УДК 539.32:536.2

РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В. В. КОРОЛЕВИЧ [1)]

[1)]*Международный центр современного образования, ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия*

Приводится решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с учетом теплообмена их с внешней средой через основания. Предполагается, что теплофизические характеристики материала пластины не зависят от температуры. На внутреннем контуре пластины поддерживается постоянная температура T_1^*, а на внешнем контуре приложено N равноотстоящих точечных источников тепла с одинаковой температурой T_2^* каждый. Температура пластины больше температуры окружающей среды T_0 ($T_0 < T_1^* < T_2^*$). Полагается, что в тонкой кольцевой пластине температура не меняется по толщине. Внутренние источники тепла в ней отсутствуют. Распределение температур в таких пластинах неосесимметричное. Даны аналитические решения стационарной задачи теплопроводности для кольцевых анизотропных пластин постоянной толщины, обратноконической и конической кольцевых пластин. Для получения решения в общем случае записывается интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода, соответствующее заданному дифференциальному уравнению стационарной теплопроводности для профилированных анизотропных кольцевых пластин. Представляются в явном виде ядра интегрального уравнения для анизотропных кольцевых пластин степенного и экспоненциального профилей. Решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Из-за наличия иррациональных функций в ядрах интегрального уравнения необходимо применять численные методы при нахождении итерированных ядер либо численно решать интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода. Приводится формула расчета температур в анизотропных кольцевых пластинах произвольного профиля.

Ключевые слова: полярно-ортотропная кольцевая пластина; температура; стационарное уравнение теплопроводности; дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; пластина постоянной толщины; обратноконическая пластина; коническая пластина; пластина степенного профиля; пластина экспоненциального профиля.

Образец цитирования:
Королевич ВВ. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;1:47–58.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-47-58

For citation:
Karalevich UV. Solution of nonaxisymmetric stationary problem of heat conductivity for polar-orthotropic ring plate of variable thickness with account of heat transfer with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;1:47–58. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-47-58

Автор:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.

Author:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020;1:47–58
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020;1:47–58

SOLUTION OF NONAXISYMMETRIC STATIONARY PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY FOR POLAR-ORTHOTROPIC RING PLATE OF VARIABLE THICKNESS WITH ACCOUNT OF HEAT TRANSFER WITH EXTERNAL ENVIRONMENT

U. V. KARALEVICH [a]

[a]*International Center of Modern Education, 61 Štěpánská Street, Prague 1, PSČ 110 00, Czech*

The solution of the nonaxisymmetric stationary problem of the heat conductivity for profiled polar-orthotropic annular plates considering the heat exchange with external environment through the bases is presented. Thermophysical characteristics of the material of the plate are assumed to be temperature-independent. A constant temperature T_1^* is maintained on the inner contour of the ring plate and on the outer contour N equidistant point sources of heat with the same temperature T_2^* each are applied. Plate temperature is higher than ambient temperature T_0 ($T_0 < T_1^* < T_2^*$). It is assumed that the temperature does not vary in thickness of a thin ring plate. The temperature values on the contours of the annular plate are given. There are no internal heat sources in the plate. The temperature distribution in such plates will be nonaxisymmetric. Analytical solutions of the stationary heat conductivity problem for the following anisotropic annular plates are presented: the plate of constant thickness, the back conical and the conical plate. The Volterra integral equation of the second kind corresponding to the given differential equation of the stationary heat conductivity for profiled anisotropic annular plates is written to obtain the solution in the general case. The kernels of the integral equation for anisotropic annular plates of power and exponential profiles are given explicitly. The solution of the integral equation is written by using the resolvent. It is indicated that due to the presence of irrational functions in the kernels of the integral equation it is necessary to apply numerical methods in the calculation of iterated kernels or numerically solve the Volterra integral equation of the second kind. A formula for the calculation of temperatures in anisotropic annular plates of an arbitrary profile is given.

Keywords: polar-orthotropic annular plate; temperature; stationary equation of heat conductivity; differential equation; Volterra integral equation of the second kind; plate of a constant thickness; вack conical plate; conical plate; plate of a power profile; plate of an exponential profile.

Введение

В современном энергетическом оборудовании, машиностроительных и авиационных конструкциях, аппаратах пищевой и химической промышленности в качестве составных элементов широко применяются кольцевые пластины из композитных материалов. В процессе работы механизмов эти пластины могут находиться в неоднородных тепловых полях, что приводит к появлению в них дополнительных температурных напряжений, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации указанных конструкций. Для этого надо знать закон распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине. Данная работа посвящена решению такой задачи для указанных анизотропных кольцевых пластин.

Постановка задачи

Рассмотрим анизотропную кольцевую пластину, толщина $h(r)$ которой изменяется вдоль радиуса r по заданному закону. Пластина изготовлена из композитного материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины, и в ее каждой точке имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии.

