Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021;1:18–38
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021;1:18–38

УДК 517.956

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Впервые получена явная формула единственного и устойчивого классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью в части первой четверти плоскости, где заданы граничное и начальные условия. Доказана корректность первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости. Существование классического решения установлено методом продолжения по параметру с помощью теорем о повышении гладкости сильных решений. Единственность этого решения выведена из энергетического неравенства для сильных решений. Установлена устойчивость решения и получены необходимые и достаточные условия гладкости граничного и начальных данных и три условия их согласования с правой частью уравнения. Для правой части уравнения указаны достаточные требования гладкости.

Ключевые слова: общее телеграфное уравнение; переменные коэффициенты; неявные характеристики; критическая характеристика; смешанная задача; классическое решение.

THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS ON THE HALF-LINE

F. E. LOMAUTSAU[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

For the first time, an explicit formula is obtained for the unique and stable classical solution of the inhomogeneous model telegraph equation with variable velocity in the part of the first quarter of the plane, where the boundary and initial conditions are specified. The correctness of the first mixed problem for the general inhomogeneous telegraph equation in the first quarter of the plane is proved. The existence of a classical solution was established by the continuation method with respect to a parameter using theorems on increasing the smoothness of strong solutions. The uniqueness of this solution is derived from the energy inequality for strong solutions. The stability of the solution is established and necessary and sufficient smoothness conditions of the boundary and initial data and three their matching conditions with the right-hand side of the equation are derived. Sufficient smoothness requirements are indicated for the right-hand side of the equation.

Keywords: general telegraph equation; variable coefficients; implicit characteristics; critical characteristic; mixed problem; classical solution.

Образец цитирования:
Ломовцев ФЕ. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:18–38.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38

For citation:
Lomautsau FE. The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:18–38. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38

Автор:
Федор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Author:
Fiodar E. Lomautsau, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
lomovcev@bsu.by

Введение

В настоящей работе обобщаются результаты кандидатской диссертации С. Н. Барановской [1] на неоднородное телеграфное уравнение в случае полупрямой без периодических продолжений входных данных первой смешанной задачи и переменных коэффициентов уравнения вне области их первоначального задания. Областью задания рассматриваемой задачи служит первая четверть плоскости. Из [1] автором воспроизведена формула Даламбера классического решения первой смешанной задачи для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью в той части первой четверти, в которой задаются только начальные условия. В представленной работе впервые найдена явная формула единственного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью в другой части первой четверти плоскости, где задаются граничное и начальные условия. Эта формула, естественно, отличается от обычной формулы Даламбера (см. теорему 1). Новая формула вместе с известной формулой Даламбера позволила автору доказать существование классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости (см. теорему 2) с помощью метода продолжения по параметру и теорем о повышении гладкости сильных обобщенных решений этой смешанной задачи. Единственность классического решения была выведена из энергетического неравенства сильных решений задачи в первой четверти плоскости. По теореме Банаха о замкнутом графике отсюда следует устойчивость такого решения по входным данным (см. теорему 2). Кроме того, в настоящей работе выведены необходимые и достаточные требования гладкости граничного и начальных данных и три условия их согласования с правой частью телеграфного уравнения при ее достаточной гладкости (см. теорему 2). Позже полученные результаты и «метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [2] будут использованы для аналогичной задачи на отрезке.

В диссертации [1] методом продолжений доказано существование классического решения первой смешанной задачи для общего однородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке при условиях на начальные данные, совпадающих с необходимыми. В ней главная идея решения такой задачи в полуполосе плоскости заключалась в сведении ее к задаче Коши в верхней полуплоскости за счет периодических продолжений входных данных и коэффициентов уравнения с полуполосы на верхнюю полуплоскость и применения формулы Даламбера. Однако нет доказательства эквивалентности этих двух краевых задач.

