УДК 517.956.32

УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КОНЦЕ СТРУНЫ, НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Е. В. УСТИЛКО[1]***, Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Получены достаточные условия согласования зависящих от времени характеристических первых производных в граничном режиме с начальными условиями и более общим уравнением колебаний полуограниченной струны во множествах решений всех целых высших порядков гладкости. Они обобщают найденные ранее достаточные условия согласования в случае аналогичной смешанной задачи для самого простейшего уравнения колебаний струны. Характеристичность нестационарных первых косых производных в граничном режиме означает, что в каждый момент времени они направлены вдоль критической характеристики.

Ключевые слова: смешанная задача; характеристическая первая косая производная; начальные условия; требования гладкости; условия согласования.

Образец цитирования:
Устилко ЕВ, Ломовцев ФЕ. Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;1:30–37.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-30-37

For citation:
Ustilko EV, Lomovtsev FE. Matching conditions for values of characteristic oblique derivative at the end of a string, initial data and right-hand side of the wave equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020; 1:30–37. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-30-37

Авторы:
Екатерина Валерьевна Устилко – аспирантка кафедры математической кибернетики механико-математического факультета. Научный руководитель – Ф. Е. Ломовцев.
Фёдор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Authors:
Ekaterina V. Ustilko, postgraduate student at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
ustilko@tut.by
Fiodar E. Lomovtsev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
lomovcev@bsu.by

MATCHING CONDITIONS FOR VALUES OF CHARACTERISTIC OBLIQUE DERIVATIVE AT THE END OF A STRING, INITIAL DATA AND RIGHT-HAND SIDE OF THE WAVE EQUATION

E. V. USTILKO[a], *F. E. LOMOVTSEV*[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: F. E. Lomovtsev (lomovcev@bsu.by)

Sufficient matching conditions the time-dependent characteristic first derivatives in the boundary mode with the initial conditions and the more general vibration equation of a semi-bounded string are derived in the sets of solutions of all higher order smoothness orders. They generalize the previously found sufficient matching conditions in the case of a similar mixed problem for the simplest string vibration equation. The characteristic of non-stationary first oblique derivatives in the boundary mode means that at each moment of time they are directed along the critical characteristic.

Keywords: mixed problem; characteristic first oblique derivative; initial conditions; smoothness requirements; matching conditions.

Введение

В работе найдены достаточные (при завышенной на единицу гладкости решений) условия согласования нестационарных (зависящих от времени) характеристических первых производных в граничном режиме с начальными условиями и более общим ($a_1 \neq a_2$) уравнением колебаний полуограниченной струны во множествах решений всех целых высших порядков гладкости (см. постановку задачи ниже). Характеристичность этих первых производных (называемых обычно косыми производными) в граничном режиме означает, что в каждый момент времени они направлены вдоль критической характеристики уравнения [1; 2]. Найденные условия согласования обобщают выведенные ранее достаточные условия согласования в случае классических решений аналогичной смешанной задачи [3]. Вместе с требованиями гладкости правой части уравнения, начальных и граничных данных эти условия согласования нужны для гладкости решения указанной смешанной задачи на критической характеристике уравнения.

В дальнейшем полученные условия согласования будут изучены нами на необходимость, т. е. на ослабление требований гладкости, налагаемых на исходные данные (правую часть, начальные и граничные данные), до минимально достаточных. Затем их можно применить для поиска гладкого решения и установления критерия корректности по Адамару вспомогательной характеристической смешанной задачи для более общего ($a_1 \neq a_2$) уравнения колебаний полуограниченной струны во множествах решений всех целых высших порядков гладкости. Работа [4] для простейшего ($a_1 = a_2$) уравнения колебаний ограниченной струны указывает на важность условий согласования вспомогательных характеристических смешанных задач для полуограниченной струны во множествах решений всех высших порядков гладкости, потому что с увеличением значения времени возрастает гладкость всех исходных данных характеристических смешанных задач для ограниченной струны. Наконец, нами планируется использовать «метод вспомогательных смешанных задач для волнового уравнения на полупрямой» из [5], способ корректировки из [6] и эти условия согласования для нахождения устойчивого по правой части уравнения, начальным и граничным данным единственного классического решения смешанной задачи для более общего ($a_1 \neq a_2$) уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных характеристических первых косых производных на ее концах. Указанный метод позволяет выводить в явном виде классические решения и критерии корректности смешанных задач для уравнений колебаний ограниченной струны без продолжений исходных данных задач вне множеств их изначального задания для гиперболических уравнений [7–9], а его аналог – для нестрого гиперболических уравнений [10; 11].

