
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.172.4+519.178

ГРАФЫ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ ЛОМАННЫХ

Н. П. ПРОХОРОВ¹⁾, Е. Н. ДУЛЬ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Введен и изучен такой подкласс струнных графов, как графы самопересечений замкнутых ломанных (класс *СПС*-графов). Указаны необходимые условия принадлежности графа к классу *СПС*, запрещенные подграфы данного класса, операции над графами, сохраняющие их принадлежность к классу *СПС*. Рассмотрен вопрос о существовании k -регулярных *СПС*-графов, в частности найдены пары (k, n) и приведены оценки на количество значений k , при которых существует k -регулярный граф на n вершинах, показано существование бесконечного числа k -регулярных *СПС*-графов для любого $k \in \mathbb{N}$. Исследованы алгоритмические вопросы в классе *СПС*-графов. Доказано, что задачи о доминирующем множестве, раскраске, независимости и наибольшем цикле в классе *СПС*-графов являются *NP*-трудными, а задача распознавания *СПС*-графов принадлежит к классу *PSPACE*.

Ключевые слова: граф пересечений; граф самопересечений замкнутой ломаной; регулярный граф; *NP*-полнота; полиномиальная сводимость.

Образец цитирования:

Прохоров НП, Дуль ЕН. Графы самопересечений замкнутых ломанных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;1:54–68. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-54-68>

For citation:

Prochorov NP, Dul EN. Graphs of intersections of closed polygonal chains. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;1:54–68. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-54-68>

Авторы:

Николай Петрович Прохоров – магистрант кафедры дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, доцент М. М. Васьковский.
Екатерина Николаевна Дуль – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – М. М. Васьковский.

Authors:

Nikolai P. Prochorov, master's degree student at the department of discrete mathematics and algorithmics, faculty of applied mathematics and computer science.
nprohorovmink@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0001-9725-299X>
Ekaterina N. Dul, student at the faculty of applied mathematics and computer science.
ekaterina.dul@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9073-7855>

GRAPHS OF INTERSECTIONS OF CLOSED POLYGONAL CHAINS

N. P. PROCHOROV^a, E. N. DUL^a

^a*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: N. P. Prochorov (nprochorovminsk@mail.ru)

In the paper such subclass of string graphs as intersection graphs of closed polygonal chains (class of *CPC*-graphs) was considered, necessary conditions for belonging to that class, forbidden subgraphs and operations with graphs which preserve belonging to the *CPC* class were found. Considered question about the existence of k -regular *CPC*-graphs, particularly, pairs (k, n) , such that there exists k -regular *CPC*-graph on n vertexes were found, proved that there are infinitely many k -regular *CPC*-graphs for any $k \in \mathbb{N}$, estimations for the number of k , such that k -regular graph on n vertexes exists, were given. Algorithmic questions in the class of *CPC*-graphs were investigated. It was proved that independent and dominating set problems, coloring problem and the problem about maximal cycle are *NP*-hard in the class of *CPC*-graphs, and problem of recognition of the *CPC*-graphs belongs to the *PSPACE* class.

Keywords: intersection graph; intersection graph of closed polygonal chains; regular graph; *NP*-completeness; polynomial-time reduction.

Введение

Струнным графом назовем граф пересечений конечного набора жордановых кривых на плоскости. Каждой кривой сопоставлена вершина графа, две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им кривые пересекаются. Изначально интерес к данной конструкции возник в связи с ее применением для разработки печатных схем и электрических сетей [1], математическое изучение струнных графов началось со статьи Г. Эрлиха, С. Ивена и Р. Тарьяна [2]. Собственным подмножеством струнных графов является класс *SEG*-графов, а именно графов пересечений набора отрезков [2]. Исследование свойств и описание струнных графов, а также их подклассов до сих пор остается открытой задачей. Одним из последних результатов по классу *SEG*-графов стало доказательство гипотезы Шейнермана [3], которая утверждает, что любой планарный граф является *SEG*-графом. Также в статьях [4; 5] исследован сложностной статус задач распознавания *SEG*-графов и струнных графов и показано, что они принадлежат к классу *NP*-трудных задач.

В данной работе введен и исследован класс *CPC*-графов (от англ. *closed polygonal chain*), а именно графов самопересечений замкнутых ломаных. Будем считать, что любые два звена ломаной имеют не более одной общей точки и никакие три звена не пересекаются в одной точке. Под графом самопересечений ломаной R будем понимать граф, множество вершин которого есть множество звеньев ломаной R . Две его вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им звенья пересекаются вне узлов R .

Получены необходимые условия принадлежности графа к классу *CPC*, в частности ограничение на количество ребер, запрещенные порожденные подграфы. Предложены некоторые операции над графами, сохраняющие их принадлежность к *CPC*-графам.

Подробно изучено существование k -регулярных графов в классе *CPC*. Доказано, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много k -регулярных *CPC*-графов, а также приведены достаточные условия существования k -регулярного *CPC*-графа на n вершинах. Получены верхние и нижние оценки на количество регулярных *CPC*-графов на n вершинах.

Показано, что задачи о доминирующем множестве, раскраске, независимости и наибольшем цикле в классе *CPC*-графов являются *NP*-трудными, задача распознавания *CPC*-графа принадлежит к классу *PSPACE*, а построение ломаной с фиксированным графом самопересечений $G \in \text{CPC}$ представляет собой алгоритмически разрешимую задачу.

Вспомогательные результаты

Утверждение 1. Если G является *CPC*-графом, то \bar{G} содержит гамильтонов цикл.

Доказательство. Достаточно заметить, что соседние звенья ломаной не пересекаются вне узлов ломаной, следовательно, соответствующие им вершины графа самопересечений не могут быть смежными.

Представление на плоскости. Через $\mathcal{R}(G)$ обозначим множество всех замкнутых ломаных на плоскости, которые имеют граф самопересечений $G \in \text{CPC}$. Далее ломаную $R \in \mathcal{R}(G)$ для краткости будем называть реализацией *CPC*-графа G .

Теорема 1. В любой реализации *CPC*-графа $G(V, E)$ количество областей, на которые разбивается плоскость, фиксированно и равно $2 + |E|$.

Доказательство. Рассмотрим реализацию $R \in \mathcal{R}(G)$. Ей соответствует плоский граф $P(V_0, E_0)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) множество вершин V_0 есть множество узлов и точек самопересечений ломаной;
- 2) вершины $x, y \in V_0$ смежны тогда и только тогда, когда они соединены отрезком $[x, y]$ на плоскости таким, что никакая вершина $v \in V_0$ не лежит на (x, y) .

Множество областей, на которые реализация R разбивает плоскость, – это множество граней плоского графа P . Количество вершин графа P равно $|V_0| = |V| + |E|$, т. е. суммарному количеству узлов и точек пересечений ломаной. Степень вершины-узла – 2, а вершины, соответствующей точке пересечения, – 4.

Значит, количество ребер графа P равно $|E_0| = \frac{2|V| + 4|E|}{2} = |V| + 2|E|$.

По формуле Эйлера [6] для графа $P(V_0, E_0)$ получаем искомое количество граней.

Запрещенные подграфы. Граф H будем называть запрещенным подграфом для класса графов A в том случае, когда выполнено следствие: если граф G содержит H в качестве порожденного подграфа, то G не принадлежит к классу графов A .

Теорема 2. Граф H является запрещенным подграфом для класса *CPC* тогда и только тогда, когда H не является *SEG*-графом.

Доказательство. Любой порожденный подграф *CPC*-графа является *SEG*-графом. Следовательно, любой запрещенный подграф для класса *SEG* не может быть порожденным подграфом *CPC*-графа.

Если $H \in \text{SEG}$, то пусть H – граф самопересечений набора отрезков $[A_i B_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Последовательно проведем отрезки $[B_i A_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, и отрезок $[B_n A_1]$. Полученная фигура является замкнутой ломаной, а ее граф самопересечений содержит H в качестве порожденного подграфа.