Пусть на внутреннем контуре ($r = r_0$) пластины поддерживается постоянная температура T_1^*, а на внешнем контуре ($r = R$) приложено N равноотстоящих точечных источников тепла с одинаковой температурой T_2^* каждый. Естественно, идеальных точечных источников тепла в природе нет, и все они имеют какую-то протяженность.

Частично эта задача рассматривалась нами в работе [1], и было получено распределение температуры $T^{\text{внеш}}$ на внешнем контуре в случае, когда N источников тепла приложены на одинаковых дугах длиной l и с соответствующим центральным углом φ ($l = \varphi R$) каждая:

$$T^{\text{внеш}}(R, \theta, \varphi) = NT_2^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\cos Nn\theta\right).$$

Влияние протяженных источников тепла на внешней границе на распределение температуры в анизотропной кольцевой пластине переменной толщины – тема следующих наших исследований.

Температура пластины больше температуры окружающей среды T_0 $(T_0 < T_1^* < T_2^*)$. Внутренних источников тепла в ней не имеется. Тепловое поле в такой полярно-ортотропной кольцевой пластине будет неосесимметричным.

В настоящей работе решается неосесимметричная стационарная задача теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с учетом теплообмена через оба ее основания с внешней средой. Для тонкой кольцевой пластины теплообмен через боковую цилиндрическую поверхность пренебрежимо мал и его можно не учитывать в расчетах. Предполагается, что температура в такой пластине не меняется по толщине. Таким образом, пространственная задача теплопроводности сводится к плоской задаче теплопроводности, содержащей два коэффициента теплопроводности – радиальный λ_r и тангенциальный λ_θ, а также коэффициент теплоотдачи H [2; 3]. Эти коэффициенты полагаются постоянными и не зависящими от температуры.

Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины. Ось z направим вверх.

Уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины $h(r)$ с учетом теплообмена с внешней средой через оба основания пластины запишется в виде [2; 3]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh(r)\lambda_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h(r)\lambda_\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)-2H\left(T(r,\theta)-T_0\right)\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0, \tag{1}$$

где $T(r,\theta)$ – функция температуры в анизотропной кольцевой пластине.

Рассмотрим новую функцию $\Theta(r,\theta)$, которая тоже имеет смысл функции температуры:

$$\Theta(r,\theta)=T(r,\theta)-T_0. \tag{2}$$

В силу выражения (2) уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}+\left(\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}-\frac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Theta(r,\theta)=0. \tag{3}$$

Разложим функцию $\Theta(r,\theta)$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$\Theta(r,\theta)=\Theta_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(r)\cos Nn\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(r)\sin Nn\theta. \tag{4}$$

Здесь первый член $\Theta_0(r)$ разложения (4) учитывает осесимметричную составляющую функции $\Theta(r,\theta)$; слагаемые, содержащие $\cos Nn\theta$, соответствуют симметричным составляющим относительно плоскости $\theta=0$, а слагаемые, содержащие $\sin Nn\theta$, – антисимметричным.

Подстановка разложения (4) в уравнение (3) приводит к бесконечной системе однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases}(n=0)\quad \dfrac{d^2\Theta_0}{dr^2}+\left(\dfrac{h'(r)}{h(r)}+\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{d\Theta_0}{dr}-\dfrac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Theta_0(r)=0, & (5)\\[2ex] \left(n\ge 1,\ j=\overline{1,2}\right)\quad \dfrac{d^2\Theta_n^{(j)}}{dr^2}+\left(\dfrac{h'(r)}{h(r)}+\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{d\Theta_n^{(j)}}{dr}-\left(\dfrac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\dfrac{(Nn)^2}{r^2}+\dfrac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Theta_n^{(j)}(r)=0. & (6)\end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (5), описывающее осесимметричное распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с внешней средой, подробно исследовалось нами в работе [4]. Получим сейчас точные решения дифференциального уравнения (6) для частных случаев профилированных анизотропных кольцевых пластин.

Кольцевая пластина постоянной толщины h_0**.** Дифференциальное уравнение (6) в этом случае примет вид

$$r^2 \frac{d^2\Theta_n^{(j)}}{dr^2} + r\frac{d\Theta_n^{(j)}}{dr} - \left(\frac{2H}{\lambda_r h_0} r^2 + \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}(Nn)^2\right)\Theta_n^{(j)}(r) = 0. \quad (7)$$

Введем новую переменную $x = \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r$ и параметр $\nu(n) = N\sqrt{\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}}n$. Ниже аргумент n у параметра будем опускать. Уравнение (7) сводится к модифицированному уравнению Бесселя

$$x^2 \frac{d^2\Theta_n^{(j)}}{dx^2} + x\frac{d\Theta_n^{(j)}}{dx} - \left(x^2 + \nu^2\right)\Theta_n^{(j)}(x) = 0.$$