Если для простейшего телеграфного уравнения с потенциалом Дирака в [3; 4] найдены формулы единственных классических и (или) обобщенных решений задачи Коши и некоторых смешанных задач, а в [5] при нулевом потенциале и разрывных коэффициентах действительно получено обобщение формулы Даламбера единственного обобщенного решения задачи Коши, то в [6–14] формулы обобщенных (почти классических) решений смешанных задач так же, как в [1], продолжают считать и называть (обобщенной) формулой Даламбера. Например, в [14] говорится: «В случае нулевого потенциала полученный ряд переходит в обычную формулу Даламбера» [14, с. 124]. Здесь полученный ряд Фурье выражает обобщенное решение некоторой смешанной задачи для простейшего телеграфного уравнения на отрезке. Автор указанной статьи утверждает: «Методом А. П. Хромова построен ряд – обобщенная формула Даламбера» [14, с. 124]. Под методом Хромова понимается модификация метода Фурье в [6; 9; 11] путем использования резольвентного метода, идеи Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и идеи Эйлера о расходящихся рядах. Впервые формула Даламбера была выведена Л. Эйлером в 1748 г. В настоящей работе решение смешанной задачи с полуразностью значений начального смещения (см. теорему 1, функцию (12)) не соответствует обычной формуле Даламбера.

Одномерное волновое уравнение с переменной скоростью $a(x, t)$

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ изучается смешанная задача

$$\hat{\mathcal{L}} u \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t) u_{xx}(x, t) - a^{-1}(x, t) a_t(x, t) u_t(x, t) -$$
$$- a(x, t) a_x(x, t) u_x(x, t) = \hat{f}(x, t), \; (x, t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$l_0 u \equiv u(x, 0) = \varphi(x), \; l_1 u \equiv u_t(x, 0) = \psi(x), \; x > 0, \tag{2}$$

$$\mathcal{G} u \equiv u(0, t) = \mu(t), \; t > 0, \tag{3}$$

где $\hat{f}$, φ, ψ, μ – заданные вещественные функции своих переменных x и t; коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, и $a \in C^2(G_\infty)$. Число нижних индексов функций соответствует порядку их частных производных. Здесь $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty, +\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x, t)dt, \ i = 1, 2, \tag{4}$$

которые имеют общие интегралы $g_i(x, t) = C_i$, $C_i \in R$, $i = 1, 2$. Если коэффициент a строго положителен, т. е. $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристиках $g_1(x, t) = C_1$, $C_1 \in R$, строго убывает, а на характеристиках $g_2(x, t) = C_2$, $C_2 \in R$, строго возрастает вместе с увеличением x. Поэтому неявные функции $y_i = g_i(x, t) = C_i$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, обладают строго монотонными обратными функциями $x = h_i\{y_i, t\}$, $t \geq 0$, $t = h^{(i)}[x, y_i]$, $x \geq 0$, $i = 1, 2$. По определению обратных отображений они удовлетворяют следующим тождествам обращения:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \ \forall y_i, \ h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \ x \geq 0, \ i = 1, 2, \tag{5}$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \ \forall y_i, \ h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \ t \geq 0, \ i = 1, 2, \tag{6}$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \ x \geq 0, \ h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \ t \geq 0, \ i = 1, 2. \tag{7}$$

В правых частях тождеств (5)–(7) вместе со взаимообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, даже если в левых частях указанных тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициент $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, то функции g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ по x, t, y_i, $i = 1, 2$ [15].

В случае $a(x, t) = a = \text{const} > 0$ ими являются функции $g_1(x, t) = x + at$, $g_2(x, t) = x - at$, $h_1\{y_1, t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2, t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x, y_1] = \dfrac{y_1 - x}{a}$, $h^{(2)}[x, y_2] = \dfrac{x - y_2}{a}$.

