamma(s)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\beta(n+1)}, \ s \in (0, 1), \\ \frac{1}{\pi}\left(\beta\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{\beta(n+1)}\right), \quad s = 1. \end{cases}$$

При каждом заданном $0 < s \le 1$ соответствующие значения величины $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$ имеют строгий минимум при $0 < \beta \le 1$. Решая экстремальную задачу

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) \underset{0<\beta\le 1}{\to} \min,$$

находим, что оптимальными при заданном s, $0 < s \le 1$, будут значения

$$\beta^* = \begin{cases} \left(\frac{\pi(1-s)}{s\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}}\right)^{\frac{1}{s+1}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1-s}{1+s}}}, \ s \in (0, 1), \\ \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}, \ s = 1. \end{cases}$$

При этом

$$\varepsilon^*_{2n} \sim \begin{cases} 2^{1-s}\Gamma(s)\frac{1+s}{s}\left(\left(\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{2s+1} \frac{s}{1-s}\Gamma^{2s}\left(1-\frac{s}{2}\right)\right)^{\frac{1}{s+1}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{2s}{s+1}}}, \ s \in (0, 1), \\ \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}, \ s = 1, \ \alpha^* = \sqrt{\frac{1-\beta^*}{1+\beta^*}}. \end{cases} \tag{37}$$

Пусть теперь $s \in (1, 2)$. В этом случае из (29) и (36) получим

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\beta\int_0^\beta \frac{u^{s-2}du}{(1-u^2)^{s/2}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{u^s du}{(1-u^2)^{s/2}}\right]\frac{1}{n+1}, \ n \to \infty.$$

Отсюда

$$\varepsilon^*_{2n} \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2} \inf_{0<\beta\le 1}\left[\beta\int_0^\beta \frac{u^{s-2}du}{(1-u^2)^{s/2}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{u^s du}{(1-u^2)^{s/2}}\right]\frac{1}{n+1}, \ n \to \infty. \tag{38}$$

Из соотношений (37) и (38) следует (35). Теорема 7 доказана.

Замечание 3. Сравнивая результаты теорем 5 и 7, приходим к выводу, что при $s \in (0, 1]$ специальным выбором параметра α возможно добиться скорости приближений рациональными суммами Фейера большей в сравнении с полиномиальным случаем. Данный результат отражает особенности рациональной аппроксимации непрерывных функций со степенными особенностями. Если же $s \in (1, 2)$, то ситуация иная. Из (35) следует, что оптимальное значение параметра не увеличивает скорость убывания мажоранты ε_{2n}^*. Однако можно заметить, что при заданном $s \in (1, 2)$ найденное оптимальное значение параметра будет уменьшать константу.

Замечание 4. Нетрудно получить асимптотические разложения для оптимального параметра α^*, например при $s = 1$:

$$\alpha^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}\right), \ n \to \infty.$$

Замечание 5. В [32] получена точная асимптотическая оценка равномерного приближения функции $|x|$ частичными суммами рациональных рядов Фурье – Чебышева на отрезке $[-1, 1]$. Точность была установлена благодаря тому, что максимальное уклонение частичных сумм от функции $|x|$ достигалось в точках x, равных 0, ± 1. В случае приближений суммами Фейера ситуация изменилась. По нашему мнению, при заданном s, $0 < s < 2$, максимальное уклонение достигается в некоторой точке x_n^* из окрестности нуля, и, видимо, при $n \to \infty$ имеют место равенства (35) для величин ε_{2n}.

Заключение

В работе изучены аппроксимационные свойства сумм Фейера рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Найдено интегральное представление для исследуемых сумм (теорема 2), получены оценки сверху для равномерных приближений посредством сумм Фейера непрерывных на отрезке функций в терминах модулей непрерывности (теорема 3). Проведено исследование приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, изучаемыми суммами Фейера. В частности, установлены оценки поточечных и равномерных приближений (теорема 4), найдена асимптотическая оценка мажоранты соответствующих приближений (теорема 6), получено оптимальное значение параметра, обеспечивающее максимальную скорость приближений исследуемой функции суммами Фейера (теорема 7). Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки приближений функции $|x|^s$, $0 < s < 2$, суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева (теорема 5).

