УДК 519.87

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПОДМНОЖЕСТВА НА ОСНОВЕ ПАРЕТОВСКИХ СЛОЕВ В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

С. В. ЧЕБАКОВ[1]***, Л. В. СЕРЕБРЯНАЯ***[2]

[1]*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь*

Разработан алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце на основе предлагаемой многокритериальной оптимизационной модели. Между элементами множества начальных данных введено двухкритериальное отношение предпочтения и выполнено разбиение этого множества на паретовские слои. Сформулировано понятие глубины недоминирования отдельного паретовского слоя. На его основе приняты условия, при выполнении которых решение задачи о ранце содержит в себе первые паретовские слои, определенные на заданном множестве начальных данных. Представлена структура оптимального подмножества, включающая в себя отдельные паретовские слои. Для построения паретовских слоев во введенном пространстве предпочтений

Образец цитирования:
Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества на основе паретовских слоев в задаче о ранце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:97–104.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-97-104

For citation:
Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding algorithm of optimal subset structure based on the Pareto layers in the knapsack problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:97–104. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-97-104

Авторы:
Сергей Викторович Чебаков – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаборатории вычислительных сетей.
Лия Валентиновна Серебряная – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий факультета компьютерных систем и сетей.

Authors:
Sergey V. Chebakov, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the laboratory of computing networks.
info@chebakov.com
Liya V. Serebryanaya, PhD (engineering), docent; associate professor at the department of software for information technologies, faculty of computer systems and networks.
l_silver@mail.ru

не требуется применение переборных алгоритмов к элементам начального множества. Эти алгоритмы используются при нахождении лишь некоторой части оптимального подмножества, что уменьшает число операций, необходимых для решения рассматриваемой комбинаторной задачи. Метод определения найденных паретовских слоев показывает, что число операций зависит от объема ранца и структуры паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных во введенном двухкритериальном пространстве.

Ключевые слова: задача о ранце; многокритериальная оптимизация; множество Парето; паретовский слой.

FINDING ALGORITHM OF OPTIMAL SUBSET STRUCTURE BASED ON THE PARETO LAYERS IN THE KNAPSACK PROBLEM

S. V. CHEBAKOV[a]***, L. V. SEREBRYANAYA***[b]

[a]*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, 6 Surhanava Street, Minsk 220012, Belarus*
[b]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Broŭka Street, Minsk 220013, Belarus*

Corresponding author: L. V. Serebryanaya (l_silver@mail.ru)

An algorithm is developed for finding the structure of the optimal subset in the knapsack problem based on the proposed multicriteria optimization model. A two-criteria relation of preference between elements of the set of initial data is introduced. This set has been split into separate Pareto layers. The depth concept of the elements dominance of an individual Pareto layer is formulated. Based on it, conditions are determined under which the solution to the knapsack problem includes the first Pareto layers. They are defined on a given set of initial data. The structure of the optimal subset is presented, which includes individual Pareto layers. Pareto layers are built in the introduced preference space. This does not require algorithms for enumerating the elements of the initial set. Such algorithms are used when finding only some part of the optimal subset. This reduces the number of operations required to solve the considered combinatorial problem. The method for determining the found Pareto layers shows that the number of operations depends on the volume of the knapsack and the structure of the Pareto layers, into which the set of initial data in the entered two-criteria space is divided.

Keywords: knapsack problem; multicriteria optimization; Pareto set; Pareto layer.

Введение

В статье предложена двухкритериальная оптимизационная модель решения комбинаторной задачи о ранце со множеством объектов N и заданным объемом T. Любому элементу n_i из множества начальных данных соответствуют две характеристики – величина используемого ресурса t_i, являющаяся частью объема T, и вес v_i. Допустимым будет такое подмножество элементов из N, чья суммарная величина ресурса не превосходит объем ранца T, но при добавлении в подмножество любого элемента из N становится больше T. Среди всех допустимых подмножеств требуется найти оптимальное подмножество Q с максимальным суммарным значением веса. Пусть число элементов во множестве N равно r. Тогда формальное описание задачи о ранце можно представить следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} v_i x_i \to \max, \ \sum_{i=1}^{r} t_i x_i \le T, \ \ x_i \in \{0, 1\},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_r), \ v_i > 0, \ 0 < t_i \le T, \ i = 1, \ldots, r.$$