Замечание 1. Существуют бесконечные серии запрещенных подграфов для класса *SEG*, а следовательно, и для *CPC*-графов. Примеры представлены в статьях [2; 7; 8].

Наиболее известный пример не струнного графа – граф на 15 вершинах, полученный из полного графа на 5 вершинах (K_5) подразбиением каждого его ребра [2].

Замечание 2. Почти все графы не являются *CPC*-графами.

Доказательство. Утверждение о том, что почти все графы не являются графами некоторого класса A , равносильно тому, что вероятность выбрать помеченный граф на n вершинах, принадлежащий к классу A , стремится к нулю, при условии, что каждое ребро в графе проводится с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Пусть H – некоторый запрещенный подграф класса *CPC и $|V(H)| = k$. Рассмотрим граф G на n вершинах, где $n = mk + r$, $0 \leq r < k$. Произвольным образом выберем m непересекающихся подмножеств мощности k множества вершин графа G . Вероятность того, что $G \in \text{CPC}$, не превосходит вероятности того, что в каждом из выбранных m множеств не реализуется граф H . Пусть вероятность того, что на множестве из k вершин не реализуется граф H , равна α , очевидно, что $\alpha < 1$. Значит, вероятность того, что H не реализуется ни в одном из выбранных m множеств, равна α^m и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, графов класса *CPC* почти нет.*

Количество ребер. Приведенная ниже теорема содержит достижимые оценки на количество ребер *CPC*-графов.

Теорема 3 [9]. Пусть $G(V, E)$ принадлежит к классу *CPC*, тогда выполнены следующие неравенства:

$$|E| \leq |V| \frac{|V| - 3}{2} \quad (\text{для нечетного } |V|),$$

$$|E| \leq |V| \frac{|V| - 4}{2} + 1 \quad (\text{для четного } |V|).$$

Оценки достигаются для любого количества вершин $|V|$.

Следствие 1. *CPC*-графы $\not\subseteq$ *SEG*-графы $\not\subseteq$ струнные графы.

Операции над *CPC*-графами

Теорема 4. Если графы G_1 и G_2 являются *CPC*-графами, то их дизъюнктивное объединение $G_1 \sqcup G_2$ также принадлежит к классу *CPC*.

Доказательство. $OA_2 \dots A_n O$ и $OB_2 \dots B_m O$ – ломаные, графами самопересечений которых являются G_1 и G_2 соответственно. Пусть O принадлежит границам выпуклых оболочек наборов точек $\{O, A_2, \dots, A_n\}$ и $\{O, B_2, \dots, B_m\}$, лежащих в разных полуплоскостях относительно фиксированной прямой $l \ni O$.

Пусть отрезки $[O'A_2], [O''A_n], [O'B_2], [O''B_m]$ попарно не пересекаются, а точки $O', O'' \in l$. Возьмем O', O'' достаточно близкими к O так, что каждую пару

$$\{[OA_2], [O'A_2]\}, \{[OA_n], [O''A_n]\}, \{[OB_2], [O'B_2]\}, \{[OB_m], [O''B_m]\}$$

пересекает один и тот же набор звеньев исходных ломаных.

Графом самопересечений замкнутой ломаной $O'A_2 A_3 \dots A_n O'' B_m B_{m-1} \dots B_3 B_2 O'$ является дизъюнктное объединение графов самопересечений ломаных $OA_2 \dots A_n O$ и $OB_2 \dots B_m O$.

Для графа $G(V, E)$ построим граф G' следующим образом: каждую вершину $v_i \in V$ заменим на долю α_i из t не смежных между собой вершин. Две вершины $u \in \alpha_i, w \in \alpha_j$ смежны тогда и только тогда, когда в исходном графе $\{v_i, v_j\} \in E$.

Теорема 5. Если граф G принадлежит к классу СРС, то G' также является СРС-графом.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую ломаную $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$ с графом самопересечений G . Для каждого $i = \overline{0, n}$ обозначим точку B_i , лежащую на биссектрисе ориентированного угла $\sphericalangle A_{i-1}^{(1)} A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}$, так, что длина отрезка $[A_i^{(1)} B_i]$ равна $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем достаточно малое значение $\varepsilon > 0$ так, что для каждого $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}$ и любых точек $P_1 \in [A_i^{(1)} B_i], Q_1 \in [A_{i+1}^{(1)} B_{i+1}]$ и $P_2 \in [A_j^{(1)} B_j], Q_2 \in [A_{j+1}^{(1)} B_{j+1}]$ выполнены следующие условия:

- (i) каждый из отрезков $[P_1 Q_1], [A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$ пересекает один и тот же набор звеньев ломаной $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$;
- (ii) отрезки $[P_2 Q_2], [A_j^{(1)} A_{j+1}^{(1)}]$ пересекают один и тот же набор звеньев ломаной $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$;
- (iii) $[P_1 Q_1]$ и $[P_2 Q_2]$ пересекаются тогда и только тогда, когда звенья $[A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$ и $[A_j^{(1)} A_{j+1}^{(1)}]$ исходной ломаной пересекаются.

Для каждого $i = \overline{0, n}$ на отрезке $[A_i^{(1)} B_i]$ последовательно отметим точки $A_i^{(2)}, \dots, A_i^{(t)}$.

Далее для краткости для последовательностей $A = (a_i)_{i=1}^n$ и $B = (b_i)_{i=1}^m$ обозначим через $A + B$ последовательность $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$.

Случай нечетного t (рис. 1, а). Рассмотрим замкнутую ломаную на последовательности вершин $S = S_1 + S_3 + \dots + S_t$, которая задана следующим способом: для нечетных $i = 1, 3, \dots, t - 2$ подряд идут подпоследовательности вида

$$S_i = \left(A_0^{((t+i)/2)}, A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_0^{((i+1)/2)}, A_n^{(i+1)}, A_{n-1}^{(i+1)}, \dots, A_1^{(i+1)} \right),$$

а последовательность S_t определена как $\left(A_0^{(t)}, A_1^{(t)}, \dots, A_n^{(t)}, A_0^{((t+1)/2)} \right)$.

Случай четного t (см. рис. 1, б). Расположим точки $A_0^{(t/2+1)}, A_0^{(t/2+2)}, \dots, A_0^{(t)} \in [A_0^{(1)} B_0]$ достаточно близко к B_0 так, что набор точек

$$\{A_0^{(t/2+1)}, A_0^{(t/2+2)}, \dots, A_0^{(t)}, B_0, O\}, \tag{1}$$

где O – точка пересечения лучей $A_n^{(1)} A_0^{(t/2+1)}$ и $A_n^{(t)} B_0$, лежит внутри окружности ω радиусом $\delta > 0$. Отметим, что прямые $A_0^{(1)} B_0, A_n^{(1)} B_n$ не совпадают в силу того, что они являются биссектрисами углов $\sphericalangle A_n^{(1)} A_0^{(1)} A_1^{(1)}$ и $\sphericalangle A_{n-1}^{(1)} A_n^{(1)} A_0^{(1)}$, которые имеют общую сторону $A_n A_0$. Значит, точку O можно всегда выбрать указанным способом.

Нетрудно заметить, что возможно выбрать достаточно малое значение $\delta > 0$, при котором точки отрезков, чьи обе крайние точки не принадлежат множеству (1), лежат вне окружности ω .