Библиографические ссылки

1. Fejér L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Mathematische Annalen.* 1904;58(1–2):51–69. DOI: 10.1007/BF01447779.
2. Lebesgue H. Sur les intégrales singulières. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse. 3e série.* 1909;1:25–117.
3. Bernstein S. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.* Bruxelles: Hayez, imprimeur des Academies Royales; 1912. 104 p.
4. Никольский СМ. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера. *Известия АН СССР. Серия математическая.* 1940;4(6):501–508.
5. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejer means. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1945;51(4):274–278.
6. Новиков ОА, Ровенская ОГ. Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера. *Компьютерные исследования и моделирование.* 2015;7(4):813–819. DOI: 10.20537/2076-7633-2015-7-4-813-819.
7. Ефимов АВ. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1958;22(1):81–116.
8. Лебедь ГК, Авдеенко АА. О приближении периодических функций суммами Фейера. *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1971;35(1):83–92.
9. Джрбашян ММ. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. *Известия Академии наук Армянской ССР. Серия физико-математическая.* 1956;9(7):1–27.
10. Русак ВН. *Рациональные функции как аппарат приближения.* Минск: БГУ им. В. И. Ленина; 1979. 179 с.
11. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. 386 p.
12. Русак ВН. Точные порядки наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки. *Доклады Академии наук СССР.* 1984;279(4):810–812.
13. Русак ВН. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки. *Математический сборник.* 1985;128(4):492–515.
14. Пекарский АА. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке. *Математический сборник.* 1987;133(1):86–102.

15. Смотрицкий КА. Аппроксимация рациональными операторами Валле Пуссена на отрезке. *Труды Института математики НАН Беларуси*. 2001;9:136–139.

16. Ровба ЕА. Рациональные интегральные операторы на отрезке. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 1996;1:34–39.

17. Смотрицкий КА. О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2005;3:64–70.

18. Ровба ЕА. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, рациональными операторами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 1996;40(6):18–22.

19. Ровба ЕА. О приближении рациональными операторами Фейера и Джексона функций ограниченной вариации. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 1998;42(4):13–17.

20. Bernstein S. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degres donnes. *Acta Mathematica.* 1914;37:1–57. DOI: 10.1007/BF02401828.

21. Newman DJ. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Mathematical Journal.* 1964;11(1):11–14. DOI: 10.1307/mmj/1028999029.

22. Буланов АП. Асимптотика для наименьших уклонений $|x|$ от рациональных функций. *Математический сборник.* 1968; 76(118-2):288–303.

23. Вячеславов НС. О приближении функции $|x|$ рациональными функциями. *Математические заметки.* 1974;16(1):163–171.

24. Шталь Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на $[-1, 1]$. *Математический сборник*. 1992;183(8): 85–118.

25. Бернштейн СН. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени. *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1938;2(2):169–190.

26. Freud G, Szabados J. Rational approximation to x^a. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* 1967;18(3–4): 393–399. DOI: 10.1007/BF02280298.

27. Гончар АА. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Математический сборник*. 1967;73(4):630–638.

28. Вячеславов Н. Об аппроксимации x^a рациональными функциями. *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1980; 44(1):92–109.

29. Stahl HR. Best uniform rational approximation of x^a on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1993;28(1):116–122.

30. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to x^a at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory.* 2013;65:70–82. DOI: 10.1016/j.jat.2012.09.005.

31. Райцин РА. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье – Чебышева. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1980;3:45–49.

32. Rouba Y, Patseika P, Smatrytski K. On one system of rational Chebyshev – Markov fractions. *Analysis Mathematica.* 2018; 44(1):115–140. DOI: 10.1007/s10476-018-0110-7.

33. Натансон ИП. *Конструктивная теория функций.* Москва: ГИТТЛ; 1949. 684 с.

34. Тиман АФ. *Теория приближений функций действительного переменного.* Москва: ГИФМЛ; 1960. 624 с.

35. Титчмарш Е. *Теория функций*. Москва: Наука; 1980. 463 с.

36. Ровба ЕА, Поцейко ПГ. Аппроксимация функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами рационального ряда Фурье – Чебышева. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2019;9(3):16–28.

37. Сидоров ЮВ, Федорюк МВ, Шабунин МИ. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* Москва: Наука; 1989. 480 с.

38. Евграфов МА. *Асимптотические оценки и целые функции*. Москва: Наука; 1979. 320 с.

39. Федорюк МВ. *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва: Наука; 1987. 544 с.

40. Copson ET. *Asymptotic Expansions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1965. 124 p. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; no. 55).

References

1. Fejér L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Mathematische Annalen.* 1904;58(1–2):51–69. DOI: 10.1007/BF01447779.

2. Lebesgue H. Sur les intégrales singulières. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse. 3e série.* 1909;1:25–117.

3. Bernstein S. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.* Bruxelles: Hayez, imprimeur des Academies Royales; 1912. 104 p.

4. Nikol'skii SM. [On the asymptotic behavior of the remainder under approximation of functions satisfying the Lipschitz condition, by fejér sums]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya.* 1940;4(6):501–508. Russian.

5. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejer means. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1945;51(4):274–278.

6. Novikov OA, Rovenska OG. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie.* 2015;7(4):813–819. Russian. DOI: 10.20537/2076-7633-2015-7-4-813-819.

7. Efimov AV. [On the approximation of some classes of continuous functions by Fourier sums and Fejer sums]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya.* 1958;22(1):81–116. Russian.