Методы решения указанной оптимизационной задачи приведены в работах [1; 2]. Предложенные в них способы основаны на различных алгоритмах перебора элементов множества начальных данных. В случаях, когда количество элементов достаточно велико, число операций, необходимых для решения задачи, существенно возрастает. Следовательно, актуальной является разработка алгоритмов, позволяющих нивелировать трудности, возникающие при увеличении количества элементов во множестве начальных данных.

Определена структура оптимального подмножества, включающая в себя при выполнении сформулированных условий элементы отдельных паретовских слоев во введенном двухкритериальном пространстве. Предложенная структура позволяет сформировать часть оптимального подмножества Q без применения алгоритмов перебора. Это может существенно сократить число операций, требуемых для решения рассматриваемой оптимизационной задачи.

Определение глубины недоминирования паретовского слоя

В работе [3] на множестве начальных данных N введено двухкритериальное пространство предпочтений, где координатами каждого элемента n_i из N являются его ресурс t_i и вес v_i. Между любыми двумя элементами $n_1 = (t_1, v_1)$ и $n_2 = (t_2, v_2)$ из N определено следующее транзитивное отношение доминирования.

Определение 1. Элемент n_1 доминирует элемент n_2 тогда и только тогда, когда $t_1 \le t_2$, $v_1 \ge v_2$, $(t_1, v_1) \ne (t_2, v_2)$.

Множество всех недоминируемых элементов на множестве N представляет собой множество Парето на множестве начальных данных N во введенном двухкритериальном пространстве.

Определение 2. Паретовский слой с номером m (обозначим его P_m) представляет собой совокупность недоминируемых элементов на множестве $N' = N \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} P_i$, где P_i – паретовский слой с номером i. Множество Парето, определенное на всем множестве N, является первым паретовским слоем.

Следовательно, для каждого элемента из N, входящего во второй и последующие паретовские слои, существует хотя бы один элемент из предыдущего слоя, который его доминирует.

Определение 3. Верхней критериальной границей некоторого паретовского слоя P_m является вектор L_m^+, чьи координаты представляют собой максимум по предпочтению по каждой координате (наименьшее значение по координате t_i и наибольшее значение по координате v_i) среди всех элементов, образующих этот паретовский слой.

Определение 4. Нижней критериальной границей паретовского слоя P_m является вектор L_m^-, чьи координаты представляют собой минимум по предпочтению по каждой координате (наибольшее значение по координате t_i и наименьшее значение по координате v_i) среди всех элементов данного паретовского слоя.

Из способа построения векторов L_m^+, L_m^- следует, что вектор L_m^+ доминирует все элементы паретовского слоя P_m, а вектор L_m^- доминируется каждым его элементом. В работе [4] доказано утверждение, что верхняя критериальная граница любого паретовского слоя P_i доминирует верхние критериальные границы всех последующих слоев $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_y$, где y – общее число паретовских слоев.

Сформулируем утверждение о доминируемости элементов отдельных паретовских слоев.

Утверждение 1. Для того чтобы каждый элемент паретовского слоя P_m доминировал любой элемент паретовского слоя P_x с бóльшим номером, необходимо и достаточно, чтобы нижняя критериальная граница слоя P_m доминировала верхнюю критериальную границу слоя P_x.

Доказательство. Пусть нижняя критериальная граница слоя P_m доминирует верхнюю критериальную границу слоя P_x. Следовательно, исходя из указанного выше свойства верхних и нижних критериальных границ и транзитивности введенного отношения предпочтения, каждый элемент слоя P_m доминирует любой элемент слоя P_x.

