УДК 517.938:925

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б. С. КАЛИТИН[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается задача о неустойчивости замкнутого положительно инвариантного множества *M* полудинамической системы на произвольном метрическом пространстве *X*. Второй метод Ляпунова для таких задач разработан достаточно полно в случае, когда множество *M* компактно, а пространство *X* локально компактно. Получены достаточные условия неустойчивости в терминах функций Ляпунова в двух ситуациях: *M* обладает окрестностью положительно устойчивых по Лагранжу полутраекторий; пространство *X* асимптотически компактно в некоторой окрестности множества *M*.

Ключевые слова: полудинамическая система; замкнутое множество; неустойчивость; функция Ляпунова.

ON SOME PROBLEMS OF INSTABILITY IN SEMI-DYNAMICAL SYSTEMS

B. S. KALITINE[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The problem of instability of a closed positively invariant set *M* of a semi-dynamical system on an arbitrary metric space *X* is considered. The Lyapunov's direct method for such problems has been developed quite completely in the case when *M* is compact and *X* is locally compact. In this article, we obtain sufficient conditions for instability in terms of Lyapunov functions in two situations: *M* has a neighbourhood of positive Lagrange stable semi-trajectories; the space *X* is asymptotically compact in some neighbourhood of *M*.

Keywords: semi-dynamical system; closed set; instability; Lyapunov function.

Введение

А. М. Ляпунов [1] оставил в наследие две широко известные теоремы о неустойчивости равновесия неавтономных дифференциальных уравнений с использованием вспомогательных функций (первая теорема о неустойчивости и вторая теорема о неустойчивости). Н. Г. Четаев [2, с. 34] обобщил их, сформулировав теорему, из которой обе теоремы Ляпунова следуют как частный случай. Позднее усиление первой теоремы Ляпунова – Четаева получено для периодических [3, с. 84] и почти периодических [4] дифференциальных уравнений. Развитие первой теоремы о неустойчивости для неавтономных дифференциальных уравнений связано с использованием теории предельных уравнений [5; 6] и идеей [7], основанной на привлечении дополнительной функции, оценивающей скорость сходимости решений к множеству, на котором функция Ляпунова обращается в нуль.

Образец цитирования:
Калитин БС. О некоторых проблемах неустойчивости в полудинамических системах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:39–45.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-39-45

For citation:
Kalitine BS. On some problems of instability in semi-dynamical systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:39–45. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-39-45

Автор:
Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:
Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

Свойству неустойчивости замкнутых множеств динамической или полудинамической системы посвящен ряд работ (см. [8–14]), в которых используются арсенал качественных методов топологической динамики и метод функций Ляпунова. Так, например, В. И. Зубов [8, с. 49] предложил обобщение второй теоремы Ляпунова о неустойчивости для замкнутых множеств динамических систем в виде необходимых и достаточных условий.

В данной работе представлены новые результаты, относящиеся к развитию первой теоремы о неустойчивости. В отличие от утверждений монографий [13; 14], где рассматриваются свойства компактных множеств, в настоящей статье получены достаточные условия неустойчивости в терминах функций Ляпунова для замкнутых множеств полудинамических систем на произвольном метрическом пространстве.

Используем обозначения и определения монографий [9; 13–16]:

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{N}$ – множества вещественных, вещественных неотрицательных и натуральных чисел соответственно;
- $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot\rangle}$;
- $B_\alpha = \{x \in X : \|x\| < \alpha\}$, $\alpha > 0$;
- $\mathbf{C}^k(U, W)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций $f : U \to W$;
- $\mathbf{K}$ – множество непрерывных возрастающих функций $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ таких, что $a(0) = 0$;
- $\mathbf{K}^\infty \subset \mathbf{K}$ – подмножество функций $a \in \mathbf{K}$ таких, что если $a(r) \to +\infty$, то $r \to +\infty$;
- X – метрическое пространство с метрикой $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$;
- $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $N \subset X$ и $\alpha > 0$;
- (x_n) – последовательность;
- $x_n \to x$ – последовательность (x_n) сходится к x;
- $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система с фазовым отображением $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$;
- $\pi(x, t) = xt \ \ \forall x \in X$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$;
- аксиомы полудинамической системы:
  (I) $x0 = x$ для каждого $x \in X$;
  (II) $xt(\tau) = x(t + \tau)$ для каждого $x \in X$ и $t, \tau \in \mathbb{R}^+$;
  (III) π непрерывно;
- $\pi_x : \mathbb{R}^+ \to X$ (или $x : t \to xt$) – движение (из $x \in X$);
- если $I \subset \mathbb{R}^+$, $Y \subset X$, $x \in Y$, $t \in I$, то $xI = \{xt : t \in I\}$, $YI = \{xt \in X : x \in Y, t \in I\}$;
- Y из X положительно инвариантно, если $Y\mathbb{R}^+ = Y$;
- $\mathrm{Fr}Y$ и $\overline{Y}$ – граница и замыкание множества Y в X соответственно;
- $\gamma^\pm(x) = x\mathbb{R}^\pm$ – положительная (отрицательная) полутраектория точки $x \in X$;
- $L^+(x) = \{y \in X : xt_n \to y, t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty\}$ – множество ω-предельных точек для $x \in X$;
- $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система, движения определены при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если метрическое пространство X локально компактно, то полудинамическую (динамическую) систему называют локально компактной.

Определение 1. Замкнутое множество M из X называется:

- устойчивым, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall m \in M)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, m) > 0) : B(m, \delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon);$$

- неустойчивым, если оно не является устойчивым, т. е.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists m \in M)(\forall \delta > 0)(\exists p \in B(m, \delta))(\exists t^* > 0) : d(M, pt^*) = \varepsilon.$$

Замечание. Если замкнутое множество M не является положительно инвариантным, то оно очевидно неустойчиво. Поэтому в формулировках представленных ниже утверждений о неустойчивости речь идет лишь о положительно инвариантном замкнутом множестве M.

Метод функций Ляпунова

Сформулируем и докажем в этом разделе ряд новых утверждений о неустойчивости, дополняющих результаты работ [3; 13; 14]. Предварительно напомним следующее.

Лемма [9, p. 66]. *Пусть X – произвольное метрическое пространство, K – подмножество X, $\overline{\gamma^+(x)} \subset K$ (или $\overline{\gamma^-(x)} \subset K$). Предположим $V \in \mathbf{C}(K, \mathbb{R})$ – некоторая функция такая, что $V(xt)$ монотонно изменяется при всех $t \geq 0$ (соответственно при всех $t \leq 0$). Тогда если $L^+(x) \neq \varnothing$ ($L^-(x) \neq \varnothing$), то имеет место равенство $V(y) = V(z)$ $\forall y, z \in L^+(x)$ (соответственно $V(y) = V(z)$ $\forall y, z \in L^-(x)$).*

Представим вариант развития теоремы Красовского о неустойчивости [3, с. 84], используя свойство положительной устойчивости по Лагранжу [17] для отдельных движений в окрестности замкнутого множества M полудинамической системы. Смысл новой идеи состоит в том, что, в отличие от теоремы в [3], на множестве, где производная функции Ляпунова равна нулю, можно допустить существование положительных полутраекторий, но только таких, которые подчинены определенным условиям.

Теорема 1. *Пусть X – произвольное метрическое пространство, M – замкнутое подмножество X. Предположим, что существуют число $\sigma > 0$, окрестность $B(M, \sigma)$ для M, функция $V \in \mathbf{C}(B(M, \sigma), \mathbb{R})$ и функция $a \in$ $\mathbf{K}$ такая, что выполняются следующие условия:*

1) $V(x) \leq a(d(M, x))$ $\forall x \in B(M, \sigma)$;

2) существует $m \in \mathrm{Fr}M$ такое, что для любого $\alpha > 0$ найдется точка $p \in B(m, \alpha)$, для которой $V(p) > 0$ и $\gamma^+(p)$ – относительно компактная полутраектория;

3) $V(xt) \geq V(x)$ $\forall x[0, t] \subset B(M, \sigma) \backslash M$ при $t > 0$;

4) если полутраектория $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$ и $V(\gamma^+(y)) \equiv V(y)$, то либо $d(M, yt) \to 0$ при $t \to +\infty$, либо $d(\mathrm{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0$.