Определение 1. Классическим решением задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^2(G_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле в $\dot{G}_\infty$, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле значений соответствующих пределов функции $u(\dot{x}, \dot{t})$ или ее производной $u_t(\dot{x}, \dot{t})$ по t для внутренних точек $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$, стремящихся к граничным точкам (x, t), указанным в (2) и (3).

Найдем в явном виде классическое решение и критерий (необходимые и достаточные условия) корректности (по Адамару – существования, единственности решения и его устойчивости по исходным данным $\hat{f}$, φ, ψ, μ) первой смешанной задачи (1)–(3) на полупрямой.

Из постановки первой смешанной задачи (1)–(3) и определения 1 ее классических решений вытекают очевидные необходимые требования гладкости:

$$\hat{f} \in C(G_\infty), \ \varphi \in C^2[0, +\infty[, \ \psi \in C^1[0, +\infty[, \ \mu \in C^2[0, +\infty[. \tag{8}$$

Ниже будут установлены дополнительные и только достаточные требования гладкости на $\hat{f}$. Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3), его первой и второй производных по t соответственно, с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = t = 0$ выводим необходимые условия согласования:

$$\begin{gathered}\varphi(0) = \mu(0), \ \psi(0) = \mu'(0), \\ \hat{S} \equiv \hat{f}(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) + a^{-1}(0, 0)a_t(0, 0)\psi(0) + a(0, 0)a_x(0, 0)\varphi'(0) = \mu''(0).\end{gathered} \tag{9}$$

Количество штрихов над функциями одной переменной соответствует порядку их обыкновенных производных по этим переменным.

Пусть критическая характеристика $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ делит четверть плоскости G_∞ на два множества: $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}$ и $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициент* $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, *и* $a \in C^2(G_\infty)$. *Тогда для существования единственного и устойчивого классического решения* $u \in C^2(G_\infty)$ *первой смешанной задачи (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *достаточно требований гладкости (8),*

$$H_i(x,t) \equiv \int_0^t \frac{\hat{f}\left(\left|h_i\{g_i(x,t),\tau\}\right|,\tau\right)}{a\left(\left|h_i\{g_i(x,t),\tau\}\right|,\tau\right)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty),\ i=1,2, \tag{10}$$

и условий согласования (9), а также необходимо выполнение требований гладкости (8) и условий согласования (9). Этим классическим решением задачи (1)–(3) служит функция

$$\hat{u}_-(x,t) = \frac{\varphi\left(h_2\{g_2(x,t),0\}\right)+\varphi\left(h_1\{g_1(x,t),0\}\right)}{2} + \frac{1}{2}\int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)} d\nu +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\hat{f}(s,\tau)}{a(s,\tau)} ds,\ (x,t)\in G_-, \tag{11}$$

$$\hat{u}_+(x,t) = \frac{\varphi\left(h_1\{g_1(x,t),0\}\right) - \varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\right),0\right\}\right)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{h_1\left\{g_1\left(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\right),0\right\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)} d\nu + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\hat{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)} ds + \mu\left(h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tau \int_{h_1\left\{g_1\left(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]\right),\tau\right\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\hat{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)} ds,\ (x,t)\in G_+. \tag{12}$$

Доказательство. *Достаточность.* Вычислим общий интеграл классических решений уравнения (1) в G_∞. Заменой

$$\xi = g_1(x,t),\ \eta = g_2(x,t) \tag{13}$$

с невырожденным якобианом $J(x,t) = \xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x \neq 0$ в G_∞, потому что $a(x,t) \geq a_0 > 0$ в G_∞, уравнение (1) приводится к виду

$$\left[(\xi_t)^2 - a^2(\xi_x)^2\right]\tilde{u}_{\xi\xi} + 2aJ(x,t)\tilde{u}_{\xi\eta} + \left[(\eta_t)^2 - a^2(\eta_x)^2\right]\tilde{u}_{\eta\eta} +$$

$$+\left[\xi_{tt} - a^2\xi_{xx} - a^{-1}a_t\xi_t - aa_x\xi_x\right]\tilde{u}_\xi + \left[\eta_{tt} - a^2\eta_{xx} - a^{-1}a_t\eta_t - aa_x\eta_x\right]\tilde{u}_\eta =$$

$$= \tilde{f}(\xi,\eta) = \hat{f}\left(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\right) \tag{14}$$