Пусть каждый элемент слоя P_m доминирует любой элемент слоя P_x. Требуется показать, что нижняя критериальная граница слоя P_m доминирует верхнюю критериальную границу слоя P_x. Предположим, что эти критериальные границы находятся между собой в отношении Парето. Тогда по определению 2 существует хотя бы один элемент слоя P_m, чья координата принадлежит нижней критериальной границе слоя P_m. Кроме того, этот элемент находится в паретовском отношении с некоторым элементом слоя P_x, чья координата принадлежит верхней критериальной границе слоя P_x. Это противоречит условию о том, что любой элемент слоя P_m доминирует каждый элемент слоя P_x. Утверждение доказано.

Приведем алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце.

1. Построение паретовских слоев.

2. Определение условий, при выполнении которых множество Парето включается в оптимальное подмножество Q, на основе сформулированного понятия глубины недоминирования паретовского слоя.

3. Нахождение структуры оптимального подмножества.

Рассмотрим более подробно реализацию алгоритма.

На первом шаге осуществляется нахождение множества Парето и всех остальных паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных N во введенном двухкритериальном пространстве.

На втором шаге определяется понятие глубины недоминирования некоторого паретовского слоя. Любой элемент слоя с номером $m + 1$ может либо доминироваться каким-либо элементом предыдущего слоя m, либо находиться с ним в отношении Парето. Для слоя с номером $m + 2$ в слое с номером $m + 1$

могут существовать элементы, которые находятся в отношении Парето. Тогда возможен случай, когда для некоторого элемента из слоя $m + 2$ в паретовском слое с номером m также существует элемент, находящийся с ним в отношении Парето. Согласно утверждению 1 в этом случае нижняя граница слоя с номером m не может доминировать верхнюю границу слоев с номерами $m + 1$ и $m + 2$.

Пусть каждый элемент следующего слоя с номером $m + 3$ доминируется всеми элементами слоя m, т. е. в слое $m + 3$ уже не существует элементов, которые находятся в отношении Парето с элементами слоя m.

Определение 5. Паретовский слой m доминирует паретовский слой $m + i$, $i \geq 1$, если любой элемент слоя m доминирует все элементы слоя $m + i$.

Определение 6. Глубиной недоминирования паретовского слоя с номером m называется количество следующих после m паретовских слоев, которые не доминируются слоем m.

Справедливость утверждения 1 позволяет сделать вывод, что глубина недоминирования паретовского слоя с номером m равняется количеству следующих после m паретовских слоев, верхняя граница которых не доминируется нижней границей слоя m.

Условия включения элементов множества Парето в оптимальное подмножество

В работе [4] показана справедливость следующих отношений. Оптимальное подмножество Q принадлежит множеству W допустимых подмножеств. Первым элементом любого W_i из W должен быть какой-либо элемент из множества Парето во введенном двухкритериальном пространстве. На каждом шаге формирования любого допустимого подмножества W_i выбор очередного элемента должен осуществляться только из соответствующих паретовских множеств X_{ij}, где j – номер выбираемого элемента в формируемом подмножестве W_i. Каждое из паретовских множеств X_{ij} представляет собой набор недоминируемых элементов на всем наборе начальных данных N, за исключением элементов, уже вошедших в формируемое допустимое подмножество W_i [4]. Таким образом, процесс построения допустимых подмножеств W_i из W состоит в нахождении соответствующих паретовских множеств X_{ij} с последующим выбором в них очередного элемента. Этим элементом может быть любой элемент из X_{ij}. По структуре множества X_{ij} могут либо совпадать с некоторым паретовским слоем, либо включать в себя часть элементов одного из нескольких соседних паретовских слоев в соответствии с заданной глубиной недоминирования.

На первом шаге формирования всех W_i множества X_{i1} совпадают и представляют собой множество Парето на наборе начальных данных N. Любой его элемент может быть выбран в качестве первого элемента некоторого допустимого подмножества W_i. Покажем далее, что при выполнении определенных условий все допустимые подмножества W_i из W, каждое из которых должно иметь своим первым элементом некоторый элемент множества Парето, содержат и все остальные его элементы. В этом случае нет необходимости в нахождении паретовских множеств X_{ij}, включающих в себя элементы множества Парето, и можно сразу переходить к рассмотрению элементов второго паретовского слоя.

Предположим, что нижняя критериальная граница множества Парето доминирует верхнюю критериальную границу второго паретовского слоя. Тогда его глубина недоминирования равна 0, и каждый элемент множества Парето доминирует все элементы второго паретовского слоя.