Постановка задачи поиска достаточных условий согласования

На множестве $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ рассматривается характеристическая смешанная задача

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \ (x, t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \ x \in]0, +\infty[, \tag{2}$$

$$\alpha(t)u_t(x, t) + \beta(t)u_x(x, t) + \gamma(t)u(x, t)\big|_{x=0} = \mu(t),\ t \in \left]0, +\infty\right[, \tag{3}$$

где коэффициенты уравнения $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – вещественные постоянные; коэффициенты граничного режима $\alpha(t)$, $\beta(t) = a_1\alpha(t)$, $\gamma(t) \neq 0$ – заданные функции переменной t; исходные данные задачи f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t.

На основе физической интерпретации общего интеграла доказывается так же, как в [1, с. 54–59], что уравнение (1) моделирует вынужденные колебания однородной струны. Эти колебания представляют собой результат наложения прямой и обратной волн, движущихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси Ox со скоростями a_1 и a_2, и воздействия вынуждающей силы с плотностью f. Если $a_1 = a_2$, то струна колеблется в покоящейся среде, не оказывающей сопротивления, и тогда уравнение (1) – общеизвестное уравнение колебаний однородной среды. Если же $a_1 \neq a_2$, то струна колеблется в движущейся, упруго сопротивляющейся однородной среде.

Пусть $C(\Omega)$ – множество непрерывных функций на подмножестве Ω плоскости $\mathbb{R}^2$, $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на Ω, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Уравнение (1) в плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t имеет два различных семейства характеристик: $x - a_1t = C_1$, $x + a_2t = C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[$.

Первая четверть плоскости $G_\infty = \left[0, +\infty\right[\times \left[0, +\infty\right[$ разбивается характеристикой $x = a_1t$ на два множества: $G_- = \left\{(x, t) \in G_\infty : x > a_1t,\ t \geq 0\right\}$ и $G_+ = \left\{(x, t) \in G_\infty : x \leq a_1t,\ x \geq 0\right\}$. В процессе решения аналогичной смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических и нестационарных первых косых производных на ее концах во множестве классических решений $C^2(G_\infty)$ возникает потребность в решении вспомогательной характеристической смешанной задачи (1)–(3) для уравнения колебаний полуограниченной струны во множествах гладких решений $C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$. Согласно алгоритму нахождения единственного и устойчивого по исходным данным f, φ, ψ, μ решения этой вспомогательной задачи сначала ищут решение u_- задачи Коши (1), (2) в G_-, затем решение u_+ соответствующей задачи Пикара в G_+ и с помощью необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования доказывают m раз непрерывную дифференцируемость функций u_-, u_+ на $x = a_1t$. В настоящей работе требуется найти только достаточные условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) на $x = a_1t$ для более гладких решений из $C^{m+1}(G_\infty)$, $m \geq 2$.