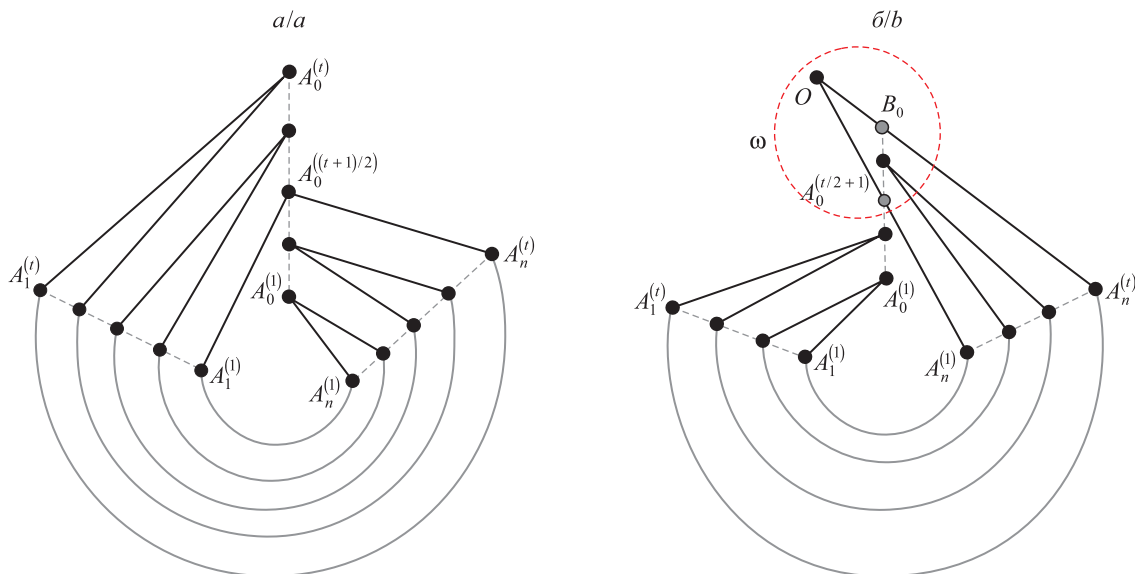


Рис. 1. Преобразование ломаной
 Fig. 1. Polygonal chain transformation

Рассмотрим ломаную на последовательности вершин $S = (O) + S_1 + S_3 + \dots + S_{t-1} + (O)$, для которой подпоследовательности S_i определены следующим образом: для нечетных $i = 1, 3, \dots, t - 1$

$$S_i = \left(A_n^{(i)}, A_{n-1}^{(i)}, \dots, A_1^{(i)}, A_0^{((i+1)/2)}, A_1^{(i+1)}, A_2^{(i+1)}, \dots, A_n^{(i+1)}, A_0^{((t+i+1)/2)} \right).$$

В полученной ломаной каждому исходному звену $[A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$, $i = \overline{0, n-1}$, соответствуют ровно t не пересекающихся между собой звеньев. Покажем, что два звена построенной ломаной пересекаются только в том случае, если соответствующие им звенья исходной ломаной пересекаются.

Нетрудно видеть, что для нечетного t вышеуказанное утверждение выполнено в силу условия (iii).

В случае четного t данное утверждение справедливо для звеньев новой ломаной, соответствующих звеньям $[A_i^{(1)} A_{i+1}^{(1)}]$, $i = \overline{0, n}$, исходя из условия (iii). Рассмотрим множество из оставшихся t звеньев, соответствующих звену $[A_n^{(1)} A_0^{(1)}]$ ломаной $A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_n^{(1)} A_0^{(1)}$:

$$\left\{ [A_n^{(1)} O], [A_n^{(2)} A_0^{(t/2+2)}], [A_0^{(t/2+2)} A_n^{(3)}], \dots, [A_n^{(t-2)} A_0^{(t)}], [A_0^{(t)} A_n^{(t-1)}], [A_n^{(t)} O] \right\}. \quad (2)$$

Так как окружность ω содержит только точки, принадлежащие звеньям из множества (2), то точки пересечения звеньев из множества (2) с другими звеньями построенной ломаной лежат внутри или на границе многоугольника $A_n^{(1)} A_0^{(1)} B_0 B_n$. Тогда в силу условия (iii) звенья из множества (2) также удовлетворяют вышеописанному условию.

Таким образом, графом самопересечений построенных ломаных на последовательности вершин S является G' .

Пусть дан граф $G(V, E)$ и вершина $u \in V$, смежная с вершинами $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ($\deg u = k \geq 1$). Заменим u на набор вершин $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ степени 1 так, что пары вершин $\{u_i, v_j\}$ смежны в полученном графе G'' тогда и только тогда, когда $i = j$.

Теорема 6. Пусть граф G принадлежит к классу СРС, тогда G'' также является СРС-графом.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую ломаную на вершинах $A_1 A_2 \dots A_n A_1$, графом самопересечений которой является граф $G(V, E)$. На звене $[A_1 A_2]$, соответствующем вершине $u \in V$, последовательно отметим точки X_i для $i = 1, 2, \dots, k - 1$ так, что на каждом отрезке $[A_1 X_1]$, $[X_1 X_2]$, \dots , $[X_{k-1} A_2]$ лежит ровно одна точка пересечения.

Получим замкнутую ломаную на вершинах $A_1 X_1 X_2 \dots X_{k-1} A_2 A_3 \dots A_n A_1$. В ее графе самопересечений звеньям $[A_1 X_1]$, $[X_1 X_2]$, \dots , $[X_{k-1} A_2]$ соответствуют вершины $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ степени 1, с которыми была смежна вершина u .

В графе $G(V, E)$ заменим вершину $u \in V$ на состоящую из нечетного количества вершин доле $\alpha_u = \{u_1, u_2, \dots, u_{2t+1}\}$ так, что

- (i) никакие две вершины в доле α_u не являются смежными;
- (ii) в полученном графе G''' существует ребро $\{u_i, v\} \in E(G''')$ тогда и только тогда, когда $\{u_i, v\} \in E$.

Теорема 7. Пусть граф G принадлежит к классу СРС, тогда G''' также является СРС-графом.

Доказательство. Пусть G – граф самопересечений замкнутой ломаной на вершинах $A_1 A_2 \dots A_n A_1$. На биссектрисах ориентированных углов $\sphericalangle A_2 A_1 A_n$ и $\sphericalangle A_3 A_2 A_1$ отметим соответственно точки D_1 и D_2 так, что D_1 и D_2 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $A_1 A_2$.

Возможно выбрать достаточно маленькое расстояние $d(A_1 D_1) = d(A_2 D_2) = \varepsilon > 0$ такое, что любой отрезок $[PQ]$, $P \in [A_1 D_1]$, $Q \in [A_2 D_2]$, пересекает набор звеньев, пересекающих $[A_1 A_2]$, а также само звено $[A_1 A_2]$.

Последовательно отметим $2t$ точек (рис. 2):

$$\begin{cases} X_2, X_4, \dots, X_{2t} \in [A_1 D_1], \\ X_1, X_3, \dots, X_{2t-1} \in [A_2 D_2]. \end{cases}$$

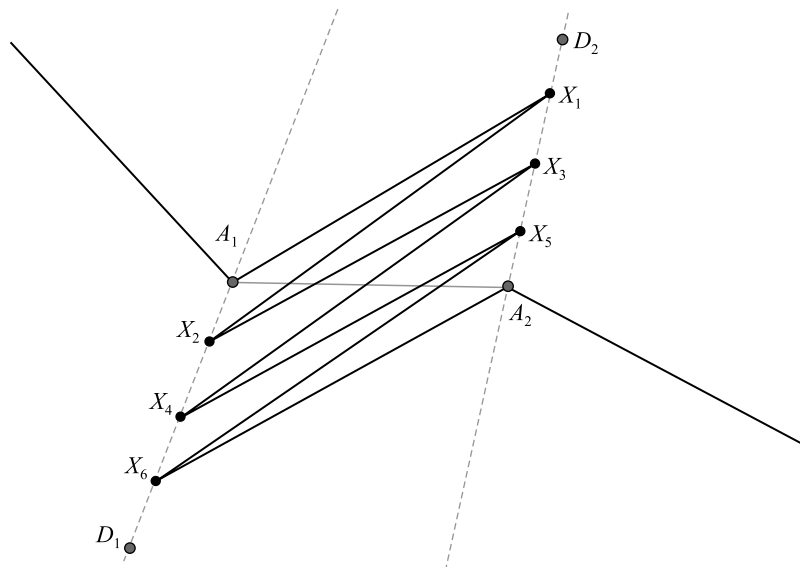


Рис. 2. Преобразование звена $[A_1 A_2]$

Fig. 2. Transformation of segment $[A_1 A_2]$

Таким образом, звено $[A_1 A_2]$, соответствующее вершине u , можно заменить на $2t + 1$ не пересекающихся между собой звеньев $[A_1 X_1]$, $[X_1 X_2]$, \dots , $[X_{2t} A_2]$. Получаем замкнутую ломаную на вершинах $A_1 X_1 X_2 \dots X_{2t+1} A_2 A_3 \dots A_n A_1$, графом самопересечений которой является G''' .