Его решение выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода ν-го порядка $I_\nu(x)$ и модифицированную функцию Бесселя 2-го рода ν-го порядка $K_\nu(x)$ (функцию Макдональда) [5]:

$$\Theta_n^{(j)}(x) = C_1^{(j)} I_\nu(x) + C_2^{(j)} K_\nu(x),$$

где $C_1^{(j)}$, $C_2^{(j)}$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Возвращаясь к переменной r, запишем общее решение уравнения (7) в виде

$$\Theta_n^{(j)}(r) = C_1^{(j)} I_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right) + C_2^{(j)} K_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right). \quad (8)$$

Пусть на внешнем контуре анизотропной кольцевой пластины приложены N точечных источников тепла с температурой T_2^* каждый. Как показано в [1], распределение температуры $T^{\text{внеш}}(R, \theta)$ на этом контуре задается тригонометрическим рядом Фурье:

$$T^{\text{внеш}}(R, \theta) = NT_2^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nn\theta\right).$$

Число N источников тепла с температурой T_2^* не может быть произвольным, а ограничивается температурой плавления $T_{\text{плавл}}$ материала пластины. Действительно, $NT_2^* \le T_{\text{плавл}}$, отсюда $N \le \frac{T_{\text{плавл}}}{T_2^*}$. Таким образом, источников тепла на внешнем контуре может быть от 2 до $N_{\max} = \left[\frac{T_{\text{плавл}}}{T_2^*}\right]$, где квадратные скобки означают целую часть дробного выражения.

Получим теперь граничные условия для функции температуры $\Theta(r, \theta)$. Из формулы (2) следует

$$T(r, \theta) = \Theta(r, \theta) + T_0.$$

Подставив в последнее равенство разложение функции $\Theta(r, \theta)$ в тригонометрический ряд Фурье (см. (4)), получим

$$T(r, \theta) = \Theta_0(r) + T_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(r)\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(r)\sin Nn\theta.$$

Для функции $T(r, \theta)$ на границе пластины должны выполняться условия

$$\begin{cases} T(r_0, \theta) = \Theta_0(r_0) + T_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(r_0)\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(r_0)\sin Nn\theta = T^{\text{внутр}}(r_0, \theta) = \\ = T_1^* + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cdot\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cdot\sin Nn\theta, \\ T(R, \theta) = \Theta_0(R) + T_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(R)\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(R)\sin Nn\theta = T^{\text{внеш}}(R, \theta) = \\ = NT_2^* + \sum_{n=1}^{\infty} 2NT_2^*\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cdot\sin Nn\theta. \end{cases}$$

В результате сравнения коэффициентов тригонометрических рядов при одинаковых гармониках левых и правых частей приведенных выражений найдем граничные условия

$$(n=0)\quad \begin{cases}\Theta_0(r_0)=T_1^*-T_0,\\ \Theta_0(R)=NT_2^*-T_0,\end{cases} \tag{9}$$

$$(n\geq 1)\quad \begin{cases}\Theta_n^{(1)}(r_0)=0,\\ \Theta_n^{(1)}(R)=2NT_2^*,\end{cases} \tag{10}$$

$$(n\geq 1)\quad \begin{cases}\Theta_n^{(2)}(r_0)=0,\\ \Theta_n^{(2)}(R)=0.\end{cases} \tag{11}$$

При нулевых граничных условиях (11) однородное дифференциальное уравнение (7) имеет тривиальное решение [6], следовательно, функция $\Theta_n^{(2)}(r)$ равна нулю, т. е. антисимметричная составляющая в разложении (4) для функции $\Theta(r,\theta)$ отсутствует.

Удовлетворим решение (8) граничным условиям (9), (10):

$$(n=0)\quad \begin{cases}C_1^{(0)}I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)+C_2^{(0)}K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)=T_1^*-T_0,\\ C_1^{(0)}I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)+C_2^{(0)}K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)=NT_2^*-T_0,\end{cases} \tag{12}$$

$$(n\geq 1)\quad \begin{cases}C_1^{(1)}I_\nu\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)+C_2^{(1)}K_\nu\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)=0,\\ C_1^{(1)}I_\nu\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)+C_2^{(1)}K_\nu\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)=2NT_2^*.\end{cases} \tag{13}$$

Решая системы алгебраических уравнений (12), (13) методом Крамера, найдем

$$\begin{cases}C_1^{(0)}=\dfrac{1}{\Delta_0}\left(T_1^*K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)-NT_2^*K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)+T_0\left(K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)-K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)\right)\right),\\ C_2^{(0)}=-\dfrac{1}{\Delta_0}\left(T_1^*I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)-NT_2^*I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)+T_0\left(I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)-I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)\right)\right),\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}C_1^{(1)}=-NT_2^*\dfrac{2}{\Delta_\nu}K_\nu\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right),\\ C_2^{(1)}=NT_2^*\dfrac{2}{\Delta_\nu}I_\nu\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right),\end{cases} \tag{15}$$