Тогда M неустойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, меньшее σ. В силу предположения 2) можно указать точки $m \in \mathrm{Fr}M$ и $p \in B(m, \delta) \backslash M$ для $0 < \delta < \varepsilon$ такие, что $V(p) > 0$, а полутраектория $\gamma^+(p)$ относительно компактна.

С учетом непрерывности функции V и требования 1) существует число $\mu > 0$, для которого $|V(x)| < V(p)$, если только $d(M, x) < \mu$. Очевидно, можно считать $\mu < \varepsilon$. Отсюда на основании предположения 3), в частности, следует, что движение π_p не может оказаться во множестве $B(M, \mu)$, т. е. $d(pt, x) \geq \mu$ при всех $t > 0$.

Покажем, что точка pt покинет множество $\overline{B(M, \varepsilon)}$ при $t > 0$, что и будет соответствовать неустойчивости M. Действительно, если это не так, то $d(M, pt) < \varepsilon$ $\forall t > 0$. Следовательно, с учетом предыдущих построений и условия $0 < \mu < \varepsilon$ имеем оценки

$$\mu \leq d(M, pt) \leq \varepsilon \ \ \forall t > 0.$$

По предположению замыкание $\overline{\gamma^+(p)}$ есть компактное множество. Значит, на основании утверждения [15, p. 41] ω-предельное множество $L^+(p)$ для полутраектории $\gamma^+(p)$ непусто, компактно, связно и положительно инвариантно. Более того, существует полутраектория $\gamma^+(y) \subset L^+(p)$ для любой точки $y \in L^+(p)$. Так как по построению $L^+(p) \subset \overline{B(M, \varepsilon) \backslash B(M, \mu)} \subset B(M, \sigma)$, то согласно лемме при $y \in L^+(p)$ имеем тождество $V(\gamma^+(y)) \equiv V(y)$ и при этом $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$. Более того, по построению выполняется условие

$$\mu \leq d(M, \gamma^+(y)) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Далее согласно предположению 4) будем иметь один из случаев:

$$d(M, yt) \to 0 \text{ при } t \to +\infty \text{ либо } d(\mathrm{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0.$$

Однако и то и другое невозможно на основании (1) и предположения $\varepsilon < \sigma$. Полученное противоречие и доказывает неустойчивость множества M.

Укажем на возможную модификацию теоремы 1 в пользу практических приложений.

Определение 2. Пусть G – открытое подмножество X, функция $V : \overline{G} \to \mathbb{R}^+$ принадлежит к классу $\mathbf{C}(\overline{G}, \mathbb{R}^+)$. Будем говорить, что функция $V(x)$ дифференцируема вдоль движения π_x, $x \in G$, полудинамической системы $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ (или имеет производную по времени вдоль движения), если для каждой точки $x \in G$ величина $V(xt) - V(x)$ определена для всех достаточно малых $|t| > 0$ и если существует предел

$$\dot{V}(x) = \liminf_{t \to 0} \frac{V(xt) - V(x)}{t}.$$

При этом функцию $\dot{V}(x)$ называют производной по времени функции $V(x)$ вдоль движения π_x в точке x (или просто производной по времени). Более того, функция $V(xt)$ оказывается дифференцируемой по t, и мы будем писать $\dot{V} \in \mathbf{C}(B(M, \sigma), \mathbb{R})$.

Если функция Ляпунова является дифференцируемой, то требование 4) теоремы 1 можно модифицировать, а именно из нее вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения и условия 1), 2) теоремы 1. Тогда если* $\dot{V} \in \mathbf{C}(B(M, \sigma), \mathbb{R})$ *и имеют место условия:*

1) $\dot{V}(x) \geq 0 \ \ \forall x \in B(M, \sigma) \backslash M$*;*

2) если полутраектория $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$ *и* $\dot{V}(\gamma^+(y)) \equiv 0$*, то либо* $d(M, yt) \to 0$ *при* $t \to +\infty$*, либо* $d(\mathrm{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0$*,*

то множество M неустойчиво.