Регулярные СРС-графы

Определения. Далее замкнутую n -звенную ломаную L , граф самопересечений которой k -регулярен, при этом $k \in \mathbb{N}$, будем называть (n, k) -ломаной.

Определим $F(n)$ как множество всех натуральных $k \in \mathbb{N}$ таких, что существует k -регулярный СРС-граф на n вершинах (т. е. существует (n, k) -ломаная):

$$F(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists (n, k)\text{-ломаная}\}.$$

Общие результаты. Нетрудно заметить, что при $n \leq 4$ (n, k) -ломаной не существует, поэтому далее будем считать, что количество вершин в рассматриваемых регулярных СРС-графах не меньше пяти.

Также если $k \in F(n)$, то количество ребер в графе равно $\frac{nk}{2} \in \mathbb{N}$, а значит, произведение nk обязано быть четным.

Утверждение 2. Если $k \in F(n)$ и $k \in F(m)$, то $k \in F(m+n)$.

Доказательство. Данное утверждение следует из теоремы 4.

Утверждение 3. Если $k \in F(n)$, то $tk \in F(tn)$ для любого $t \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Данное утверждение следует из теоремы 5.

Утверждение 4. Если для $t, k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $tk \in F(n)$, то $k \in F(tn)$.

Доказательство. На каждом звене исходной ломаной отметим $t-1$ новых вершин, не совпадающих с точками самопересечений и узлами (n, tk) -ломаной, таким образом, что любой из tn полученных отрезков пересекает ровно k других, не имеющих общей крайней точки с ним. Построенная фигура является (tn, k) -ломаной.

Теорема 8. Пусть для $r \in \mathbb{N}$, $1 < r < \frac{n}{2}$, выполнено условие $\gcd(n, r) = 1$. Тогда $2r - 2 \in F(n)$.

Доказательство. Последовательно расположим точки A_1, A_2, \dots, A_n на окружности. Рассмотрим ломаную на вершинах $A_1 A_{1+r} A_{1+2r} A_{1+3r} \dots A_{1+(n-1)r} A_1$, где индексы считаются по $\text{mod } n$. Так как $\gcd(n, r) = 1$, полученная последовательность индексов точек представляет собой перестановку $\{1, 2, \dots, n\}$, и построенная фигура действительно является замкнутой ломаной.

Поскольку $r < \frac{n}{2}$, то для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ между точками $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i+r-1}$ отсутствуют ребра. Следовательно, каждое выходящее из них ребро (всего таких $2r-2$) пересекает ребро $[A_i A_{i+r}]$. Таким образом, данная ломаная является $(n, 2r-2)$ -ломаной.

Теорема 9. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $n \in \mathbb{N}$ таких, что существует (n, k) -ломаная.

Доказательство. По теореме 8 выполнено включение $2k \in F(2k+3)$, откуда по утверждению 4 получаем, что $k \in F(4k+6)$. Тогда из утверждения 2 следует, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполнено включение $k \in F(t(4k+6))$.

Теорема 10. Рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}$. Если k четное, то включение $k \in F(n)$ выполнено для каждого $n \geq k^2 + 5k + 7$. Соответственно, при нечетном k включение $k \in F(n)$ верно для нечетного $n \geq 2(4k^2 + 10k + 7)$.

Доказательство. По теореме 8 для любого $i \in \mathbb{N}$ и четного $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $k \in F(i(k+2)+1)$. Любое число $n \geq k^2 + 5k + 7$ представимо в виде $n = j(k+3) + i(k+2) + 1$, где $i \in \{1, 2, \dots, k+3\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Отсюда из утверждения 2 следует, что $k \in F(j(k+3) + i(k+2) + 1) = F(n)$.

Было доказано, что для любого $k \in \mathbb{N}$, если $n \geq 4k^2 + 10k + 7$, то $2k \in F(n)$. Значит, из утверждения 4 получаем, что $k \in F(2n)$ для любого $n \geq 4k^2 + 10k + 7$.

Исследование $|F(n)|$. Представленные здесь результаты содержат верхние и нижние оценки на $|F(n)|$.

Следствие 2. Для четного $n \geq 14$ количество нечетных $k \in F(n)$ не меньше, чем $\left\lfloor \frac{\sqrt{2n-3}-5}{8} \right\rfloor$.

Доказательство. По теореме 10 для каждого четного n и нечетного k , удовлетворяющих неравенству $n \geq 2(4k^2 + 10k + 7)$, существует (n, k) -ломаная. Откуда вытекает, что для $n \geq 14$ все натуральные четные k , удовлетворяющие неравенству, лежат на отрезке $\left[1; \frac{\sqrt{2n-3}-5}{4}\right]$.

Следствие 3. Для любого n количество четных $k \in F(n)$ не меньше, чем $\frac{\varphi(n)}{2}$, где $\frac{\varphi(n)}{2}$ – значение функции Эйлера для $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как $\gcd(n, r) = \gcd(n, n-r)$, то на отрезках $\left[1; \frac{n}{2}-1\right]$ и $\left[\frac{n}{2}+1; n-1\right]$ количества чисел, взаимно простых с n , одинаковы. Значит, количество натуральных r , удовлетворяющих условиям $r < \frac{n}{2}$ и $\gcd(n, r) = 1$, равно $\frac{\varphi(n)}{2}$. По теореме 8 для каждого рассматриваемого r выполнено включение $2r-2 \in F(n)$.

Следствие 4. Количество различных $k \in F(n)$ для фиксированного n удовлетворяет следующим неравенствам.

1. Рассмотрим нечетное $n \geq 5$. Так как не существует нечетных $k \notin F(n)$ и, исходя из теоремы 3, k не превосходит $n - 3$, то из следствия 3 получаем

$$\frac{\varphi(n)}{2} \leq |F(n)| \leq \frac{n-3}{2}.$$

2. Рассмотрим четное $n \geq 14$. По теореме 3 для каждого $k \in F(n)$ справедливо $k \leq n - 4$. Из следствий 2 и 3 получаем следующую оценку снизу:

$$\frac{\varphi(n)}{2} + \left\lceil \frac{\sqrt{2n-3}-5}{8} \right\rceil \leq |F(n)| \leq n-4.$$

Алгоритмические аспекты

Задачи о раскраске, доминирующем множестве и наибольшем цикле. В качестве задачи о доминирующем множестве рассмотрим вопрос о существовании доминирующего множества мощности не более k в заданном графе G . Под задачей о раскраске в фиксированное количество цветов k будем понимать проверку того, что вершины графа можно раскрасить в k цветов так, чтобы никакие вершины одного цвета не были смежны. Задачу о наибольшем цикле определим как вопрос о существовании цикла длины не менее k в графе G .

Круговым графом будем называть SEG -граф, который является графом пересечений множества хорд некоторой окружности.

Утверждение 5. Пусть G – круговой граф на n вершинах, тогда $G \sqsubset O_{3n}$ принадлежит к классу СРС.

Доказательство. Сразу отметим, что добавление и удаление изолированных вершин не меняет принадлежности G к классу круговых графов. Далее докажем исходное утверждение индукцией по n .

Предположение индукции: последовательно обозначим точки A_1, A_2, \dots, A_{2n} на окружности ω . Пусть круговой граф G является графом самопересечений набора n хорд с вершинами в отмеченных точках. Далее отрезок α , не пересекающий другие отрезки и хорды, будем называть изолированным, если он удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) целиком лежит вне окружности ω , за исключением одной крайней точки;
- (ii) является хордой окружности ω и делит ее на две дуги, одна из которых не содержит ни одной точки, принадлежащей другим хордам или отрезкам.