Вывод достаточных условий согласования

Для более гладких решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ смешанной задачи (1)–(3) из уравнения (1), начальных условий (2) и граничного режима (3) вытекают очевидные требования гладкости исходных данных:

$$f \in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi \in C^{m+1}\left[0, +\infty\right[,\ \psi \in C^m\left[0, +\infty\right[,\ \mu \in C^m\left[0, +\infty\right[. \tag{4}$$

Полагая $t = 0$ в режиме (3) и первой производной по t от этого режима и вычисляя значения слагаемых их левых частей с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $t = 0$, $x = 0$, получаем для классических решений этой задачи два первых достаточных условия согласования начальных и граничных данных и правой части уравнения:

$$\alpha(0)\left(\psi(0) + a_1\varphi'(0)\right) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{5}$$

$$\alpha'(0)\left(\psi(0) + a_1\varphi'(0)\right) + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)\left(a_2\left(\psi'(0) + a_1\varphi''(0)\right) + f(0, 0)\right) + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0). \tag{6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть в граничном режиме (3) с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma \in C^m(\mathbb{R}_+)$ косая производная является характеристической, т. е. $a_1\alpha(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}_+ = \left[0, +\infty\right[$. Если существует решение $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ смешанной задачи (1)–(3), то для $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^m(\mathbb{R}_+)$, $\mu \in C^m(\mathbb{R}_+)$ из (4) верны условия согласования (5), (6) и справедливо

$$\alpha^{(q)}(0)\big(\psi(0)+a_1\varphi'(0)\big)+\gamma^{(q)}(0)\varphi(0)+$$
$$+\,q\Big(\alpha^{(q-1)}(0)\Big(a_2\big(\psi'(0)+a_1\varphi''(0)\big)+f(0,0)\Big)+\gamma^{(q-1)}(0)\psi(0)\Big)+$$
$$+\sum_{i=2}^{q}C_q^i\left(\alpha^{(q-i)}(0)\left(a_2^i\left(\psi^{(i)}(0)+a_1\varphi^{(i+1)}(0)\right)+\sum_{j=0}^{i-1}a_2^j f^{(j;\,i-j-1)}(0,0)\right)+\right.$$
$$+\,\gamma^{(q-i)}(0)\left(a_2\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\left(\psi^{(i-1)}(0)+a_1\varphi^{(i)}(0)\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}f^{(k;\,i-k-2)}(0,0)+(-a_1)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right)\right)=\mu^{(q)}(0),\ q=2,3,\ldots,m. \tag{7}$$

Доказательство. Введем обозначение $\dfrac{\partial^{k+l}u(x,t)}{\partial x^k\partial t^l}=u^{(k;\,l)}(x,t)$. Тогда, учитывая характеристичность режима (3), т. е. $\beta(t)=a_1\alpha(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, его можно записать в виде

$$\left(\alpha(t)\left(u^{(0;1)}(x,t)+a_1u^{(1;0)}(x,t)\right)+\gamma(t)u(x,t)\right)\Big|_{x=0}=\mu(t),\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Продифференцируем q раз граничный режим (8) по переменной t:

$$\sum_{i=0}^{q}C_q^i\left(\alpha^{(q-i)}(t)\left[u^{(0;\,i+1)}(x,t)+a_1u^{(1;\,i)}(x,t)\right]+\gamma^{(q-i)}(t)u^{(0;\,i)}(x,t)\right)\Bigg|_{x=0}=\mu^{(q)}(t), \tag{9}$$

где $C_q^i=\dfrac{q!}{i!(q-i)!}$, $q\ge 2$. Непосредственно из уравнения (1) следует равенство

$$u^{(0;2)}(x,t)=a_1a_2u^{(2;0)}(x,t)+(a_2-a_1)u^{(1;1)}(x,t)+f(x,t)=$$
$$=a_2\left(u^{(1;1)}(x,t)+a_1u^{(2;0)}(x,t)\right)-a_1u^{(1;1)}(x,t)+f(x,t).$$

Дифференцируем это равенство l раз по переменной x и $n-2$ раза по переменной t:

$$u^{(l;\,n)}(x,t)=a_2\left(u^{(l+1;\,n-1)}(x,t)+a_1u^{(l+2;\,n-2)}(x,t)\right)-a_1u^{(l+1;\,n-1)}(x,t)+f^{(l;\,n-2)}(x,t),\ n\ge 2. \tag{10}$$