Покажем общую схему построения допустимого подмножества W_1 из W, первым элементом которого будет некоторый элемент w_1 множества Парето. Каждый элемент множества Парето доминирует любой элемент как второго, так и всех последующих паретовских слоев [4]. Тогда второе паретовское множество X_{12}, из которого выполняется выбор очередного элемента подмножества W_1, содержит все элементы множества Парето, кроме w_1. Поскольку существует полная доминируемость элементов второго паретовского слоя, то ни один из его элементов также не может быть включен в следующие множества X_{13}, X_{14}, …, X_{1k}, … до тех пор, пока все элементы множества Парето не войдут в формируемое подмножество W_1.

Пусть первым элементом другого допустимого подмножества W_2 из W будет любой элемент множества Парето, за исключением w_1. Тогда все соответствующие ему множества X_{2j} также будут содержать элементы только множества Парето до тех пор, пока оно полностью не войдет в W_2. Только после этого множества X_{2j}, из которых должен выбираться очередной элемент W_2, могут включать в себя элементы второго паретовского слоя. Аналогичные рассуждения будут справедливы и для всех остальных допустимых подмножеств W_i.

Пусть выполняются следующие условия: сумма ресурса t_i всех элементов множества Парето меньше T и разница между этой суммой и величиной T больше соответствующей координаты верхней критериальной границы второго слоя. Тогда допустимые подмножества W_i из W невозможно построить только из элементов множества Парето, и хотя бы один элемент второго паретовского слоя должен войти в каждое из них. Следовательно, при выполнении этих двух условий и глубине недоминирования, равной 0, все допустимые подмножества W_i из W имеют совпадающую часть, т. е. каждое из них включает в себя все элементы множества Парето.

Предположим, что нижняя критериальная граница множества Парето доминирует верхнюю критериальную границу не второго, а третьего паретовского слоя, т. е. глубина недоминирования множества Парето равна 1. В этом случае все элементы как третьего, так и последующих паретовских слоев доминируются любым элементом множества Парето. Тогда множество X_{12}, из которого должен быть выбран второй элемент для подмножества W_1, содержит все элементы множества Парето, кроме w_1. Пусть во втором паретовском слое существуют элементы, которые доминируются только элементом w_1, а с остальными находятся в отношении Парето. Тогда все указанные элементы второго слоя также принадлежат множеству X_{12} и могут быть включены на следующем шаге в допустимое подмножество W_1.

Пусть сумма ресурса t_i элементов первых двух слоев меньше T. Как следует из способа построения множеств X_{ij}, при глубине недоминирования, равной 1, любое допустимое подмножество из W включает в себя все элементы (или только их часть) первых двух паретовских слоев. Предположим, что разница между этой суммой и величиной T больше значения ресурса t_i верхней критериальной границы третьего слоя. Это означает, что любое допустимое подмножество из W нельзя построить только из элементов первых двух паретовских слоев и каждое из них должно включать в себя хотя бы один элемент третьего паретовского слоя.

Элементы всех множеств X_{ij}, которые формируются в процессе построения допустимых подмножеств из W, должны находиться между собой в паретовском отношении. Поскольку глубина недоминирования множества Парето равна 1, то каждый его элемент доминирует весь третий паретовский слой. Элементы, входящие в различные допустимые подмножества, выбираются только из соответствующих X_{ij}. Следовательно, существование какого-либо множества X_{ij}, которое включает в себя хотя бы один элемент третьего слоя, невозможно, если в него входят элементы множества Парето. Тогда для включения элемента третьего слоя в любое формируемое подмножество W_i из W требуется, чтобы все множество Парето уже вошло в W_i. Значит, каждое подмножество W_i будет включать в себя все множество Парето.

