УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ БЫСТРОМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. В. КРАХОТКО[1]***, Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ***[1]***, В. В. ГОРЯЧКИН***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается задача оптимального управления линейной динамической системы с периодическими параметрами. Качественная теория таких задач разработана весьма полно, если период коэффициентов системы не очень мал. В случае малого периода возникают серьезные трудности с интегрированием, поэтому разумно дополнить конструктивные методы решения асимптотическими. Для решения поставленной задачи строится вспомогательная (базовая) задача, при исследовании которой применяется метод усреднения. Получены оценки близости решений исходной и базовой задач.

Ключевые слова: линейные системы; оптимальное управление; системы с малым параметром; асимптотические методы.

OPTIMIZATION OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM WITH PERIODIC CHANGING PARAMETERS

V. V. KRAKHOTKO[a]***, G. P. RAZMYSLOVICH***[a]***, V. V. GORYACHKIN***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: G. P. Razmyslovich (razmysl@bsu.by)

The article deals with the problem of optimal control of a linear dynamic system with periodic parameters. The qualitative theory of such problems is developed very fully if the period of coefficients of the system is not very small. With a small period, there are serious difficulties with integration. Therefore, it is reasonable to supplement the constructive methods of solution with asymptotic ones. The article presents such an approach that the method of averaging is used to construct an auxiliary (basic) problem, estimates of the proximity of solutions to the initial and basic problems are obtained.

Keywords: linear systems; optimal control; systems with small parameters; asymptotic methods.

Образец цитирования:
Крахотко ВВ, Размыслович ГП, Горячкин ВВ. Оптимизация линейной динамической системы с периодическими быстроменяющимися коэффициентами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;1:75–79.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-75-79

For citation:
Krakhotko VV, Razmyslovich GP, Goryachkin VV. Optimization of a linear dynamic system with periodic changing parameters. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;1:75–79. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-75-79

Авторы:
Валерий Васильевич Крахотко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.
Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.
Владимир Владимирович Горячкин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры технологии программирования факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Valerii V. Krakhotko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of optimal control, faculty of applied mathematics and computer science.
krakhotko@bsu.by
Georgii P. Razmyslovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
razmysl@bsu.by
Vladimir V. Goryachkin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of programming technologies, faculty of applied mathematics and computer science.
goryachkin@bsu.by

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной нестационарной системы

$$J(u) = c'x\left(t_1^*\right) \to \max,$$
$$\dot{x}(t) = A_\mu(t)x(t) + bu(t),\ x(t_0) = x_0,\ Hx\left(t_1^*\right) = q,\ |u(t)| \le 1,\ t \in T = \left[t_0,\ t_1^*\right], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}_{m,\,n}$, $b,\ c \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^m$; $A_\mu(\cdot)$ – семейство μ-периодических [1; 2] измеримых матриц-функций размера $n \times n$, $\mu > 0$, причем $\exists\mu_0 > 0$ такое, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{t \in T}\left\|A_\mu(t)\right\| \le L$, $\forall\mu \in (0,\ \mu_0]$; x_0 – заданный n-вектор.

Управление $u(t)$ будем называть допустимым, если оно является кусочно-непрерывной функцией на отрезке T.

Введем в рассмотрение матрицу $A_\mu = \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\mu} A_\mu(t)dt$. Будем также считать, что существует $n \times n$-матрица A такая, что $A = \lim\limits_{\mu \to 0} A_\mu$.

Наряду с задачей (1) рассмотрим усредненную задачу [3]

$$J_1(u) = c'x^*\left(t_1^*\right) \to \max,$$
$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + bu(t),\ x^*(t_0) = x_0,\ Hx^*\left(t_1^*\right) = q,\ |u(t)| \le 1,\ t \in T. \tag{2}$$

Пусть $x(t,\ u)$ и $x^*(t,\ u)$ – решения систем $\dot{x} = A_\mu(t)x + bu$ и $\dot{x}^* = Ax^* + bu$ соответственно при одном и том же управлении $u(t)$.

Оценим норму разности этих решений, а именно $\left\|x(t,\ u) - x^*(t,\ u)\right\|$. В силу (1), (2) имеем

$$\left\|x(t,\ u) - x^*(t,\ u)\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A_\mu(\tau)\left(x(\tau,\ u) - x^*(\tau,\ u)\right)d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t}\left(A_\mu(\tau) - A\right)\left(e^{A(\tau - t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)}bu(s)ds\right)d\tau\right\| = \left\|J_1 + J_2 + J_3\right\|, \tag{3}$$

где $J_1 = \displaystyle\int_{t_0}^{t} A_\mu(\tau)\left(x(\tau,\ u) - x^*(\tau,\ u)\right)d\tau$; $J_2 = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(A_\mu(\tau) - A_\mu\right)\left(e^{A(\tau - t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)}bu(s)ds\right)d\tau$; $J_3 = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\Big(A_\mu -$ $- A\Big)\left(e^{A(\tau - t_0)}x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)}bu(s)ds\right)d\tau$.