Пример. Пусть динамическая система определяется дифференциальным уравнением Льенара следующего вида:

$$\ddot{x} - 3ax^2\dot{x} - b(\dot{x} - ax^3)^{2p-1} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Покажем, что инвариантное множество $M = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x = \dot{x} = 0\}$ этого уравнения неустойчиво для всех значений параметров $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Перейдем от уравнения (2) к соответствующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 3ax^2y + b(y - ax^3)^{2p-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(y - ax^3)^2,$$

для которой производная по времени в силу системы (3)

$$\dot{V}(x, y) = b(y - ax^3)^{2p}, \ b > 0.$$

Видим, что функция $\dot{V}$ неотрицательна и выполнены условия 1), 2) теоремы 1, а также условие 1) теоремы 2. Покажем, что имеет место оставшееся для проверки условие 2) теоремы 2. С этой целью выпишем множество

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^3\}.$$

Нетрудно проверить, что Y – инвариантное множество системы (3). При этом всякое решение $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, расположенное на этом множестве, удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению $\dot{x} = ax^3$.

Если $a < 0$, то ясно, что $|x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, а значит, и $|y(t)| \equiv |ax^3(t)| \to 0$. Поэтому условие 2) теоремы 2 выполняется для первого из вариантов.

Если же $a > 0$, то $|x(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$, поэтому условие 2) теоремы 2 выполняется для второго из вариантов.

Следовательно, на основании теоремы 2 нулевое решение системы (3) неустойчиво при $a \neq 0$, $b > 0$, что влечет неустойчивость множества M дифференциального уравнения (2).

Наконец, если $a = 0$, то неустойчивость нулевого решения устанавливается непосредственным интегрированием системы (3).

Заметим, что поскольку для данного примера множество Y содержит нетривиальные целые положительные траектории, то теорема Красовского о неустойчивости [3, с. 84] с функцией $V(x, y)$ здесь не может быть использована.

Напомним следующие понятия.

Свойство интегральной непрерывности [17, с. 14]. Для любой точки $x \in X$, любого числа $T > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(xt, yt) < \varepsilon$ при всех $y \in X$ и $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $d(x, y) < \delta$ и $0 \le t \le T$ $(-T \le t \le 0)$.

Определение 3 [18]. Полудинамическая система $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ называется асимптотически компактной на множестве W, если для любой пары последовательностей $(x_n) \subset W$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такой, что $x_n[0, t_n] \in W$ и $t_n \to +\infty$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Примеры асимптотически компактных полудинамических систем для произвольных метрических пространств (не обязательно локально компактных) приведены в [18; 19].

Докажем теперь аналог теоремы о неустойчивости [3, с. 77] для полудинамических систем.

Теорема 3. *Пусть X – произвольное метрическое пространство, M – замкнутое положительно инвариантное подмножество X. Предположим, что существуют число $\Delta > 0$, функция $\dot{V} \in \mathbf{C}(B(M, \Delta), \mathbb{R})$, функции $a \in \mathbf{K}^\infty$ и $b \in \mathbf{K}$ такие, что выполняются следующие условия:*

1) $V(x) \le a(d(M, x))$ $\forall x \in B(M, \Delta)$ и $V(x) = 0$ $\forall x \in M$;

2) множество $G = \{x \in B(M, \Delta) \backslash M : V(x) \ge 0\}$ содержит последовательность $(q_n) \subset B(M, \Delta) \backslash M$ такую, что $V(q_n) = 0$ и $d(M, q_n) \to 0$ при $n \to \infty$;

3) $\dot{V}(x) > b(d(M, x))$ $\forall x \in B(M, \Delta) \backslash M$.

Тогда M неустойчиво.