Аналогичные рассуждения о составе множеств X_{ij} будут справедливы и при любом другом значении глубины недоминирования элементов множества Парето. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть глубина недоминирования множества Парето равняется n, $n \geq 0$, и выполняются следующие условия:

а) количество паретовских слоев составляет не менее $n + 2$;

б) величина объема ранца T такова, что сумма ресурса t_i элементов первых $(n + 1)$ паретовских слоев меньше T;

в) разница между суммой ресурса t_i элементов первых $(n + 1)$ паретовских слоев и величиной T больше соответствующей координаты верхней критериальной границы $(n + 2)$ паретовского слоя.

Тогда все элементы множества Парето принадлежат каждому из допустимых подмножеств W_i из W.

Таким образом, учитывая способ формирования паретовских множеств X_{ij} и выполнение условий утверждения 2, оказалось возможным частично сформировать все допустимые подмножества W_i из W.

Поскольку оптимальное подмножество Q представляет собой некоторое W_i, то при выполнении условий утверждения 2 все элементы множества Парето являются также частью подмножества Q.

Представление оптимального подмножества *Q*

На последнем шаге алгоритма определяется структура оптимального подмножества Q. Пусть выполняются условия утверждения 2 и все элементы множества Парето включены в оптимальное подмножество Q. Найдем значение величины $T_1 = T - \sum_{i=1}^{k} t_i$, где k – количество элементов множества Парето. Она представляет собой измененный объем ранца, который должен использоваться при последующем формировании допустимых подмножеств из W. Для дальнейшего построения подмножества Q требуется решить задачу о ранце с объемом T_1 и множеством начальных данных N_1, включающим в себя все паретовские слои, кроме множества Парето. Обозначим эту задачу Z_1. Оптимальное подмножество Q имеет следующий вид:

$$Q = P_0 \bigcup Q_1, \tag{1}$$

где P_0 – множество Парето на множестве начальных данных N, а Q_1 – оптимальное подмножество в задаче Z_1.

Элементы второго паретовского слоя представляют собой множество Парето в задаче Z_1. Для нее требуется сформировать свой набор W допустимых подмножеств, каждое из которых содержит хотя бы один элемент второго паретовского слоя. Набор W включает в себя и подмножество Q_1 [4]. Пусть глубина недоминирования второго паретовского слоя равна некоторой величине n_1. Поскольку элементы второго паретовского слоя являются множеством Парето в задаче Z_1, то для них справедливо утверждение 2. Следовательно, все элементы слоя включаются в решение Q_1 задачи Z_1 и, в соответствии с выражением (1), являются частью оптимального подмножества Q.

Далее определим значение величины $T_2 = T_1 - \sum_{i=1}^{k} t_i$, где k – количество элементов второго паретовского слоя. Рассмотрим задачу о ранце Z_2 с объемом T_2 и множеством начальных данных N_2, представляющим собой все паретовские слои, начиная с третьего. Решение Q_1 задачи Z_1 имеет следующий вид:

$$Q_1 = P_1 \bigcup Q_2, \tag{2}$$

где P_1 – второй паретовский слой, а Q_2 – решение задачи Z_2. Следовательно, выражение (1) примет вид

$$Q = P_0 \bigcup P_1 \bigcup Q_2. \tag{3}$$

Элементы третьего слоя P_2 являются паретовскими элементами для задачи Z_2. Для нее требуется сформировать свой набор W допустимых подмножеств, каждое из которых содержит хотя бы один элемент третьего паретовского слоя. Рассматриваемый набор W включает в себя решение Q_2. Пусть глубина недоминирования третьего паретовского слоя равна собственной величине n_2. Предположим, для величины T_2 и глубины недоминирования n_2 выполняются условия утверждения 2. В результате третий паретовский слой включается в решение Q_2 задачи Z_2 и, в соответствии с выражениями (2) и (3), является частью оптимального подмножества Q.