8. Lebed' GK, Avdeenko AA. [On the approximation of periodic functions by Fejér sums]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1971;35(1):83–92. Russian.

9. Dzhrbashyan MM. [On the theory of Fourier series on rational functions]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya fiziko-matematicheskaya.* 1956;9(7):1–27. Russian.

10. Rusak VN. *Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniya* [Rational functions as an apparatus of approximation]. Minsk: Belorusskii gosudarstvennyi universitet im. V. I. Lenina; 1979. 179 p. Russian.

11. Petrushev PP, Popov VA. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1987. 386 p.

12. Rusak VN. [Sharp order estimates for best rational approximations in classes of functions representable as convolutions]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 1984;279(4):810–812. Russian.

13. Rusak VN. [Exact order estimates for best rational approximations in classes of functions representable as convolution]. *Matematicheskii sbornik*. 1985;128(4):492–515. Russian.
14. Pekarskii AA. [Chebyshev rational approximations in a circle, on a circle, and on a segment]. *Matematicheskii sbornik*. 1987; 133(1):86–102. Russian.
15. Smotritskii KA. [Approximation by rational operators of Valle Poussin on a segment]. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi.* 2001;9:136–139. Russian.
16. Rovba EA. Rational integral operators on a segment. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 1996;1:34–39. Russian.
17. Smotrytski KA. On the approximation of the convex functions by rational integral operators on the segment. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2005;3:64–70. Russian.
18. Rovba EA. [Approximation of functions differentiable in the Riemann – Liouville sense by rational operators]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 1996;40(6):18–22. Russian.
19. Rovba EA. [On the approximation by rational Fejer and Jackson operators of bounded variation functions]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 1998;42(4):13–17. Russian.
20. Bernstein S. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degres donnes. *Acta Mathematica.* 1914;37:1–57. DOI: 10.1007/BF02401828.
21. Newman DJ. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Mathematical Journal.* 1964;11(1):11–14. DOI: 10.1307/mmj/1028999029.
22. Bulanov AP. [Asymptotics for least deviation of $|x|$ by rational functions]. *Matematicheskii sbornik*. 1968;76(118-2):288–303. Russian.
23. Vyacheslavov NS. [On the approximation of the function $|x|$ by rational functions]. *Matematicheskie zametki.* 1974;16(1): 163–171. Russian.
24. Shtal' G. [Best uniform rational approximation of $|x|$ on $[-1, 1]$. *Matematicheskii sbornik*. 1992;183(8):85–118. Russian.
25. Bernstein SN. [Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynomes de degres tres eleves]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1938;2(2):169–190. Russian.
26. Freud G, Szabados J. Rational approximation to x^a. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* 1967;18(3–4): 393–399. DOI: 10.1007/BF02280298.
27. Gonchar AA. [On the rate of rational approximation of continuous functions with characteristic features]. *Matematicheskii sbornik*. 1967;73(4):630–638. Russian.
28. Vyacheslavov N. [On the approximation of x^a by rational functions]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1980;44(1): 92–109. Russian.
29. Stahl HR. Best uniform rational approximation of x^a on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1993;28(1):116–122.
30. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to x^a at the Chebyshev nodes. *Journal of Approximation Theory.* 2013;65:70–82. DOI: 10.1016/j.jat.2012.09.005.
31. Raitsin RA. [Asymptotic properties of uniform approximations of functions with algebraic features by partial sums of the Fourier – Chebyshev series]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1980;3:45–49. Russian.
32. Rouba Y, Patseika P, Smatrytski K. On one system of rational Chebyshev – Markov fractions. *Analysis Mathematica.* 2018; 44(1):115–140. DOI: 10.1007/s10476-018-0110-7.
33. Natanson IP. *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive theory of functions]. Moscow: GITTL; 1949. 684 p. Russian.
34. Timan AF. *Teoriya priblizhenii funktsii deistvitel'nogo peremennogo* [Theory of approximations of functions of a real variable]. Moscow: GIFML; 1960. 624 p. Russian.
35. Titchmarsh E. *Teoriya funktsii* [Theory of functions]. Moscow: Nauka; 1980. 463 p. Russian.
36. Rovba EA, Potseiko PG. [Approximation of the function $|x|^s$ on the segment $[-1, 1]$ by partial sums of the rational Fourier – Chebyshev series]. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne.* 2019;9(3):16–28. Russian.
37. Sidorov YuV, Fedoryuk MV, Shabunin MI. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka; 1989. 480 p. Russian.
38. Evgrafov MA. *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic estimates and entire functions]. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. Russian.
39. Fedoryuk MV. *Asimptotika. Integraly i ryady* [Asymptotics. Integrals and series]. Moscow: Nauka; 1987. 544 p. Russian.
40. Copson ET. *Asymptotic Expansions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1965. 124 p. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; no. 55).

Статья поступила в редколлегию 14.10.2019.
Received by editorial board 14.10.2019.