В выражении в квадратных скобках из (9) запишем производную $u^{(0;\,i+1)}(x,t)$, используя формулу (10) при $l=0$, $n=i+1$:

$$u^{(0;\,i+1)}(x,t)+a_1u^{(1;\,i)}(x,t)=a_2\left(u^{(1;\,i)}(x,t)+a_1u^{(2;\,i-1)}(x,t)\right)-a_1u^{(1;\,i)}(x,t)+$$
$$+\,f^{(0;\,i-1)}(x,t)+a_1u^{(1;\,i)}(x,t)=a_2\left(u^{(1;\,i)}(x,t)+a_1u^{(2;\,i-1)}(x,t)\right)+f^{(0;\,i-1)}(x,t). \tag{11}$$

Можно заметить, что по сравнению с левой частью равенства (11) в его правой части порядок производных от функции u по переменной t снизился на единицу, а порядок производных по переменной x повысился на единицу. Более того, она записана в виде $u^{(1;\,i)}(x,t)+a_1u^{(2;\,i-1)}(x,t)$, аналогичном виду исходного выражения $u^{(0;\,i+1)}(x,t)+a_1u^{(1;\,i)}(x,t)$, $i=\overline{1,q}$. Поэтому и далее будем пользоваться формулами (10) и (11) так, чтобы положительный порядок производных по переменной t от функции u стал не выше 1.

На первом шаге этого процесса с помощью формулы (10) при $l=1$, $n=i$ имеем равенство

$$a_2\left(u^{(1;\,i)}(x,t)+a_1u^{(2;\,i-1)}(x,t)\right)+f^{(0;\,i-1)}(x,t)=$$
$$=a_2^2\left(u^{(2;\,i-1)}(x,t)+a_1u^{(3;\,i-2)}(x,t)\right)+a_2f^{(1;\,i-2)}(x,t)+f^{(0;\,i-1)}(x,t),$$

аналогичное равенству (11). На втором шаге из формулы (10) при $l = 2$, $n = i - 1$ находим

$$a_2^2\left(u^{(2;\,i-1)}(x,\,t) + a_1u^{(3;\,i-2)}(x,\,t)\right) + a_2f^{(1;\,i-2)}(x,\,t) + f^{(0;\,i-1)}(x,\,t) =$$
$$= a_2^3\left(u^{(3;\,i-2)}(x,\,t) + a_1u^{(4;\,i-3)}(x,\,t)\right) + a_2^2f^{(2;\,i-3)}(x,\,t) + a_2f^{(1;\,i-2)}(x,\,t) + f^{(0;\,i-1)}(x,\,t).$$

После i-го шага при $l = i - 1$, $n = 2$ приходим к формуле

$$u^{(0;\,i+1)}(x,\,t) + a_1u^{(1;\,i)}(x,\,t) = a_2^i\left(u^{(i;\,1)}(x,\,t) + a_1u^{(i+1;\,0)}(x,\,t)\right) + \sum_{j=0}^{i-1}a_2^jf^{(j;\,i-j-1)}(x,\,t),\ i \geq 1. \tag{12}$$

В равенстве (9) осталось преобразовать слагаемое $u^{(0;\,i)}(x,\,t)$, $i = \overline{2,\,q}$. Верны следующие соотношения:

$$u^{(0;\,i)}(x,\,t) = u^{(0;\,i)}(x,\,t) + a_1u^{(1;\,i-1)}(x,\,t) - a_1u^{(1;\,i-1)}(x,\,t) =$$
$$= u^{(0;\,i)}(x,\,t) + a_1u^{(1;\,i-1)}(x,\,t) - a_1\left(u^{(1;\,i-1)}(x,\,t) + a_1u^{(2;\,i-2)}(x,\,t)\right) + a_1^2u^{(2;\,i-2)}(x,\,t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{i-2}(-a_1)^k\left[u^{(k;\,i-k)}(x,\,t) + a_1u^{(k+1;\,i-k-1)}(x,\,t)\right] + (-a_1)^{i-1}u^{(i-1;\,1)}(x,\,t). \tag{13}$$