Аналогичным образом осуществляется расчет величин T_3 и всех последующих T_i, а также анализ соответствующих им задач Z_i. Затем последовательно рассматриваются паретовские слои с заданными значениями глубины недоминирования. При выполнении требуемых условий для величин T_i элементы указанных слоев являются как частью решений Q_i задач Z_i, так и частью оптимального подмножества Q. Анализ слоев продолжается до тех пор, пока для очередного паретовского слоя S оставшийся объем ранца $T_{\text{ост}}$ не будет меньше либо равен суммарному значению ресурса t_i элементов всех паретовских слоев, соответствующих глубине недоминирования слоя S. В результате нарушится одно из условий утверждения 2, и элементы слоя S не смогут войти в формируемые допустимые подмножества W в соответствующей задаче Z_{i+1}. Множество начальных данных N_{i+1} в ней представляет собой элементы всех оставшихся паретовских слоев, начиная с S. Для нахождения решения Q_{i+1} задачи Z_{i+1} необходимо реализовать переборный алгоритм построения всех ее допустимых подмножеств. Нахождение Q_{i+1} задачи Z_{i+1}, а следовательно, и оптимального подмножества Q требует разработки алгоритмов определения множеств W_i, X_{ij} для различных значений глубины недоминирования слоя S и последующих паретовских слоев. Кроме того, на способ формирования множеств W_i, X_{ij} влияет величина объема ранца $T_{\text{ост}}$. Следовательно, данная задача ввиду ее сложности нуждается в отдельном рассмотрении. Тогда оптимальное подмножество Q в задаче о ранце со множеством начальных данных N и объемом T при использовании предложенной двухкритериальной модели может быть представлено следующим образом:

$$Q = \bigcup_{j=0}^{i} P_j \bigcup Q_{i+1}, \tag{4}$$

где P_j – набор первых паретовских слоев, на которые разбивается множество N во введенном двухкритериальном пространстве. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества закончен.

Структура допустимых подмножеств W_i теперь может быть представлена следующим образом:

$$W_i = \bigcup_{j=0}^{k} P_j \bigcup Y_i,$$

где Y_i – некоторое допустимое подмножество задачи Z_{i+1}, а i – их общее количество.

В работе [4] показано, что оптимальное подмножество Q является объединением ряда подмножеств, каждое из которых принадлежит одному из первых паретовских слоев. Однако при этом не были предложены конкретные способы их нахождения. Исходя из выражения (4), данные подмножества могут представлять собой паретовские слои.

Из выражения (4) следует, что для решения первоначальной задачи о ранце требуется решить задачу Z_{i+1} с объемом ранца $T_{\text{ост}}$ и набором начальных данных N_{i+1}. В частном случае эти две задачи могут совпадать. Пусть объем ранца и структура связей элементов первых паретовских слоев таковы, что утверждение 2 не выполняется для элементов множества Парето на множестве начальных данных N. Следовательно, ни один паретовский слой не может быть включен в выражение (4). В этом случае объем ранца T равен величине $T_{\text{ост}}$ и множество начальных данных N совпадает со множеством N_{i+1}, т. е. первоначальная задача о ранце и задача Z_{i+1} имеют одинаковые решения.

Элементы множества Парето в двухкритериальном пространстве предпочтений отвечают следующему соотношению из теории многокритериальной оптимизации [5]: если упорядочить их по возрастанию предпочтения одного из критериев, то по второму критерию они будут следовать друг за другом по убыванию предпочтения. Тогда для построения во введенном двухкритериальном пространстве как множества Парето, так и любого паретовского слоя не требуется применение переборных алгоритмов к элементам начального множества N. Для этого достаточно использовать только алгоритмы поиска в упорядоченных структурах данных. Указанное отличие двухкритериальных пространств от пространств с большей размерностью позволяет утверждать следующее: алгоритмы перебора при нахождении оптимального подмножества Q будут применяться лишь при определении множества Q_{i+1}, представляющего собой только некоторую часть оптимального подмножества Q.

Пусть паретовские слои, которые входят в выражение (4), существуют. Тогда чем меньше величина $T_{\text{ост}}$, тем большая часть оптимального подмножества Q не требует для своего формирования операций перебора элементов начального множества N. Покажем, что величина $T_{\text{ост}}$ зависит от значения глубины недоминирования паретовских слоев, которые вошли в выражение (4). Объем ранца $T_{\text{ост}}$ равен разности между объемом ранца T_i в задаче Z_i и суммой ресурса t_i элементов последнего паретовского слоя P_i, входящего в (4). Величина T_i по утверждению 2 зависит от глубины недоминирования этого слоя. Значение глубины недоминирования слоя и величина T_i находятся в прямо пропорциональной зависимости, а T_i и $T_{\text{ост}}$ – в обратно пропорциональной.