Рассмотрим в (3) интеграл J_2 на отрезке T и оценим его. Положим $m = \left[\dfrac{t_1^* - t_0}{\mu}\right]$, $t_k = t_0 + k\mu$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1^*}\left(A_\mu(\tau) - A_\mu\right)\left(e^{A(\tau - t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)}bu(s)ds\right)d\tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(A_\mu(\tau) - A_\mu\right)e^{A(t_k - t_0)}\left(E + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\tau - t_k)^j}{j!}A^j\right)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_k} e^{-A(s - t_0)}bu(s)ds + \right.$$
$$\left. + \int_{t_k}^{\tau} e^{-A(s - t_0)}bu(s)ds\right)d\tau + \int_{t_{m-1}}^{t_1^*}\left(A_\mu(\tau) - A_\mu\right)\left(e^{A(\tau - t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)}bu(s)ds\right)d\tau. \tag{4}$$

В силу определения матриц A_μ и A имеем $\left\|A_\mu(\tau) - A_\mu\right\| \le 2L$, где матричная норма согласована с рассматриваемой векторной нормой. Следовательно,

$$\|J_2\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(A_\mu(\tau) - A_\mu \right) \left(e^{A(\tau - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)} bu(s) ds \right) d\tau \right\| \le \left\| \int_{t_0}^{t_1^*} \left(A_\mu(\tau) - A_\mu \right) \left(e^{A(\tau - t_0)} x_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)} bu(s) ds \right) d\tau \right\| \le \left\| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(A_\mu(\tau) - A_\mu \right) e^{A(t_k - t_0)} \left(E + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\tau - t_k)^j}{j!} A^j \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(x_0 + \int_{t_0}^{t_k} e^{-A(s - t_0)} bu(s) ds + \int_{t_k}^{\tau} e^{-A(s - t_0)} bu(s) ds \right) d\tau \right\| + \left\| \int_{t_{m-1}}^{t_1^*} \left(A_\mu(\tau) - A_\mu \right) \left(e^{A(\tau - t_0)} x_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{t_0}^{\tau} e^{-A(s - t_0)} bu(s) ds \right) d\tau \right\| \le 2Le^{L\left(t_1^* - t_0\right)} \left(t_1^* - t_0 \right) \mu \left(\|b\| + L\left(\|x_0\| + \left(t_1^* - t_0 \right) \|b\| \right) \right) +$$

$$+ 2Le^{L\left(t_1^* - t_0\right)} \left(\|x_0\| + \left(t_1^* - t_0 \right) \|b\| \right) \mu = C_1 \mu,$$

где

$$C_1 = 2Le^{L\left(t_1^* - t_0\right)} \left(t_1^* - t_0 \right) \|b\| + \left(L\left(t_1^* - t_0 \right) + 1 \right) \left(\|x_0\| + \left(t_1^* - t_0 \right) \|b\| \right). \tag{5}$$

Далее интеграл J_3 в (3) на отрезке T оценивается следующим образом:

$$\|J_3\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1^*} \left(A_\mu - A \right) \left(e^{A(\tau - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{A(\tau - s)} bu(s) ds \right) d\tau \right\| \le$$

$$\le e^{L\left(t_1^* - t_0\right)} \left(t_1^* - t_0 \right) \left(\|x_0\| + \left(t_1^* - t_0 \right) \|b\| \right) \left\| A_\mu - A \right\| = C_2 \left\| A_\mu - A \right\|, \tag{6}$$

где $C_2 = e^{L\left(t_1^* - t_0\right)} \left(t_1^* - t_0 \right) \left(\|x_0\| + \left(t_1^* - t_0 \right) \|b\| \right)$.

Итак, из (3) в силу (4)–(6) получим

$$\left\| x(t, u) - x^*(t, \mu) \right\| \le L \int_{t_0}^{t} \left\| x(\tau, u) - x^*(\tau, u) \right\| d\tau + C\left(\mu + \left\| A_\mu - A \right\| \right), \text{ где } C = \max\{C_1, C_2\}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла – Беллмана [4], имеем

$$\left\| x(t, u) - x^*(t, u) \right\| \le C\left(\mu + \left\| A_\mu - A \right\| \right) e^{L\left(t_1^* - t_0\right)} = C_0\left(\mu + \left\| A_\mu - A \right\| \right), \tag{7}$$

где $C_0 = Ce^{L\left(t_1^* - t_0\right)}$.