где Δ_0, Δ_ν – определители 2-го порядка:

$$\Delta_0=I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)-I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right),$$

$$\Delta_\nu=I_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)K_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)-I_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)K_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right).$$

Подставляя в формулу (2) найденные решения (8) с учетом выражений (14), (15) для постоянных $C_1^{(j)}, C_2^{(j)}$ $(j = \overline{1, 2})$, получим распределение температуры $T(r, \theta)$ в полярно-ортотропной кольцевой пластине постоянной толщины h_0 при учете теплообмена с внешней средой:

$$T(r,\theta) = \frac{T_1^*}{\Delta_0}\left(I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right)\right) +$$

$$+\frac{NT_2^*}{\Delta_0}\left(I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)\right) +$$

$$+T_0\left(1 + \frac{1}{\Delta_0}\left(I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)\right)K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_0}\left(K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}R\right) - K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)\right)I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right)\right) -$$

$$-NT_2^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\Delta_\nu}\left[I_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right)K_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right) - I_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r_0\right)K_\nu\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}r\right)\right]\cos N n\theta.$$

Обратноконическая кольцевая пластина. Толщина $h(r)$ этой пластины изменяется вдоль радиуса r по закону $h(r) = h_0\left(\frac{r}{r_0}\right)$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре ($r = r_0$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (6), получим

$$r^2\frac{d^2\Theta_n^{(1)}}{dr^2} + 2r\frac{d\Theta_n^{(1)}}{dr} - \left(\frac{H\sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0}r + \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}(Nn)^2\right)\Theta_n^{(1)}(r) = 0. \quad (16)$$

Обозначим $\frac{H\sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0} = b$, $N\sqrt{\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}}n = \nu(n)$. Тогда (16) запишется в виде

$$r^2\frac{d^2\Theta_n^{(1)}}{dr^2} + 2r\frac{d\Theta_n^{(1)}}{dr} - \left(br + \nu^2\right)\Theta_n^{(1)}(r) = 0. \quad (17)$$

Введем новую функцию $Z_n^{(1)}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)$, которая связана с $\Theta_n^{(1)}(r)$ зависимостью

$$\Theta_n^{(1)}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}Z_n^{(1)}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right). \quad (18)$$

Подстановка выражения (18) в уравнение (17) приводит к модифицированному уравнению Бесселя для функции $Z_n^{(1)}(t)$:

$$t^2\frac{d^2 Z_n^{(1)}}{dt^2} + t\frac{dZ_n^{(1)}}{dt} - \left(t^2 + \mu^2\right)Z_n^{(1)}(t) = 0, \quad (19)$$

где $t = 2\sqrt{b}\sqrt{r}$; $\mu = \mu(n) = \sqrt{1 + 4N^2\left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\right)n^2}$. Ниже аргумент n у параметра $\mu(n)$ будем опускать.

Решение уравнения (19) выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода μ-го порядка $I_{\mu}(t)$ и модифицированную функцию Бесселя 2-го рода μ-го порядка $K_{\mu}(t)$ (функцию Макдональда) [5]:

$$Z_n^{(1)}(t)=\tilde{C}_1^{(1)}I_{\mu}(t)+\tilde{C}_2^{(1)}K_{\mu}(t),$$

где $\tilde{C}_1^{(1)}$, $\tilde{C}_2^{(1)}$ – произвольные постоянные.

Возвращаясь к замене (18), запишем решение уравнения (16):

$$\Theta_n^{(1)}(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(\tilde{C}_1^{(1)}I_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)+\tilde{C}_2^{(1)}K_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right). \tag{20}$$

Постоянные $\tilde{C}_1^{(1)}$, $\tilde{C}_2^{(1)}$ определим из граничных условий (9), (10). Подставляя решения (20) в (9), (10), получим системы алгебраических уравнений относительно неизвестных $\tilde{C}_1^{(0)}$, $\tilde{C}_2^{(0)}$ и $\tilde{C}_1^{(1)}$, $\tilde{C}_2^{(1)}$:

$$(n=0)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{r_0}}\left(\tilde{C}_1^{(0)}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)+\tilde{C}_2^{(0)}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right)=T_1^*-T_0,\\[2ex]\dfrac{1}{\sqrt{R}}\left(\tilde{C}_1^{(0)}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)+\tilde{C}_2^{(0)}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\right)=NT_2^*-T_0,\end{cases} \tag{21}$$

$$(n\ge 1)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{r_0}}\left(\tilde{C}_1^{(1)}I_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)+\tilde{C}_2^{(1)}K_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right)=0,\\[2ex]\dfrac{1}{\sqrt{R}}\left(\tilde{C}_1^{(1)}I_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)+\tilde{C}_2^{(1)}K_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\right)=2NT_2^*.\end{cases} \tag{22}$$