Очевидно, что чем больше паретовских слоев войдет в оптимальное подмножество Q, тем меньше элементов начальных данных будет содержать множество N_{i+1}. Тогда потребуется меньше операций перебора для формирования множества Q_{i+1} при решении задачи Z_{i+1}. На основании предложенного алгоритма число паретовских слоев, вошедших в (4), определяется следующим соотношением: чем больше объем ранца T, тем большее количество паретовских слоев может войти в (4). Это означает, что число операций, необходимых для нахождения оптимального подмножества Q, зависит от заданного объема ранца T и отношений между элементами паретовских слоев. Представление оптимального подмножества Q в виде выражения (4), кроме определения соответствующих паретовских слоев, требует перехода к задаче о ранце Z_{i+1}. Ее множество начальных данных N_{i+1} представляет собой объединение элементов всех оставшихся паретовских слоев, начиная с S. При построении допустимых подмножеств задачи Z_{i+1} сохраняется выбор очередных элементов из некоторых множеств X_{ij}, содержащих элементы данных слоев. Это позволяет предположить, что может существовать паретовский слой, элементы которого, равно как и всех последующих слоев, не могут войти в решение Q_{i+1}. Значит, их можно исключить из рассмотрения при нахождении Q. Определение указанного слоя приведет к максимально возможному сокращению множества N_{i+1}. Алгоритм поиска такого слоя требует отдельного изучения.

Заключение

В статье предложен алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце на основе разработанной многокритериальной оптимизационной модели. Сформулировано понятие глубины недоминирования паретовского слоя. На его основе приняты условия, при выполнении которых оптимальное подмножество Q включает в себя паретовские слои, построенные на множестве начальных данных N во введенном двухкритериальном пространстве. Определена структура оптимального подмножества, из которой следует, что алгоритм перебора элементов множества начальных данных будет использоваться при нахождении лишь части оптимального подмножества Q. Это может привести к уменьшению времени решения комбинаторной задачи. Реализация алгоритма определения паретовских слоев, которые включаются в оптимальное подмножество, показывает следующее. Число операций, требуемых для нахождения структуры оптимального подмножества в задаче о ранце, зависит от объема ранца T и структуры паретовских слоев, на которые разбивается множество N во введенном двухкритериальном пространстве.

Библиографические ссылки

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations.* Chichester: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.
2. Посыпкин МА, Сигал ИХ. Комбинированный параллельный алгоритм решения задачи о ранце. В: *Труды IV Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления»; 27–29 октября 2008 г.; Москва, Россия.* Москва: Институт проблем управления; 2008. с. 177–189.

3. Чебаков СВ. Двухкритериальная модель построения оптимального подмножества альтернатив с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2005;2:112–118.

4. Чебаков СВ, Серебряная ЛВ. Определение структуры оптимального подмножества в задаче о ранце. *Доклады БГУИР.* 2019;6:72–79. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.

5. Kung HT, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the Association for Computing Machinery.* 1975;22(4):469–476.

References

1. Martello S, Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations.* Chichester: John Wiley & Sons; 1990. 308 p.

2. Posypkin MA, Sigal IKh. Parallel combined algorithm for solving knapsack problems. In: *Proceedings of the 4th International conference «Parallel computations and control problems»; 2008 October 27–29; Moscow, Russia.* Moscow: Institute of Control Sciences; 2008. p. 177–189. Russian.

3. Chebakov SV. [Two-criteria model for constructing an optimal subset of alternatives with a maximum total probability of achieving a goal]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2005;2:112–118. Russian.

4. Chebakov SV, Serebryanaya LV. Finding of optimal subset structure in the knapsack problem. *Doklady BGUIR.* 2019;6:72–79. Russian. DOI: 10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.

5. Kung HT, Luccio F, Preparata FP. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the Association for Computing Machinery.* 1975;22(4):469–476.

Статья поступила в редколлегию 06.03.2020.
Received by editorial board 06.03.2020.