Если, кроме того, полудинамическая система $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ асимптотически компактна в $\overline{B(M, \Delta)}$, то в области G существует отрицательная полутраектория $\gamma^-(y)$ такая, что:

а) $d(M, \gamma^-(y)) = 0$;

б) $V(yt) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Доказательство. Докажем, что M неустойчиво при выполнении требований 1)–3). Пусть $(q_n) \subset$ $\subset B(M, \Delta) \backslash M$ – последовательность точек, для которых

$$V(q_n) = 0 \text{ и } d(M, q_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В силу предположения 3) имеем $V(q_n t) > 0$ для тех t, при которых $q_n(0, t] \subset B(M, \Delta)$. Покажем, что существует последовательность моментов времени $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такая, что

$$d(M, q_n t) < \Delta \text{ при } 0 \le t < t_n \text{ и } d(M, q_n t_n) = \Delta \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

что и будет соответствовать неустойчивости M. Для этого зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и число $\tau > 0$. Если $d(M, q_n \tau) > \Delta$, то очевидно, что искомое значение t_n, удовлетворяющее (4), найдется, причем $0 < t_n < \tau$.

Предположим теперь, что $d(M, q_n \tau) < \Delta$. По условию 3) теоремы вдоль движения $q_n : t \to q_n t$ при $t \ge \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$, имеем

$$\dot{V}(q_n t) \ge b(d(M, q_n t)). \tag{5}$$

Поскольку функция $V(x)$ непрерывна, причем $V(x) = 0$ $\forall x \in M$, то для числа $V(q_n \tau) = \alpha_n > 0$ на основании предположения 1) существует положительное число $\delta n > 0$, для которого имеет место условие

$$|V(x)| < \alpha_n \text{ при } d(M, x) < \delta_n. \tag{6}$$

С учетом (5) производная $\dot{V}(q_n t)$ неотрицательная, поэтому $V(q_n t) \ge V(q_n \tau)$ при $t \ge \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$. На основании (6) это означает, что $d(M, q_n t) \ge \delta_n$ при $t \ge \tau$, т. е. можем записать

$$b(d(M, q_n t)) \ge b(\delta_n) > 0 \text{ при } t \ge \tau \text{ таких, что } d(M, q_n t) < \Delta.$$

Следовательно, при $t \ge \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$, выполняются соотношения

$$V(q_n t) = V(q_n \tau) + \int_\tau^t \dot{V}(q_n s) ds \ge V(q_n \tau) + \int_\tau^t b(d(M, q_n s)) ds \ge V(q_n \tau) + b(\delta_n)(t - \tau).$$

Отсюда следует, что при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$ правая часть неограниченно возрастает по времени $t > \tau$. С учетом предположения 1) это означает, что при увеличении $t > \tau$ неограниченно возрастает величина $a\left(d\left(M,\ q_n t\right)\right)$. Более того, если $a\left(d\left(M,\ q_n t\right)\right) \to +\infty$, то по свойству функции a имеем $d\left(M,\ q_n t\right) \to +\infty$. В частности, наступит момент $t_n > \tau$, удовлетворяющий (4). Таким образом, последовательность $\left(t_n\right)$ со свойствами (4) существует. Все в совокупности соответствует свойству неустойчивости множества M.

Предположим теперь, что полудинамическая система $\left(X,\ \mathbb{R}^+,\ \pi\right)$ асимптотически компактна в $\overline{B\left(M,\ \Delta\right)}$. Положим $p_n = q_n t_n$ и рассмотрим последовательность точек $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Эта последовательность обладает некоторой предельной точкой y на основании свойства асимптотической компактности. Более того, при выполнении равенства (4) имеем $d\left(M,\ y\right) = \Delta$. Покажем, что полутраектория $\gamma^-\left(y\right)$ и является искомой в области G. Для этого покажем сначала, что она принадлежит множеству G.