Продифференцируем l раз по x равенство (12) при $i = n - 1$ и получим представления

$$u^{(l;\,n)}(x,\,t) + a_1u^{(l+1;\,n-1)}(x,\,t) =$$
$$= a_2^{n-1}\left(u^{(l+n-1;\,1)}(x,\,t) + a_1u^{(l+n;\,0)}(x,\,t)\right) + \sum_{j=0}^{n-2}a_2^jf^{(l+j;\,n-j-2)}(x,\,t),\ n \geq 2. \tag{14}$$

Для выражения в квадратных скобках из (13) применим формулу (14) при $l = k$, $n = i - k$. Тогда частная производная $u^{(0;\,i)}(x,\,t)$ равна функции

$$\sum_{k=0}^{i-2}(-a_1)^k\left(a_2^{i-k-1}\left[u^{(i-1;\,1)}(x,\,t) + a_1u^{(i;\,0)}(x,\,t)\right] + \sum_{j=0}^{i-k-2}a_2^jf^{(k+j;\,i-k-j-2)}(x,\,t)\right) + (-a_1)^{i-1}u^{(i-1;\,1)}(x,\,t).$$

Поскольку слагаемые в квадратных скобках не зависят от индекса k, то эту функцию можно записать как

$$\left(u^{(i-1;\,1)}(x,\,t) + a_1u^{(i;\,0)}(x,\,t)\right)\sum_{k=0}^{i-2}(-a_1)^k\,a_2^{i-k-1} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{i-2}(-a_1)^k\sum_{j=0}^{i-k-2}a_2^jf^{(k+j;\,i-k-j-2)}(x,\,t) + (-a_1)^{i-1}u^{(i-1;\,1)}(x,\,t).$$

Воспользуемся очевидными равенствами

$$\sum_{k=0}^{i-2}(-a_1)^k\,a_2^{i-k-2} = a_2^{i-2} - a_1a_2^{i-3} + a_1^2a_2^{i-4} - \ldots + (-a_1)^{i-2} = \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2}, \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{i-2}(-a_1)^k\sum_{j=0}^{i-k-2}a_2^jf^{(k+j;\,i-k-j-2)}(x,\,t) =$$
$$= \sum_{s=0}^{i-2}f^{(s;\,i-s-2)}(x,\,t)\sum_{\nu=0}^{s}(-a_1)^\nu\,a_2^{s-\nu} = \sum_{s=0}^{i-2}\frac{a_2^{s+1} - (-a_1)^{s+1}}{a_1 + a_2}f^{(s;\,i-s-2)}(x,\,t)$$

и придем к формуле

$$u^{(0;i)}(x,t)=a_2\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\left(u^{(i-1;1)}(x,t)+a_1u^{(i;0)}(x,t)\right)+$$
$$+\sum_{s=0}^{i-2}\frac{a_2^{s+1}-(-a_1)^{s+1}}{a_1+a_2}f^{(s;i-s-2)}(x,t)+(-a_1)^{i-1}u^{(i-1;1)}(x,t). \qquad (16)$$

Здесь во второй строке равенств (15) мы сначала в соответствующей сумме меняем индекс $s=k+j$, потом суммируем коэффициенты при одинаковых частных производных от f и, наконец, находим значения числовых сумм с помощью первой строки этих равенств.