Методом Крамера найдем решение системы алгебраических уравнений (21), (22)

$$\begin{cases}\tilde{C}_1^{(0)}=\dfrac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\left(T_1^*-T_0\right)-\dfrac{\sqrt{R}}{\Delta_2}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\left(NT_2^*-T_0\right),\\[2ex]\tilde{C}_2^{(0)}=-\dfrac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\left(T_1^*-T_0\right)+\dfrac{\sqrt{R}}{\Delta_2}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\left(NT_2^*-T_0\right),\end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases}\tilde{C}_1^{(1)}=-NT_2^*\dfrac{2\sqrt{R}}{\Delta_{\mu}}K_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right),\\[2ex]\tilde{C}_2^{(1)}=NT_2^*\dfrac{2\sqrt{R}}{\Delta_{\mu}}I_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right),\end{cases} \tag{24}$$

где Δ_2, Δ_{μ} – определители 2-го порядка:

$$\Delta_2=I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right),$$

$$\Delta_{\mu}=I_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-I_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_{\mu}\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right).$$

Принимая во внимание решения (20) и выражения (23), (24) для постоянных $\tilde{C}_1^{(j)}$, $\tilde{C}_2^{(j)}$ $(j=\overline{0,1})$, по формуле (2) получим распределение температуры $T(r,\theta)$ в полярно-ортотропной обратноконической кольцевой пластине с учетом теплообмена ее с внешней средой:

$$T(r,\theta)=T_1^*\left(\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right)\right)+$$

$$+NT_2^*\left(\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{R}{r}}\left(I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)-I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right)\right)+$$

$$+T_0\left(1+\frac{1}{\Delta_2}\left(\sqrt{\frac{R}{r}}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)-\sqrt{\frac{r_0}{r}}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\right)I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta_2}\left(\sqrt{\frac{r_0}{r}}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-\sqrt{\frac{R}{r}}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right)-$$

$$-NT_2^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\Delta_2}\sqrt{\frac{R}{r}}\left(I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)-I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right)\cos Nn\theta.$$

Коническая кольцевая пластина. Толщина конической кольцевой пластины задается формулой $h(r)=h_0^*\left(1-\frac{r}{R_1}\right)$, где $h_0^*=\frac{h_0}{1-\frac{r_0}{R_1}}$, $R_1=\frac{h_0R-h_1r_0}{h_0-h_1}$, h_0, h_1 – толщина пластины на внутреннем ($r=r_0$) и внешнем контуре ($r=R$) соответственно ($h_1<h_0$). Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (6), получим

$$\frac{d^2\Theta_n^{(1)}}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1-r}\right)\frac{d\Theta_n^{(1)}}{dr}-\left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{(Nn)^2}{r^2}+\frac{H\sqrt{h_0^{*2}+4R_1^2}}{\lambda_rh_0^*}\frac{1}{R_1-r}\right)\Theta_n^{(1)}(r)=0. \quad (25)$$

Обозначив $\frac{HR_1\sqrt{h_0^{*2}+4R_1^2}}{\lambda_rh_0^*}=b^*$, $N\sqrt{\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}}n=\nu$ и сделав замену переменной $s=\frac{r}{R_1}$, где $s\in[\delta_0,\delta_1]$, $\delta_0=\frac{r_0}{R_1}\geq 0$, $\delta_1=\frac{R}{R_1}\leq 1$, запишем уравнение (25) в виде

$$s^2(1-s)\frac{d^2\Theta_n^{(1)}}{ds^2}+(1-2s)s\frac{d\Theta_n^{(1)}}{ds}-\left(b^*s^2-\nu^2s+\nu^2\right)\Theta_n^{(1)}(s)=0. \quad (26)$$

Введем функции $f(s)=1-s$, $g(s)=1-2s$, $p(s)=-\left(b^*s^2-\nu^2s+\nu^2\right)$ и представим уравнение (26) следующим образом:

$$s^2f(s)\frac{d^2\Theta_n^{(1)}}{ds^2}+sg(s)\frac{d\Theta_n^{(1)}}{ds}+p(s)\Theta_n^{(1)}(s)=0. \quad (27)$$