Пусть это не так. Тогда можно указать момент $s < 0$ такой, что $ys \notin G$. Поскольку по построению $t_n \to +\infty$ на основании положительной инвариантности M, то для достаточно большого натурального числа $N \in \mathbb{N}$ будем иметь неравенство $t_n + s > 0\ \forall n \geq N$. С учетом сходимости $q_n t_n \to y$ и свойства интегральной непрерывности движений динамических систем для достаточно больших $n \geq N$ точки $q_n\left(t_n + s\right)$ также покидают множество G. Но последнее невозможно в силу (4), поскольку имеет место условие $0 < t_n + s < t_n$. Полученное противоречие показывает, что $\gamma^-\left(y\right) \subset G$.

Докажем теперь утверждение *а*, т. е. что существует последовательность $\left(s_n\right) \subset \mathbb{R}^-$, $s_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, такая, что

$$d\left(M,\ ys_n\right) \to 0 \ \text{ при } s_n \to -\infty. \tag{7}$$

Действительно, если это не так, то можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$d\left(M,\ yt\right) \geq \delta > 0 \ \ \forall t \leq 0. \tag{8}$$

Положим в неравенстве (5) $t = t_n$ и перейдем затем к пределу при $n \to \infty$. Тогда получим неравенство $\dot{V}\left(y\right) \geq b\left(d\left(M,\ y\right)\right)$. Поскольку $\gamma^-\left(y\right) \subset B\left(M,\ \Delta\right) \backslash M,$ то с учетом (8) будет

$$\dot{V}\left(yt\right) \geq b\left(d\left(M,\ yt\right)\right) \geq b\left(\delta\right) > 0 \ \ \forall t \leq 0. \tag{9}$$

Воспользуемся теперь формулой

$$V\left(ys_n\right) = V\left(y\right) + \int_0^t \dot{V}\left(y\tau\right) d\tau.$$

Оценим правую часть этого равенства, используя (9) и тот факт, что $t < 0$. Имеем

$$V\left(yt\right) = V\left(y\right) + \int_0^t \dot{V}\left(ys\right) ds \leq V\left(y\right) + tb\left(\delta\right) \ \ \forall t < 0.$$

Отсюда следует, что при $t \to -\infty$ величина $V\left(yt\right)$ становится отрицательной. Однако по построению полутраектория $\gamma^-\left(y\right) \subset G$, а значит, $V\left(yt\right) \geq 0\ \forall t \leq 0$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, для некоторой последовательности $\left(s_n\right) \subset \mathbb{R}^-$ выполняется условие (7).

Наконец, докажем утверждение *б*. Используя построенную выше последовательность $\left(s_n\right) \subset \mathbb{R}^-$, $s_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, рассмотрим последовательность величин $\left(V\left(ys_n\right)\right) \subset \mathbb{R}^+$. На основании (7), а также условия $V\left(\gamma^-\left(y\right)\right) \geq 0$ и предположения 1) имеем $V\left(ys_n\right) \to 0$. Кроме того, из условия 3) следует, что при заданном y функция $V\left(yt\right)$ (из $\mathbb{R}^-$ в $\mathbb{R}^+$) монотонная, а значит, при $t \to -\infty$ она имеет единственный предел. Это означает, что из предела $V\left(ys_n\right) \to 0$ следует предел $V\left(yt\right) \to 0$ при $t \to -\infty$. Условие *б* доказано.

Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что примером приложения теоремы 3 может служить известная теорема 12.1 [3, с. 77], поскольку любое движение в шаре $B\left(M,\ \Delta\right)$ с компактным инвариантным множеством M локально компактной динамической системы удовлетворяет определению асимптотической компактности.

Библиографические ссылки

1. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1950. 472 с.

2. Четаев НГ. *Устойчивость движения.* 2-е издание. Москва: Гостехиздат; 1955. 207 с.

3. Красовский НН. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1959. 211 с.

4. Kalitine BS, Kalitine PB. On the stability of almost periodic systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2014;1:78–82.

5. Андреев АС. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем. *Прикладная математика и механика.* 1979;43(5):796–805.

6. Калитин БС. Устойчивость неавтономных динамических систем. В: *Актуальные задачи теории динамических систем управления.* Минск: Наука и техника; 1989. с. 37–46.

7. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2017;6:33–43.

8. Зубов ВИ. *Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение).* 2-е издание. Москва: Высшая школа; 1984. 232 с.