В левой части (9) к слагаемым суммы для $i\geq 2$ применим формулы (12) и (16) и получим

$$\Bigg(\left(\alpha^{(q)}(t)\left(u^{(0;1)}(x,t)+a_1u^{(1;0)}(x,t)\right)+\gamma^{(q)}(t)u(x,t)\right)+$$
$$+q\left(\alpha^{(q-1)}(t)\left(u^{(0;2)}(x,t)+a_1u^{(1;1)}(x,t)\right)+\gamma^{(q-1)}(t)u^{(0;1)}(x,t)\right)+$$
$$+\sum_{i=2}^{q}C_q^i\left(\alpha^{(q-i)}(t)\left(a_2^i\left(u^{(i;1)}(x,t)+a_1u^{(i+1;0)}(x,t)\right)+\sum_{j=0}^{i-1}a_2^jf^{(j;i-j-1)}(x,t)\right)+\right.$$
$$+\gamma^{(q-i)}(t)\left(a_2\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\left(u^{(i-1;1)}(x,t)+a_1u^{(i;0)}(x,t)\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}f^{(k;i-k-2)}(x,t)+(-a_1)^{i-1}u^{(i-1;1)}(x,t)\right)\right)\right)\Bigg|_{x=0}=\mu^{(q)}(t),\ q\geq 2. \qquad (17)$$

В силу представления (14) при $l=0$, $n=2$ справедливо преобразование

$$u^{(0;2)}(x,t)+a_1u^{(1;1)}(x,t)=a_2\left(u^{(1;1)}(x,t)+a_1u^{(2;0)}(x,t)\right)+f(x,t).$$

Если в (17) воспользоваться этим преобразованием, положить $t=0$ и учесть начальные условия (2), то будем иметь условия согласования (7).

Замечание. Условия согласования (7) при $q=0$ и $q=1$, очевидно, становятся условиями согласования (5) и (6) соответственно. Для функций $u\in C^m(G_\infty)$ условие (7) при $q=m$ определено для $\varphi\in C^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, $\psi,\ \mu\in C^m(\mathbb{R}_+)$, $f\in C^{m-1}(G_\infty)$ и является лишь достаточным, потому что для $u\in C^m(G_\infty)$ эти исходные данные – только $\varphi(x)=u(x,0)\in C^m(\mathbb{R}_+)$, $\psi(0)=u_t(x,0)\in C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$, $f(x,t)=u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-$ $-a_1a_2u_{xx}(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty)$. Для существования слагаемых левой части равенства (7) при $q=m$ не нужна завышенная гладкость $u\in C^{m+1}(G_\infty)$, но хватает минимальной (необходимой) гладкости, а именно $\alpha(0)\varphi^{(m+1)}(0)$, $\alpha(0)\psi^{(m)}(0)\in\mathbb{R}_+$ и существования произведения $\alpha(0)$ и производной по вектору $\vec{\nu}=(a_2,1)$ от соответствующей суммы частных производных порядка $m-2$ от правой части f в начале координат $(0,0)$.

Необходимость этих и более общих требований гладкости для решений $u\in C^m(G_\infty)$ будет строго доказана модификацией метода характеристик [1] в наших следующих исследованиях. В дальнейшем необходимость условий согласования типа (7) характеристической смешанной задачи для решений $u\in C^m(G_\infty)$, $m\geq 2$, получится предельным переходом с гладких функций $u\in C^{m+1}(G_\infty)$ на данные f, φ, ψ, μ с минимально возможной их гладкостью. При $m=2$ это уже сделано в работе [3]. В случае $a_1=a_2=a>0$ и гладкости исходных данных f, φ, ψ, μ, указанной в утверждении, условия согласования (7) совпадают с условиями согласования из критерия корректности вспомогательной смешанной задачи для полуограниченной струны, который использован в [4].

Заключение

В настоящей работе выведены достаточные условия согласования характеристических нестационарных первых производных на конце полуограниченной струны с начальными условиями и более общим одномерным волновым уравнением для решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, $m \geq 2$, этой смешанной задачи. Указанные условия очевидно обеспечивают m раз непрерывную дифференцируемость решения u на критической характеристике $x = a_1 t$ уравнения. В дальнейшем полученные достаточные условия согласования (5)–(7) будут ослаблены до необходимых и использованы для явного вычисления единственного и устойчивого по f, φ, ψ, μ классического решения и вывода критерия корректности по Адамару аналогичной вспомогательной смешанной задачи во множестве решений, принадлежащих $C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$.