Точка $s=0$ является регулярной, так как функции $f(s)$, $g(s)$, $p(s)$ разложимы в степенные ряды в окрестности этой точки и $f(0)\neq 0$. Вид решения уравнения (27) в окрестности точки $s=0$ зависит от решения определяющего уравнения [6]:

$$\rho(\rho-1)f(0)+\rho g(0)+p(0)=0.$$

Подставляя конкретные значения функций $f(0)=1$, $g(0)=1$, $p(0)=-\nu^2$ в определяющее уравнение, получим квадратное уравнение для параметра ρ:

$$\rho^2-\nu^2=0.$$

Его корни $\rho_1=\nu$, $\rho_2=-\nu$. Так как разность корней $d=\rho_1-\rho_2=2\nu$ есть не целое число, то решение дифференциального уравнения (26) представимо в виде

$$\Theta_n^{(1)}(s)=\hat{C}_1^{(1)}\Theta_{n,1}^{(1)}(s)+\hat{C}_2^{(1)}\Theta_{n,2}^{(1)}(s), \quad (28)$$

где $\Theta_{n,1}^{(1)}(s)=s^\nu\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(1)}s^k$, $\Theta_{n,2}^{(1)}(s)=s^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}d_k^{(1)}s^k$ – частные решения уравнения (26); $\hat{C}_1^{(1)}$, $\hat{C}_2^{(1)}$ – произвольные постоянные.

Коэффициенты $c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$ степенных рядов определяются из рекуррентных соотношений

$$c_{k+1}^{(1)}=\frac{k(k+1)+\nu(2k+1)}{(k+1)^2+2\nu(k+1)}c_k^{(1)}+\frac{b^*}{(k+1)^2+2\nu(k+1)}c_{k-1}^{(1)},\ k\geq 1,$$

$$c_0^{(1)} = 1 + 2\nu, \; c_1^{(1)} = \nu;$$

$$d_{k+1}^{(1)} = \frac{k(k+1) - \nu(2k+1)}{(k+1)^2 - 2\nu(k+1)} d_k^{(1)} + \frac{b^*}{(k+1)^2 - 2\nu(k+1)} d_{k-1}^{(1)}, \; k \geq 1,$$

$$d_0^{(1)} = 1 - 2\nu, \; d_1^{(1)} = -\nu.$$

Постоянные $\hat{C}_1^{(1)}, \hat{C}_2^{(1)}$ найдем из граничных условий. Подставляя найденное решение (28) в граничные условия (10), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\hat{C}_1^{(1)}, \hat{C}_2^{(1)}$:

$$(n \geq 1) \quad \begin{cases} \hat{C}_1^{(1)} \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_0) + \hat{C}_2^{(1)} \Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_0) = 0, \\ \hat{C}_1^{(1)} \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_1) + \hat{C}_2^{(1)} \Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_1) = 2NT_2^*. \end{cases} \tag{29}$$

Решение системы (29) есть

$$(n \geq 1) \quad \begin{cases} \hat{C}_1^{(1)} = -NT_2^* \dfrac{2}{\Delta_3^{(n)}} \Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_0), \\ \hat{C}_2^{(1)} = NT_2^* \dfrac{2}{\Delta_3^{(n)}} \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_0), \end{cases}$$

где $\Delta_3^{(n)} = \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_0)\Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_1) - \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_1)\Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_0)$ – определитель.

Таким образом, решение (28) запишется в виде

$$\Theta_n^{(1)}(s) = -NT_2^* \frac{2}{\Delta_3^{(n)}} \left(\Theta_{n,1}^{(1)}(s)\Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_0) - \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_0)\Theta_{n,2}^{(1)}(s) \right). \tag{30}$$

Исходя из решения осесимметричной задачи стационарной теплопроводности [4] и решения (30), по формуле (2) получим распределение температуры $T(s, \theta)$ в полярно-ортотропной конической кольцевой пластине при учете теплообмена с внешней средой:

$$T(s, \theta) = \frac{T_1^*}{\Delta_3^{(0)}} \left(\Theta_0^{(1)}(s)\Theta_0^{(2)}(\delta_1) - \Theta_0^{(1)}(\delta_1)\Theta_0^{(2)}(s) \right) - \frac{NT_2^*}{\Delta_3^{(0)}} \left(\Theta_0^{(1)}(s)\Theta_0^{(2)}(\delta_0) - \Theta_0^{(1)}(\delta_0)\Theta_0^{(2)}(s) \right) +$$

$$+ T_0 \left(1 + \frac{1}{\Delta_3^{(0)}} \left(\Theta_0^{(2)}(\delta_0) - \Theta_0^{(2)}(\delta_1) \right) \Theta_0^{(1)}(s) - \frac{1}{\Delta_3^{(0)}} \left(\Theta_0^{(1)}(\delta_0) - \Theta_0^{(1)}(\delta_1) \right) \Theta_0^{(2)}(s) \right) -$$

$$- NT_2^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\Delta_3^{(n)}} \left(\Theta_{n,1}^{(1)}(s)\Theta_{n,2}^{(1)}(\delta_0) - \Theta_{n,1}^{(1)}(\delta_0)\Theta_{n,2}^{(1)}(s) \right) \cos Nn\theta,$$

где $\Theta_0^{(1)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, $\Theta_0^{(2)}(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \right) \ln s + \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k$ – частные решения дифференциального уравнения осесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с учетом теплообмена с внешней средой, коэффициенты a_k, b_k определяются из рекуррентных соотношений [4]; $\Delta_3^{(0)} = \Theta_0^{(1)}(\delta_0)\Theta_0^{(2)}(\delta_1) - \Theta_0^{(1)}(\delta_1)\Theta_0^{(2)}(\delta_0)$ – определитель.