Пусть $x^0(t) \equiv x\left(t, u^0\right)$, $u^0(t)$ – оптимальная траектория и оптимальное управление в задаче (1) соответственно, а $u^{*0}(t)$ – оптимальное управление в задаче (2), $t \in T$, $x\left(t, u^{*0}\right)$ – траектория системы (1) при управлении $u^{*0}(t)$. Тогда

$$x^0(t) - x\left(t, u^{*0}\right) = \int_{t_0}^{t} A_\mu(\tau) \left(x^0(\tau) - x\left(\tau, u^{*0}\right) \right) d\tau + \int_{t_0}^{t} b\left(u^0(\tau) - u^{*0}(\tau) \right) d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| x^0(t) - x\left(t, u^{*0}\right) \right\| \le L \int_{t_0}^{t} \left\| x^0(\tau) - x\left(\tau, u^{*0}\right) \right\| d\tau + \|b\| \int_{t_0}^{t} \left| u^0(\tau) - u^{*0}(\tau) \right| d\tau. \tag{8}$$

Согласно лемме Гронуолла – Беллмана из (8) получим

$$\left\| x^0(t) - x\left(t, u^{*0}\right) \right\| \le \|b\| e^{L\left(t_1^* - t_0\right)} \int_{t_0}^{t} \left| u^0(\tau) - u^{*0}(\tau) \right| d\tau. \tag{9}$$

Так как $u^0(t)$ и $u^{*0}(t)$ – оптимальные управления в задачах (1) и (2) соответственно, то согласно принципу максимума [5] имеем

$$u^0(t) = \operatorname{sign} \psi'_\mu(t) b,\ u^{*0}(t) = \operatorname{sign} \psi'(t) b,\ t \in T,$$

где $\psi_\mu(t)$ и $\psi(t)$ – решения сопряженных систем $\dot{\psi}_\mu = -A'_\mu(t)\psi_\mu$ и $\dot{\psi} = -A'\psi$ соответственно.

По аналогии с (7) имеет место оценка

$$\left\|\psi_\mu(t) - \psi(t)\right\| = o_\mu(1), \tag{10}$$

здесь $o_\mu(1)$ не зависит от t, $t \in T$.

Обозначим через τ_i, $i = \overline{1, p}$, корни $\psi'(t)b$ на отрезке $\left[t_0, t_1^*\right]$, причем $t_0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p \le t_1^*$, а через k_i – их кратности. Пусть $\max\limits_{i=\overline{1,p}} k_i = k$, $\min\limits_{i=\overline{1,p}} \left|\psi^{(k_i)\prime}(\tau_i)b\right| = 2h$.

В силу непрерывности функций $\psi^{(k_i)\prime}(\tau)b$, $i = \overline{1, p}$, можно указать такое $l > 0$, что

$$\left|\psi^{(k_i)\prime}(\tau)b\right| > h,\ \forall\tau \in \left[\tau_i - l, \tau_i + l\right],\ i = \overline{1, p}. \tag{11}$$

Положим $d = \inf\left|\psi'(\tau)b\right|$, $\tau \notin \left[\tau_i - l, \tau_i + l\right]$, $i = \overline{1, p}$. Тогда $\left|\psi'(\tau)b\right| > d$, $\forall\tau \notin \left[\tau_i - l, \tau_i + l\right]$, $i = \overline{1, p}$.

В окрестности точек τ_i функция $\psi'_\mu(\tau)b$ представима в виде

$$\psi'_\mu(\tau)b = \psi'(\tau)b + \left(\psi'_\mu(\tau)b - \psi'(\tau)b\right) = \psi^{(k_i)\prime}(\tau)b\frac{(\tau - \tau_i)^{k_i}}{k_i!} + o_\mu(1), \tag{12}$$

где $\lim\limits_{\mu\to 0} o_\mu(1) = 0$.

В силу (10) существует такое число $\mu_0 > 0$, что $o_\mu(1) < \min\{d, 1\}$, $\forall\mu \in (0, \mu_0]$. Следовательно, на множестве $\left[t_0, t_1^*\right] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{p}\left[\tau_i - l, \tau_i + l\right]$ нет корней функции $\psi'_\mu(\tau)b$. Тогда из (12) с учетом (11) получим

$$\left|\tau_{\mu i} - \tau_i\right| \le \sqrt[k_i]{\frac{k_i!\,o_\mu(1)}{\psi^{(k_i)\prime}(\tau)b}} \le \sqrt[k_i]{\frac{k_i!\,o_\mu(1)}{h}} \le D\sqrt[k]{o_\mu(1)},$$

где $\tau_{\mu i}$ – корень функции $\psi'_\mu(\tau)b$; $D = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \sqrt[k_i]{\dfrac{k_i!}{n}}$, $k = \max\limits_{i=\overline{1,m}}\{k_i\}$.