Библиографические ссылки

1. Тихонов АН, Самарский АА. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука; 2004. 798 с.

2. Барановская СН, Юрчук НИ. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии. *Дифференциальные уравнения*. 2009;45(8):1188–1191.

3. Ломовцев ФЕ, Устилко ЕВ. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. *Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта*. 2018;4(101):18–28.

4. Ломовцев ФЕ, Точко ТС. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2019;9(2):56–75.

5. Ломовцев ФЕ. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. В: *Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Материалы Международной математической конференции; 7–10 декабря 2015 г.; Минск, Беларусь. Часть 2.* Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2015. с. 74–75.

6. Ломовцев ФЕ. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;3:38–52.

7. Ломовцев ФЕ. Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(8):1128–1132.

8. Ломовцев ФЕ. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2016;1:21–27.

9. Новиков ЕН. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными [диссертация]. Минск: БГУ; 2017. 258 с.

10. Ломовцев ФЕ, Юрчук НИ. Решение начально-краевой задачи для нестрого гиперболического уравнения при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2016;3:51–57.

11. Ломовцев ФЕ. Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными граничными условиями на концах. В: *Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа. Материалы международной конференции; 28 января – 2 февраля 2019 г.; Воронеж, Россия.* Воронеж: Издательский дом ВГУ; 2019. с. 184–185.

References

1. Tikhonov AN, Samarskiy AA. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [The equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka; 2004. 798 p. Russian.

2. Baranovskaya SN, Yurchuk NI. [Mixed problem for the oscillation equation of a string with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2009;45(8):1188–1191. Russian.

3. Lomovtsev FE, Ustilko EV. Correctness criterion of a mixed problem for the general oscillations equation of a semi-bounded string with a non-stationary characteristic of first directional derivative in a boundary condition. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta.* 2018;4(101):18–28. Russian.

4. Lomovtsev FE, Tochko TS. [Mixed problem for the inhomogeneous equation of oscillations of a bounded string for characteristic unsteady first oblique derivatives at the ends]. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne.* 2019;9(2):56–75. Russian.

5. Lomovtsev FE. [The method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string]. In: *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Materialy Mezhdunarodnoi matematicheskoi konferentsii; 7–10 dekabrya 2015 g.; Minsk, Belarus'. Chast' 2* [The sixth Bogdanov readings on ordinary differential equations. Proceedings of the International mathematical conference; 2015 December 7–10; Minsk, Belarus. Part 2]. Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus; 2015. p. 74–75. Russian.

6. Lomautsau FE. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;3:38–52. Russian.

7. Lomovtsev FE. [Solution without extension of the data of the mixed problem for the inhomogeneous oscillation equation of a string with boundary oblique derivatives]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2016;52(8):1128–1132. Russian.

8. Lomovtsev FE. Necessary and sufficient conditions for forced vibrations of a semibounded string with the first characteristic directional derivative in the unsteady boundary condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2016;1:21–27. Russian.

9. Novikov EN. [Mixed problems for the equation of forced oscillations of a bounded string under non-stationary boundary conditions with first and second oblique derivatives] [dissertation]. Minsk: Belarusian State University; 2017. 258 p. Russian.

10. Lomovtsev FE, Yurchuk NI. Initial boundary value problem for the non-strictly hyperbolic equation with mixed boundary conditions in a quadrant. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2016;3:51–57. Russian.

11. Lomovtsev FE. [Correctness criterion of the mixed problem for one parabolic equation on an interval with mixed boundary conditions at the ends]. In: *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy. Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii; 28 yanvarya – 2 fevralya 2019 g.; Voronezh, Rossiya* [Voronezh Winter Mathematical School. Proceedings of the International conference; 2019 January 28 – February 2; Voronezh, Russia]. Voronezh: Voronezh State University Publishing House; 2019. p. 184–185. Russian.

Статья поступила в редколлегию 03.06.2019.
Received by editorial board 03.06.2019.