Профилированные анизотропные кольцевые пластины. Для всех остальных полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины общее решение уравнения (6) будем находить с помощью решения соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^2 \Theta_n^{(1)}}{dr^2} = \eta_n^{(1)}(r). \tag{31}$$

Последовательно интегрируя соотношение (31), имеем

$$\frac{d\Theta_n^{(1)}}{dr} = \int_{r_0}^{r} \eta_n^{(1)}(s)ds + \dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0), \ \Theta_n^{(1)}(r) = \int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_n^{(1)}(s)ds + \dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0)(r-r_0) + \Theta_n^{(1)}(r_0). \qquad (32)$$

При выводе выражений (32) использовалась знаменитая формула Дирихле [7; 8]:

$$\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} f(r_n)dr_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r}(r-s)^{n-1} f(s)ds.$$

Подстановка в уравнение (6) вместо функции $\Theta_n^{(1)}(r)$ и ее производных правых частей выражений (31), (32) приводит к линейному интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода для разрешающей функции $\eta_n^{(1)}(r)$:

$$\eta_n^{(1)}(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K_n(r, s)\eta_n^{(1)}(s)ds + f_n^{(1)}(r), \qquad (33)$$

где $\lambda = -1$ есть числовой параметр; $K_n(r, s) = \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} - \left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{(Nn)^2}{r^2} + \frac{H}{\lambda_r}\sqrt{\frac{4}{h^2(r)} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2}\right)(r-s)$ – ядро интегрального уравнения; $f_n^{(1)}(r) = \frac{\partial K_n(r, s)}{\partial s}\Theta_n^{(1)}(r_0) - K_n(r, r_0)\dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0)$ – свободный член интегрального уравнения.

Запишем в явном виде ядра интегрального уравнения (33) для полярно-ортотропных кольцевых пластин степенного и экспоненциального профилей.

Толщина кольцевой пластины степенного профиля задается формулой $h(r) = h_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре ($r = r_0$). Ядро интегрального уравнения (33) в данном случае есть

$$K_n^{\text{ст}}(r, s) = \frac{1-\alpha}{r} - \left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{(Nn)^2}{r^2} + \frac{2H}{\lambda_r h_0}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{h_0}{r_0}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-2\alpha}}\right)(r-s).$$

Для кольцевой пластины *экспоненциального* профиля, толщина которой описывается формулой $h(r) = h_0 e^{\beta\left(\frac{r-r_0}{R}\right)}$, где $\beta = \frac{\ln\left(\frac{h_1}{h_0}\right)}{1-\frac{r_0}{R}}$, h_0, h_1 – толщина пластины на внутреннем ($r = r_0$) и внешнем контуре ($r = R$) соответственно ($h_1 < h_0$), ядро интегрального уравнения (33) есть

$$K_n^{\text{эксп}}(r, s) = \frac{\beta}{R} + \frac{1}{r} - \left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{(Nn)^2}{r^2} + \frac{2H}{\lambda_r h_0^*}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\beta\frac{h_0^*}{R}\right)^2 + e^{-2\beta\left(\frac{r}{R}\right)}}\right)(r-s).$$

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (33) записывается с помощью *резольвенты* $R_n(r, s; \lambda)$ в виде [7]

$$\eta_n^{(1)}(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} R_n(r, s; \lambda) f_n^{(1)}(s)ds + f_n^{(1)}(r). \qquad (34)$$

Здесь функция $R_n(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом, а именно

$$R_n(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_{n, m+1}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_{n, m}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или *итерированные*, *ядра* $K_{n, m}(r, s)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$K_{n,1}(r, s) = K_n(r, s),$$

$$K_{n,2}(r, s) = \int_s^r K_n(r, t) K_{n,1}(t, s) dt,$$

....

$$K_{n,m}(r, s) = \int_s^r K_n(r, t) K_{n,m-1}(t, s) dt.$$

Если свободный член $f_n^{(1)}(r)$ непрерывен на отрезке $[r_0, R]$, а ядро $K_n(r, s)$ непрерывно при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (33) имеет при любом параметре λ ($\lambda \ne 0$) единственное непрерывное решение, определяемое формулой (34).

Из-за наличия иррациональностей в ядрах интегральных уравнений для пластин со степенным и экспоненциальным профилями вычисление интегралов итерированных ядер следует вести численными методами.