Покажем, что некоторые из точек A_1, A_2, \dots, A_{2n} возможно соединить не более чем $3n$ -м изолированным отрезком так, что полученная фигура является замкнутой ломаной.

База: $n = 1$. Граф на 1 вершине представлен на окружности ω хордой $[A_1A_2]$. Касательные к ω в точках A_1 и A_2 пересекаются в B . Получим искомым граф самопересечений ломаной $A_1A_2BA_1$.

Шаг: предположим, утверждение верно для любого количества хорд не больше, чем n . Рассмотрим фиксированные $n + 1$ хорды, в частности две хорды $[A_{2n+1}A_i]$ и $[A_{2n+2}A_j]$ ($i \neq j$), а также набор из n хорд, где две хорды $[A_{2n+1}A_i]$, $[A_{2n+2}A_j]$ заменены на отрезок $[A_iA_j]$.

По предположению индукции мы можем провести не более $3n$ изолированных отрезков так, что на множестве всех отмеченных точек $\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$ будет построена замкнутая ломаная

$$A_{k_1}A_{k_2} \dots \underline{A_jA_i} \dots A_{k_{2n-1}}A_{k_{2n}}A_{k_1}. \quad (3)$$

Хорду $[A_iA_j]$ не пересекает ни один изолированный отрезок. Значит, единственный изолированный отрезок, который может пересечь хорды $[A_iA_{2n+1}]$, $[A_jA_{2n+2}]$, – это $[A_1A_{2n}]$ при условии, что он является звеном ломаной (3).

Случай 1 (рис. 3, а). В ломаной (3) не было проведено изолированное ребро $[A_1A_{2n}]$. Значит, никакие изолированные ребра в ломаной (3) не пересекают отрезки $[A_{2n+1}A_i]$, $[A_{2n+2}A_j]$.

Поэтому замкнутая ломаная на последовательности вершин

$$A_{k_1}A_{k_2} \dots \underline{A_jA_{2n+2}A_{2n+1}A_i} \dots A_{k_{2n-1}}A_{k_{2n}}A_{k_1}$$

имеет граф самопересечений $G \sqsubset O_{3n+1}$, где изолированные вершины O_{3n+1} соответствуют проведенным изолированным отрезкам.

Случай 2 (см. рис. 3, б). Если в ломаной (3) проведено изолированное ребро $[A_1A_{2n}]$, рассмотрим замкнутую ломаную

$$BA_1 \dots A_j A_{2n+2} A_{2n+1} A_i \dots A_{2n} B, \quad (4)$$

где B – точка пересечения касательных к окружности ω в точках A_1, A_{2n} . Заметим, что отрезки $[BA_1]$, $[BA_{2n}]$, $[A_{2n+1}A_{2n+2}]$ являются изолированными. Поэтому графом самопересечений ломаной (4) выступает $G \sqcup O_{3(n+1)}$.

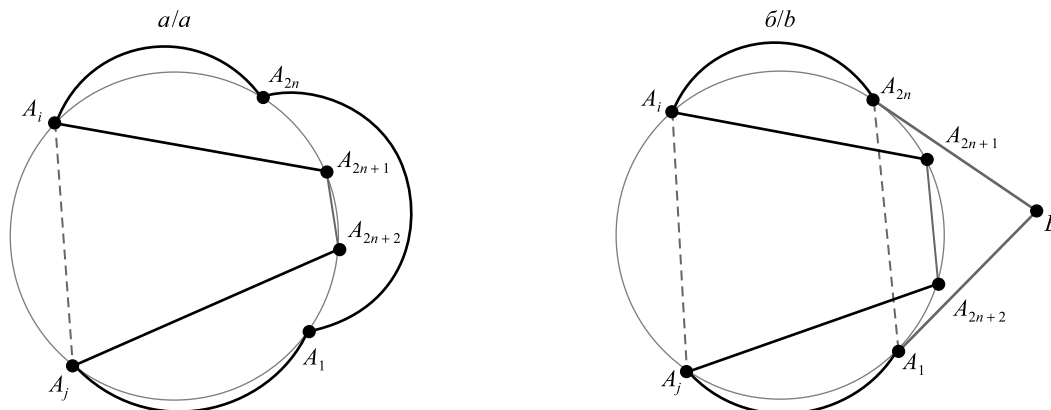


Рис. 3. Переход индукции
 Fig. 3. Induction step

Таким образом, в круговой граф G на n вершинах возможно добавить $3n$ изолированных вершин, получив граф $H \in CPC$.

Теорема 11. Задачи о доминирующем множестве, раскраске в $k \geq 4$ цветов, а также наибольшем цикле в классе CPC являются NP-полными.

Доказательство. Аналогичные задачи в классе круговых графов являются NP-полными, что доказано в статьях [10–12].

Покажем, что задача о доминировании в классе круговых графов полиномиально сводится к такой же задаче в CPC-графах. Действительно, для заданного кругового графа G по утверждению 5 за полиномиальное время можно построить граф $H = G \sqcup O_{3n}$, который будет являться CPC-графом.

Числа доминирования графов G и H отличаются на $3n$. Значит, в исходном графе есть доминирующее множество размером не более k тогда и только тогда, когда в полученном графе H существует доминирующее множество размером не более $k + 3n$. Таким образом, имеет место полиномиальная сводимость, и задача о доминирующем множестве NP-трудна в классе CPC-графов.

Аналогично, задачи о раскраске и наибольшем цикле в круговых графах, а следовательно, и в CPC-графах принадлежат к классу NP-полных задач.

Задача о независимости. Под задачей о независимости будем понимать вопрос о существовании независимого множества мощности не менее k в графе G . Данная задача является NP-полной даже в классе связанных кубических планарных графов [13].

Далее по аналогии с [14] степень графа будем называть максимальной степенью его вершин.

Утверждение 6. Задача о независимости в классе эйлеровых планарных графов степени не более 4 является NP-полной.

Доказательство. Построим полиномиальное сведение задачи о независимости в классе связанных кубических планарных графов к задаче, NP-полноту которой необходимо доказать.

Пусть $G(V, E)$ – связанный кубический планарный граф. Нетрудно видеть, что порядок такого графа является четным числом. Разобьем множество вершин G на неупорядоченные пары произвольным образом и далее для каждой пары $\{u, v\}$ применим операцию, представленную на рис. 4.

Полученный граф обозначим H . Заметим, что граф H является связанным планарным, степени его вершин равны 2 или 4, т. е. он эйлеров. Также нетрудно видеть, что $\alpha(H) = \alpha(G) + |V|$. Значит, в G существует независимое множество мощности не менее k тогда и только тогда, когда в H существует независимое множество порядка не менее $k + |V|$, из чего и следует необходимое утверждение.

Как известно, любой планарный граф степени не более 4 может быть уложен на решетку \mathbb{Z}^2 так, что его вершинам будут соответствовать узлы решетки, а ребрам – пути, проходящие по звеньям \mathbb{Z}^2 [14], причем такая укладка может быть получена за полиномиальное время.

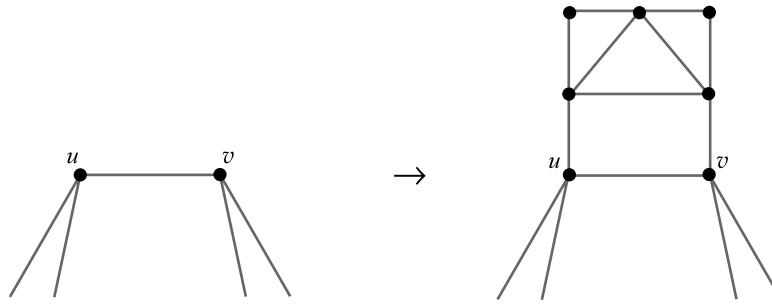


Рис. 4. Преобразование ребра $\{u, v\}$

Fig. 4. Transformation of edge $\{u, v\}$

Далее любой планарный граф степени не более 4 будем рассматривать вместе с соответствующей ему укладкой, описанной выше.