Таким образом, $\int\limits_{t_0}^{t}\left|u^0(\tau) - u^{*0}(\tau)\right|d\tau \le 2pD\sqrt[k]{o_\mu(1)}$ и неравенство (9) можно записать в виде

$$\left\|x^0(t) - x\left(t, u^{*0}\right)\right\| \le 2D\|b\|pe^{L\left(t_1^* - t\right)}\sqrt[k]{o_\mu(1)}. \tag{13}$$

На основании вышеизложенного имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть u^0, u^{*0} – оптимальные управления в задачах (1), (2) соответственно, $x(\cdot, u)$, $x^*(\cdot, u)$ – решения основной и усредненной систем, соответствующих допустимому в задаче (2) управлению. Тогда найдутся такие числа $\mu_0 > 0$ и $C > 0$, что справедливы оценки:*

1) $$\left|J\left(u^0\right) - J(u)\right| \le J_1\left(u^{*0}\right) - J_1(u) + C\sqrt[k]{\mu + \left\|A_\mu - A\right\|}, \tag{14}$$

2) $$\left\|Hx\left(t_1^*, u\right) - q\right\| \le C\left(\mu + \left\|A_\mu - A\right\|\right),\ \forall\mu \in (0, \mu_0]. \tag{15}$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что

$$\left|J\left(u^0\right) - J(u)\right| \le \left|J_1\left(u^{*0}\right) - J_1(u)\right| + \left|J\left(u^0\right) - J\left(u^{*0}\right)\right| + \left|J\left(u^{*0}\right) - J_1\left(u^{*0}\right)\right| + \left|J(u) - J_1(u)\right|,$$

$$\left\|Hx\left(t_1^*, u\right) - q\right\| \le \left\|Hx^*\left(t_1^*, u\right) - q\right\| + \|H\|\left\|x\left(t_1^*, u\right) - x^*\left(t_1^*, u\right)\right\|,$$

и воспользоваться оценками (7), (13).

Следствие. *Предположим, что* $A_{\mu}(t) = A + \mu A_1(t, \mu)$, *где* $A \in \mathbb{R}_{n,n}$, $\operatorname{vrai\,max} \left\| A_1(t, \mu) \right\| \leq L$, $\forall \mu \in (0, \mu_0]$. *В этом случае оценки (14), (15) допускают следующие уточнения:*

1) $\left| J\left(u^0\right) - J(u) \right| \leq J_1\left(u^{*0}\right) - J_1(u) + C\sqrt[k]{\mu}$;

2) $\left\| Hx\left(t_1^*, u\right) - q \right\| \leq C\mu$.

Библиографические ссылки

1. Крахотко ВВ. Оптимизация динамических систем управления с быстроменяющимися параметрами. *Доклады Академии наук Белорусской ССР.* 1990;34(7):592–595.
2. Крахотко ВВ, Павлов ВВ. Оптимизация нестационарной линейной системы с быстроменяющимися параметрами. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 1987;2:54–57.
3. Боголюбов НН, Митропольский ЮА. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* Москва: Физматлит; 1963. 407 с.
4. Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.* Москва: Издательство иностранной литературы; 1954. 216 с.
5. Понтрягин ЛС, Болтянский ВГ, Гамкрелидзе РВ, Мищенко ЕФ. *Математическая теория оптимальных процессов.* Москва: Наука; 1978. 392 с.

References

1. Krakhotko VV. [Optimization of dynamic control systems with changing parameters]. *Doklady Akademii nauk Belorusskoi SSR.* 1990;34(7):592–595. Russian.
2. Krakhotko VV, Pavlov VV. [Optimization of linear control systems with changing parameters]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 1987;2:54–57. Russian.
3. Bogolyubov NN, Mitropol'skii YuA. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Fizmatlit; 1963. 407 p. Russian.
4. Bellman R. *Stability theory of differential equations.* New York: McGraw-Hill Book Company; 1953. 179 p.
Russian edition: Bellman R. *Teoriya ustoichivosti reshenii differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury; 1954. 216 p.
5. Pontryagin LS, Boltyanskii VG, Gamkrelidze RV, Mishchenko EF. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka; 1978. 392 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 24.01.2020.
Received by editorial board 24.01.2020.