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в [8].

Применяя вторую формулу из (32) и граничные условия (10), запишем общее решение уравнения (6) через разрешающую функцию $\eta_n^{(1)}(r)$:

$$\Theta_n^{(1)}(r) = \int_{r_0}^r (r - s)\eta_n^{(1)}(s) ds - \frac{r - r_0}{R - r_0}\int_{r_0}^R (R - s)\eta_n^{(1)}(s) ds + 2NT_2^* \frac{r - r_0}{R - r_0}. \quad (35)$$

Используя решение осесимметричной задачи теплопроводности из [4], решение (35) и разложение (4), по формуле (2) получим следующее распределение температуры $T(r, \theta)$ в профилированной полярно-ортотропной кольцевой пластине с учетом теплообмена с внешней средой:

$$T(r, \theta) = \int_{r_0}^r (r - s)\eta_0(s) ds - \frac{r - r_0}{R - r_0}\int_{r_0}^R (R - s)\eta_0(s) ds + T_1^* \frac{R - r}{R - r_0} + NT_2^* \frac{r - r_0}{R - r_0} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{r_0}^r (r - s)\eta_n^{(1)}(s) ds - \frac{r - r_0}{R - r_0}\int_{r_0}^R (R - s)\eta_n^{(1)}(s) ds + 2NT_2^* \frac{r - r_0}{R - r_0}\right)\cos Nn\theta.$$

Заключение

Найденные точные аналитические решения неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для трех профилей анизотропных кольцевых пластин (постоянной толщины, обратноконической и конической) будут применены при расчете неосесимметричных температурных напряжений для указанных пластин в наших следующих работах аналогично проведенным ранее расчетам осесимметричных температурных напряжений для анизотропных кольцевых пластин переменной толщины [9; 10]. В случае использования в машиностроительных или авиационных конструкциях анизотропных кольцевых пластин с более сложным профилем для расчета температур в них надо применить более общую формулу (36) с численным решением интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода.

Библиографические ссылки

1. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;1:77–87.

2. Уздалев АИ. *Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела.* Саратов: Издательство Саратовского государственного университета; 1967. 168 с.

3. Уздалев АИ, Брюханова ЕН. Уравнение теплопроводности для пластин переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами. В: Уздалев АИ, редактор. *Задачи прикладной теории упругости.* Саратов: Саратовский политехнический институт; 1985. с. 3–7.

4. Королевич ВВ. Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:58–66.

5. Бронштейн ИН, Семендяев КА. *Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.* Москва: Наука; 1981. 721 с.

6. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва: Наука; 1976. 576 с.

7. Краснов МЛ, Киселев АИ, Макаренко ГИ. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями.* Москва: КомКнига; 2007. 192 с.

8. Верлань АФ, Сизиков ВС. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* Киев: Наукова думка; 1986. 543 с.

9. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;1:47–52.

10. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Расчет осесимметричного термосилового изгиба вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;2:44–51.

References

1. Karalevich UV, Medvedev DG. The solution of the nonaxisymmetric stationary problem of heat conduction for the polar-orthotropic annular plate of variable thickness with thermal insulated bases. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;1:77–87. Russian.

2. Uzdalev AI. *Nekotorye zadachi termouprugosti anizotropnogo tela* [Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body]. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta; 1967. 168 p. Russian.

3. Uzdalev AI, Bryukhanova EN. Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermophysical properties. In: Uzdalev AI, editor. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of applied theory of elasticity]. Saratov: Saratovskii politekhnicheskii institut; 1985. p. 3–7. Russian.

4. Karalevich UV. Stationary temperature fields in the anisotropic ring plates of variable thickness considering the heat exchange with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:58–66. Russian.

5. Bronshtein IN, Semendiaev KA. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya VTUZov* [A handbook on mathematics for engineers and students VTUZov]. Moscow: Nauka; 1981. 721 p. Russian.

6. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler; 1942. XXVI + 642 S.

Russian edition: Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow: Nauka; 1976. 576 p.

7. Krasnov ML, Kiselev AI, Makarenko GI. *Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow: KomKniga; 2007. 192 p. Russian.

8. Verlan AF, Sizikov VS. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kyiv: Naukova dumka; 1986. 543 p. Russian.

9. Karalevich UV, Medvedev DG. Solution of the axismmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disc of variable thickness in the rotating thermal field by Volterra integral equation of the second kind. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;1:47–52. Russian.

10. Karalevich UV, Medvedev DG. Calculation of the axisimmetric thermopower bending problem of rotating in the thermal field of the polar-orthotropic disc with variable thickness by Volterra integral equation of the second kind. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;2:44–51. Russian.

Статья поступила в редколлегию 29.01.2020.
Received by editorial board 29.01.2020.