Рассмотрим некоторый граф $G(V, E)$, для которого выполнены условия утверждения 6. Пусть $v \in V$, $\deg v = 4$ и вершины u_1, u_2, u_3, u_4 смежны v , причем на укладке они расположены, как показано на рис. 5.

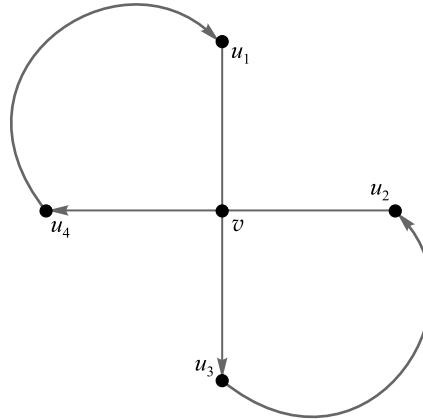


Рис. 5. Окрестность вершины v

Fig. 5. Neighbourhood of vertex v

Относительно вершины v все эйлеровы циклы можно разделить на два типа:

- меняющие направление при прохождении через вершину v , т. е. циклы вида $Au_1vu_2Bu_3vu_4C$, $Au_1vu_4Bu_3vu_2C$ и т. д.;
- не меняющие направление при прохождении через вершину v , т. е. циклы вида $Au_1vu_3Bu_2vu_4C$, $Au_3vu_1Bu_2vu_4C$ и т. д.

Будем называть эйлеров цикл такого графа $G(V, E)$ меняющим направление, если он меняет направление относительно любой вершины $v \in V$, $\deg v = 4$.

Утверждение 7. Для любого эйлерова планарного графа степени не более 4 существует меняющий направление эйлеров цикл.

Доказательство. Предположим, что некоторый эйлеров цикл K графа $G(V, E)$ не меняет направление при прохождении через вершину $v \in V$. Пусть, не нарушая общности, K имеет вид $u_1vu_3Au_2vu_4Bu_1$.

Нетрудно заметить, что цикл L вида $u_1vu_2Cu_3vu_4Bu_1$ (здесь C – это записанная в обратном порядке последовательность A) является эйлеровым и меняет либо не меняет направление во всех вершинах, за исключением v , так же как и цикл K , при этом в вершине v он меняет направление в отличие от K . Повторяя такие преобразования цикла, можно получить необходимый эйлеров цикл графа G .

Утверждение 8. Пусть $G(V, E)$ – эйлеров планарный граф степени не более 4. Тогда существуют $l, \{k_e | e \in E\}$ такие, что можно добавить l изолированных вершин к графу G и ровно k_e вершин на каждое его ребро $e \in E$ и полученный в результате граф будет CPC -графом. При этом для них выполняются следующие условия:

- 1) k_e является четным для любого $e \in E$;
- 2) значения l и $\{k_e | e \in E\}$ могут быть вычислены за полиномиальное время.

Доказательство. Рассмотрим соответствующую укладку графа G на решетку \mathbb{Z}^2 и некоторый меняющий направление цикл L . Нетрудно видеть, что такие укладка и цикл могут быть найдены за полиномиальное время.

Далее совершим следующие преобразования укладки. Для вершины степени 2 и участка пути на \mathbb{Z}^2 , соответствующего ребру G , преобразование укладки осуществляется, как показано на рис. 6. Аналогично оно выполняется и для других положений.

Для вершины степени 4 преобразование имеет вид, представленный на рис. 7.

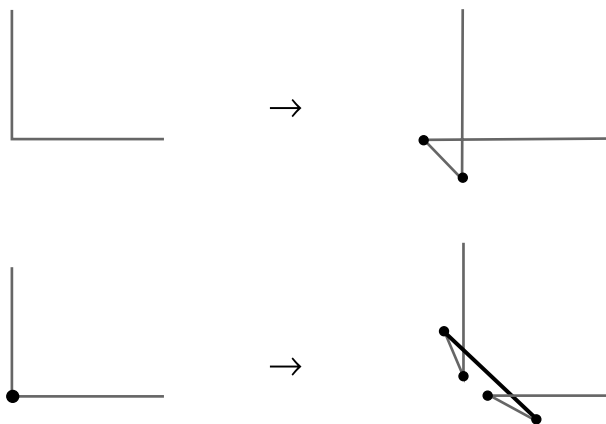


Рис. 6. Преобразование участка пути на \mathbb{Z}^2 и вершины степени 2
 Fig. 6. Transformation of part of the path in \mathbb{Z}^2 and vertex with degree 2

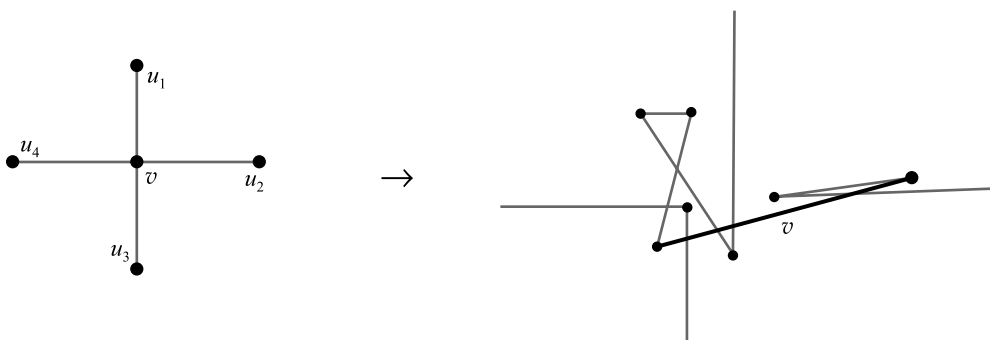


Рис. 7. Преобразование вершины степени 4
 Fig. 7. Transformation of vertex with degree 4

Такое преобразование производится, если в L есть подпоследовательность u_1vu_2 или u_2vu_1 , в противном случае (т. е. если есть подпоследовательность u_1vu_4 или u_4vu_1) осуществляется аналогичное преобразование с точностью до поворота на 90° .

Все преобразования совершаем так, чтобы избежать пересечений отрезков, помимо присутствующих на рисунках.

Заметим, что полученная конструкция является замкнутой ломаной. Действительно, обход последней может быть получен исходя из ее построения по эйлерову циклу L графа G . Также нетрудно видеть, что графом самопересечений ломаной L является граф G после добавления нескольких вершин на ребра и некоторого количества изолированных вершин. Вершинам исходного графа в графе самопересечений ломаной соответствуют звенья ломаной, выделенные черным цветом.

С помощью преобразования, представленного на рис. 8, можно сделать число новых вершин на каждом ребре четным.

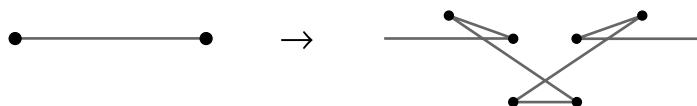


Рис. 8. Преобразование, добавляющее три вершины на одно из ребер графа самопересечений
 Fig. 8. Transformation that adds three vertices on one of the edges of the self-intersections graph

Заметим, что значения $\{k_e | e \in E\}$ и l могут быть вычислены за полиномиальное время для заданного графа G .

Теорема 12. *Задача о независимости в классе CPC-графов является NP-полной.*

Доказательство. Построим полиномиальную сводимость задачи о независимости в классе эйлеровых планарных графов степени не более 4 к рассматриваемой задаче.

Пусть $G(V, E)$ является эйлеровым планарным графом степени не более 4. За полиномиальное время можно добавить k_e вершин на каждое ребро e и l изолированных вершин, где k_e четны. Полученный граф H принадлежит к классу CPC по утверждению 8.

Исходя из четности k_e , выполнено равенство

$$\alpha(H) = \alpha(G) + l + \sum_{e \in E} \frac{k_e}{2},$$

из чего следует сводимость, а значит, и NP-полнота рассматриваемой задачи.