9. Bhatia NP, Szegö GP. *Stability theory of dynamical systems.* Berlin: Springer-Verlag; 1970. XII, 225 p.

10. Kellett CM. Classical converse theorems in Lyapunov's second method. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B.* 2015;20(8):2333–2360. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333.

11. Калитин БС. B-устойчивость и проблема Флорио – Сейберта. *Дифференциальные уравнения.* 1999;35(4):453–463.

12. Калитин БС. Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова. *Математические заметки.* 2009;85(3):382–394. DOI: 10.4213/mzm4115.

13. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория).* Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 258 с.

14. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 с.

15. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces.* New York: Springer-Verlag; 1981. 474 p. (Applied mathematical sciences; volume 37). DOI: 10.1007/978-1-4612-5977-0.

16. Сибирский КС, Шубэ АС. *Полудинамические системы (Топологическая теория).* Кишинев: Штиинца; 1987. 272 с.

17. Сибирский КС. *Введение в топологическую динамику.* Кишинев: Редакционно-издательский отдел Академии наук Молдавской ССР; 1970. 144 с.

18. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matemáticas. Serie: Comunicaciones.* 2001;29:11–16.

19. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 73 p.

References

1. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [General problem on stability of motion]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1950. 472 p. Russian.

2. Chetaev NG. *Ustoichivost' dvizheniya* [Stability of motion]. 2nd edition. Moscow: Gostekhizdat; 1955. 207 p. Russian.

3. Krasovskii NN. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1959. 211 p. Russian.

4. Kalitine BS, Kalitine PB. On the stability of almost periodic systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2014;1:78–82.

5. Andreev AS. [On the asymptotic stability and instability of non-autonomous systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1979;43(5):796–805. Russian.

6. Kalitine BS. [Stability of non-autonomous dynamic systems]. In: *Aktual'nye zadachi teorii dinamicheskikh sistem upravleniya* [Actual problems of the theory of dynamic control systems]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1989. p. 37–46. Russian.

7. Kalitine BS. On solving the problems of stability by Lyapunov's direct method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 2017;6:33–43. Russian.

8. Zubov VI. *Ustoichivost' dvizheniya (metody Lyapunova i ikh primenenie)* [Stability of motion (the methods of Lyapunov and their application)]. 2nd edition. Moscow: Vysshaya shkola; 1984. 232 p. Russian.

9. Bhatia NP, Szegö GP. *Stability theory of dynamical systems.* Berlin: Springer-Verlag; 1970. XII, 225 p.

10. Kellett CM. Classical converse theorems in Lyapunov's second method. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B.* 2015;20(8):2333–2360. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333.

11. Kalitine BS. [B-stability and the Florio – Seibert problem]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1999;35(4):453–463. Russian.

12. Kalitine BS. [Instability of closed invariant sets of semi-dynamical systems. The method of semi-definite Lyapunov functions]. *Matematicheskie zametki.* 2009;85(3):382–394. Russian. DOI: 10.4213/mzm4115.

13. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Kachestvennaya teoriya)* [Stability of dynamical systems (Qualitative theory)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 258 p. Russian.

14. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Method of semi-definite Lyapunov functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 p. Russian.

15. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces.* New York: Springer-Verlag; 1981. 474 p. (Applied mathematical sciences; volume 37). DOI: 10.1007/978-1-4612-5977-0.

16. Sibirskii KS, Shube AS. *Poludinamicheskie sistemy (Topologicheskaya teoriya)* [Semi-dynamic systems (Topological theory)]. Kishinev: Shtiintsa; 1987. 272 p. Russian.

17. Sibirskii KS. *Vvedenie v topologicheskuyu dinamiku* [Introduction to topological dynamics]. Kishinev: Redaktsionno-izdatel'skii otdel Akademii nauk Moldavskoi SSR; 1970. 144 p. Russian.

18. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matemáticas. Serie: Comunicaciones.* 2001;29:11–16.

19. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 73 p.

Статья поступила в редколлегию 31.01.2021.
Received by editorial board 31.01.2021.