Распознавание CPC-графов. Под задачей *STRICT INEQ* будем понимать вопрос о разрешимости системы строгих полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, ограниченными по модулю некоторой константой. *STRICT INEQ* \in *PSPACE* [4; 15]. В статье [4] было доказано, что задача распознавания SEG-графа равносильна задаче *STRICT INEQ*, из чего следует, что она принадлежит к классу *PSPACE*.

Замечание 3. Граф G принадлежит к классу CPC тогда и только тогда, когда существует ломаная $R^* \in \mathcal{R}(G)$ такая, что никакие три ее узла не лежат на одной прямой.

Теорема 13. *Задача распознавания CPC-графа принадлежит к классу PSPACE.*

Покажем, что данная задача сводится к вопросу о разрешимости систем полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, ограниченными по модулю константой.

Утверждение 9. Пусть дан граф G , дополнение которого содержит гамильтонов цикл. Тогда принадлежность G к классу CPC равносильна разрешимости совокупности систем полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, ограниченными по модулю некоторой константой, причем размер записи указанной совокупности полиномиально ограничен размером записи графа G .

Доказательство. Пусть дан граф $G(V, E)$ на множестве вершин $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Зафиксируем последовательность $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ (здесь σ – перестановка $\{1, 2, \dots, n\}$), которая является последовательностью вершин гамильтонового цикла \bar{G} .

Согласно замечанию 3 $G \in CPC$ тогда и только тогда, когда существует ломаная $R^* \in \mathcal{R}(G)$, любые три узла которой не коллинеарны. Покажем, что существование такой ломаной R^* , в которой последовательно идущим звеньям соответствует последовательность вершин $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$, равносильно разрешимости системы неравенств $\mathcal{S}_\sigma(G)$.

Для фиксированной перестановки σ последовательности вершин $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ соответствуют последовательно идущие ребра ломаной R^* . Каждому узлу R^* в системе $\mathcal{S}_\sigma(G)$ сопоставим две переменные $x_{\sigma(i)}$ и $y_{\sigma(i)}$, задающие координаты данной точки. Таким образом, каждой вершине $A_{\sigma(i)} \in V$ соответствует звено ломаной $\left[(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}), (x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)}) \right]$. Также каждому ребру исходного графа $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(j)}\} \in E$ сопоставлены две переменные a_{ij}, b_{ij} .

Систему $\mathcal{S}_\sigma(G)$ задает нижеописанный набор неравенств.

1. Любые два узла ломаной R^* не совпадают, а следовательно, для каждой пары точек $(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)})$ и $(x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})$, где $i \neq j$, выполнено неравенство

$$(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})^2 + (y_{\sigma(i)} - y_{\sigma(j)})^2 > 0. \quad (5)$$

2. Любые три узла ломаной не коллинеарны, значит, для любых трех попарно различных узлов ломаной R^* $\left\{ (x_{\sigma(m)}, y_{\sigma(m)}), (x_{\sigma(k)}, y_{\sigma(k)}), (x_{\sigma(t)}, y_{\sigma(t)}) \right\}$ верно неравенство

$$\left((x_{\sigma(m)} - x_{\sigma(k)})(y_{\sigma(m)} - y_{\sigma(t)}) - (y_{\sigma(m)} - x_{\sigma(k)})(x_{\sigma(m)} - x_{\sigma(t)}) \right)^2 > 0. \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что звенья, соответствующие паре вершин вида $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(i+1)}\}$, пересекаются в единственной точке $(x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)})$, являющейся крайней для данных отрезков.

3. Если $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(j)}\} \in E$, то конечные точки отрезков, соответствующих вершинам $A_{\sigma(i)}$ и $A_{\sigma(j)}$, попарно различны. При этом точки $(x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})$ и $(x_{\sigma(j+1)}, y_{\sigma(j+1)})$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок вершины $A_{\sigma(i)}$, а два рассматриваемых звена пересекаются в не крайней точке. То есть знаки скалярных произведений векторов $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})}$, $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j+1)}, y_{\sigma(j+1)})}$ с вектором, ортогональным $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)})}$, различны. Это равносильно системе неравенств

$$\left(\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)})}, \bar{v} \right) \cdot \left(\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(j+1)}, y_{\sigma(j+1)})}, \bar{v} \right) < 0,$$

где $\bar{v} = \overline{(-x_{\sigma(i+1)}, -y_{\sigma(i+1)}) (x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)})}$ – вектор, ортогональный $\overline{(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) (x_{\sigma(i+1)}, y_{\sigma(i+1)})}$.

4. Если $\{A_{\sigma(i)}, A_{\sigma(j)}\} \notin E$, где $j \neq i \pm 1$ по модулю n , то два соответствующих вершинам $A_{\sigma(i)}$ и $A_{\sigma(j)}$ отрезка не пересекаются тогда и только тогда, когда существует прямая $y = a_{ij}x + b_{ij}$ такая, что рассматриваемые звенья лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Данное условие задает система неравенств

$$\begin{cases} (a_{ij}x_{\sigma(i)} + b_{ij} - y_{\sigma(i)}) (a_{ij}x_{\sigma(j)} + b_{ij} - y_{\sigma(j)}) < 0, \\ (a_{ij}x_{\sigma(i)} + b_{ij} - y_{\sigma(i)}) (a_{ij}x_{\sigma(j+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(j+1)}) < 0, \\ (a_{ij}x_{\sigma(i+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(i+1)}) (a_{ij}x_{\sigma(j)} + b_{ij} - y_{\sigma(j)}) < 0, \\ (a_{ij}x_{\sigma(i+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(i+1)}) (a_{ij}x_{\sigma(j+1)} + b_{ij} - y_{\sigma(j+1)}) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой пары вершин графа G в системе $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ описаны неравенства, задающие расположение соответствующих звеньев относительно друг друга. Нетрудно заметить, что размер записи системы $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ полиномиально ограничен размером записи графа G , а все коэффициенты по модулю не превосходят константы.

Рассмотрим все перестановки вершин σ , которые соответствуют последовательности вершин гамильтонова цикла в графе \bar{G} . Получаем, что граф G принадлежит к классу CPC тогда и только тогда, когда хотя бы одна из систем вида $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ разрешима.

Доказательство теоремы 13. Пусть дан фиксированный граф G в виде списка вершин и списка ребер. Тогда нижеприведенный алгоритм позволит узнать, принадлежит ли данный граф G к классу CPC .

Первой рассматриваемой перестановкой будет $\sigma = Id$. Далее при рассмотрении каждой перестановки вершин σ , если последовательность $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ не является последовательностью вершин гамильтонова цикла в \bar{G} , осуществляется переход к следующей после σ перестановке в лексикографическом порядке. В случае когда $(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ соответствует вершинам гамильтонова цикла в \bar{G} , проверяется на разрешимость система $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$. Если она имеет решения, то $G \in CPC$. Иначе рассматривается следующая в лексикографическом порядке перестановка. В случае если все $n!$ перестановок были рассмотрены и ни одна система $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ не имеет решений, то $G \notin CPC$.

Так как вопрос о существовании решений совокупности систем $\mathcal{S}_{\sigma}(G)$ разрешим с полиномиальным ограничением пространства, то задача распознавания CPC -графа принадлежит к классу $PSPACE$.

Построение реализации CPC -графа. Назовем ориентацию треугольника (ABC) положительной, если точка C лежит по правую сторону от ориентированной прямой \overline{AB} . В противном случае ориентация (ABC) отрицательная [16].

Два конечных набора точек общего положения P и Q на плоскости имеют одинаковую ориентацию, если существует такая биекция $f: P \rightarrow Q$, что для любых трех точек $A, B, C \in P$ треугольники (ABC) и $(f(A)f(B)f(C))$ имеют одинаковую ориентацию. Нетрудно заметить, что одинаковая ориентация наборов точек является отношением эквивалентности.

Для двух конечных наборов точек общего положения P и Q биекцию $f: P \rightarrow Q$ назовем сохраняющей пересечения, если для любых различных точек $A, B, C, D \in P$ справедливо $[f(A)f(B)] \cap [f(C)f(D)] \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $[AB] \cap [CD] \neq \emptyset$. Такие наборы P и Q будем называть кросс-эквивалентными [16].

Согласно [16], если два набора точек кросс-эквивалентны, то они имеют одинаковую ориентацию. Поэтому из [17] следует нижеуказанное утверждение.

Утверждение 10. Для любого набора S из n точек общего положения на плоскости существует набор точек S' такой, что S и S' кросс-эквивалентны. Причем S' удовлетворяет следующим условиям:

(i) любая точка $T(x, y) \in S'$ имеет целочисленные координаты;

(ii) существует натуральное $N(n) \leq 2^{2^{cn}}$ для некоторой константы $c \in \mathbb{N}$ такое, что для каждой точки $T(x, y) \in S'$ выполнено неравенство

$$-N(n) \leq x, y \leq N(n).$$

Следствие 5. Из утверждения 10 следует, что любой СРС-граф на n вершинах имеет реализацию $R \in \mathcal{R}(G)$, в которой узлы ломаной имеют целочисленные координаты $|x|, |y| \leq 2^{2^{cn}}$.

Значит, перебором графов самопересечений n -звенных замкнутых ломаных с узлами, координаты которых $|x|, |y| \leq 2^{2^{cn}}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, возможно установить, принадлежит ли фиксированный граф G на n вершинах множеству СРС-графов. Таким образом, задача о построении реализации СРС-графа также алгоритмически разрешима.

Библиографические ссылки

1. Sinden FW. Topology of thin film RC circuits. *The Bell System Technical Journal*. 1966;45(9):1639–1662. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1966.tb01713.x.
2. Ehrlich G, Even S, Tarjan RE. Intersection graphs of curves in the plane. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1976; 21(1):8–20. DOI: 10.1016/0095-8956(76)90022-8.
3. Chalopin J, Gonçalves D. Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane: extended abstract. In: *Proceedings of the Forty-first annual ACM symposium on theory of computing; 2009 May 31 – June 2; Bethesda, Maryland, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 2009. p. 631–638. DOI: 10.1145/1536414.1536500.
4. Kratochvíl J, Matoušek J. Intersection graphs of segments. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1994;62(2):289–315. DOI: 10.1006/jctb.1994.1071.
5. Kratochvíl J. String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1): 67–78. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90091-W.
6. Оре О. *Графы и их применение*. Головина ЛИ, переводчик; Яглом ИМ, редактор. Москва: Мир; 1965. 174 с.
7. Kratochvíl J. String graphs. I. The number of critical nonstring graphs is infinite. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1):53–66. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90090-7.
8. Dangelmayr C. *Intersection graphs of pseudosegments* [dissertation]. Berlin: Freien Universität Berlin; 2010. 136 p.
9. Фукс ДБ. Самопересечения замкнутой ломаной. *Квант*. 1988;1:30–34.
10. Keil JM. The complexity of domination problems in circle graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1993;42(1):51–63. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90178-Q.
11. Unger W. On the k -colouring of circle-graphs. In: Cori R, Wirsing M, editors. *STACS 88. 5th Annual symposium on theoretical aspects of computer science; 1988 February 11–13; Bordeaux, France*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. p. 61–72. (Lecture Notes in Computer Science; volume 294).
12. Damaschke P. The Hamiltonian circuit problem for circle graphs is NP-complete. *Information Processing Letters*. 1989;32(1): 1–2. DOI: 10.1016/0020-0190(89)90059-8.
13. Garey MR, Johnson DS. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. New York: W. H. Freeman and Company; 1979. X, 338 p.
14. Valiant LG. Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*. 1981;C-30(2):135–140. DOI: 10.1109/TC.1981.6312176.
15. Renegar J. On the computational complexity and geometry of the first-order theory of the reals. Part I: Introduction. Preliminaries. The geometry of semi-algebraic sets. The decision problem for the existential theory of the reals. *Journal of Symbolic Computation*. 1992;13(3):255–299. DOI: 10.1016/S0747-7171(10)80003-3.
16. Pilz A, Welzl E. Order on order types. In: Arge L, Pach J, editors. *31st International symposium on computational geometry (SoCG'2015); 2015 June 22–25; Eindhoven, The Netherlands*. Wadern: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik; 2015. p. 285–299. (LIPIcs; volume 34). DOI: 10.4230/LIPIcs.SOCG.2015.285.
17. Goodman JE, Pollack R, Sturmfels B. The intrinsic spread of a configuration in \mathbb{R}^d . *Journal of the American Mathematical Society*. 1990;3(3):639–651. DOI: 10.1090/S0894-0347-1990-1046181-2.

References

1. Sinden FW. Topology of thin film RC circuits. *The Bell System Technical Journal*. 1966;45(9):1639–1662. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1966.tb01713.x.
2. Ehrlich G, Even S, Tarjan RE. Intersection graphs of curves in the plane. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1976; 21(1):8–20. DOI: 10.1016/0095-8956(76)90022-8.

3. Chalopin J, Gonçalves D. Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane: extended abstract. In: *Proceedings of the Forty-first annual ACM symposium on theory of computing; 2009 May 31 – June 2; Bethesda, Maryland, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 2009. p. 631–638. DOI: 10.1145/1536414.1536500.
4. Kratochvíl J, Matoušek J. Intersection graphs of segments. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1994;62(2):289–315. DOI: 10.1006/jctb.1994.1071.
5. Kratochvíl J. String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1):67–78. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90091-W.
6. Ore O. *Graphs and their uses*. New York: Random House; 1963. VIII, 131 p.
Russian edition: Ore O. *Графы и их применение*. Golovina LI, translator; Yaglom IM, editor. Moscow: Mir; 1965. 174 p.
7. Kratochvíl J. String graphs. I. The number of critical nonstring graphs is infinite. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. 1991;52(1):53–66. DOI: 10.1016/0095-8956(91)90090-7.
8. Dangelmayr C. *Intersection graphs of pseudosegments* [dissertation]. Berlin: Freien Universität Berlin; 2010. 136 p.
9. Fuks DB. [Selfintersections of closed polygonal chains]. *Kvant*. 1988;1:30–34. Russian.
10. Keil JM. The complexity of domination problems in circle graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1993;42(1):51–63. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90178-Q.
11. Unger W. On the k-colouring of circle-graphs. In: Cori R, Wirsing M, editors. *STACS 88. 5th Annual symposium on theoretical aspects of computer science; 1988 February 11–13; Bordeaux, France*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. p. 61–72. (Lecture Notes in Computer Science; volume 294).
12. Damaschke P. The Hamiltonian circuit problem for circle graphs is NP-complete. *Information Processing Letters*. 1989;32(1):1–2. DOI: 10.1016/0020-0190(89)90059-8.
13. Garey MR, Johnson DS. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. New York: W. H. Freeman and Company; 1979. X, 338 p.
14. Valiant LG. Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*. 1981;C-30(2):135–140. DOI: 10.1109/TC.1981.6312176.
15. Renegar J. On the computational complexity and geometry of the first-order theory of the reals. Part I: Introduction. Preliminaries. The geometry of semi-algebraic sets. The decision problem for the existential theory of the reals. *Journal of Symbolic Computation*. 1992;13(3):255–299. DOI: 10.1016/S0747-7171(10)80003-3.
16. Pilz A, Welzl E. Order on order types. In: Arge L, Pach J, editors. *31st International symposium on computational geometry (SoCG'2015); 2015 June 22–25; Eindhoven, The Netherlands*. Wadern: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik; 2015. p. 285–299. (LIPIcs; volume 34). DOI: 10.4230/LIPIcs.SOCG.2015.285.
17. Goodman JE, Pollack R, Sturmfels B. The intrinsic spread of a configuration in \mathbb{R}^d . *Journal of the American Mathematical Society*. 1990;3(3):639–651. DOI: 10.1090/S0894-0347-1990-1046181-2.

Статья поступила в редколлегию 08.09.2020.
Received by editorial board 08.09.2020.