относительно функции $\tilde{u}(\xi,\eta) = u\left(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\right) \in C^2\left(\tilde{G}_\infty\right)$, где $\tilde{G}_\infty$ – образ множества G_∞ при замене переменных (13). Согласно (4) полные дифференциалы равны нулю:

$$dg_i = (g_i)_x dx + (g_i)_t dt = \left[(g_i)_t + (-1)^i a(x,t)(g_i)_x\right] dt \equiv 0,\ (x,t)\in G_\infty,\ i=1,2,$$

и, следовательно, ввиду (13) имеем соотношения

$$(g_i)_t \equiv (-1)^{i+1} a(x,t)(g_i)_x,\ (x,t)\in G_\infty,\ i=1,2, \tag{15}$$

$$\xi_t - a(x,t)\xi_x = 0,\ \eta_t + a(x,t)\eta_x = 0,\ (x,t)\in G_\infty. \tag{16}$$

Каждое из уравнений (16) однократно дифференцируем по t и x, результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент a результатов дифференцирования по x, в полученных суммах соответственно применяем эти же уравнения (16) и получаем

$$\xi_{tt} - a^2\xi_{xx} = a^{-1}a_t\xi_t + aa_x\xi_x,\ \eta_{tt} - a^2\eta_{xx} = a^{-1}a_t\eta_t + aa_x\eta_x,\ (x,t)\in G_\infty. \tag{17}$$

В силу тождеств (16), (17) уравнение (14) становится уравнением

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{2a(x, t)J(x, t)}, \ (\xi, \mu) \in \tilde{G}_\infty. \tag{18}$$

Только ради упрощения изложения для $t \geq 0$ функции a, $\hat{f}$ продолжаем четно по x с G_∞ на все $x < 0$. В плоскости $Os\tau$ берем криволинейный характеристический треугольник ΔMPQ с любой вершиной $M(x, t) \in \dot{G}_\infty$ и вершинами основания $P\left(h_2\left\{g_2(x, t), 0\right\}, 0\right)$ и $Q\left(h_1\left\{g_1(x, t), 0\right\}, 0\right)$ – точками пересечения характеристик $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$ и $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ с осью $0s$. Интегрируем уравнение (18) по $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из $\tilde{G}_\infty$ – образу ΔMPQ из G_∞ при переменных (s, τ), делаем обратную замену переменных к (13), двойной интеграл по ΔMPQ сводим к повторным интегралам и для уравнения (1) в G_∞ находим общий интеграл

$$u(x, t) = \tilde{f}_1\big(g_1(x, t)\big) + \tilde{f}_2\big(g_2(x, t)\big) + F(x, t), \ (x, t) \in G_\infty, \tag{19}$$

где любые дважды непрерывно дифференцируемые функции $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ переменных ξ, η [16]

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2\big(g_2(0, 0)\big), \ \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2\big(g_2(0, 0)\big), \tag{20}$$

$$F(x, t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta MPQ} \frac{\hat{f}(|x|, t)}{a(|x|, t)}dxdt = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\hat{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)}ds. \tag{21}$$

Ниже будет доказано, что функция $F \in C^2(G_\infty)$ благодаря (10) для $\hat{f} \in C(G_\infty)$ из (8).

Вычислим формулу пока формального решения $\hat{u}_-$ в G_- исходной смешанной задачи. Решением задачи (1)–(3) в G_- служит решение задачи Коши (1), (2). Подставляя общий интеграл (19) в начальные условия (2), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \tilde{f}_1\big(g_1(x, 0)\big) + \tilde{f}_2\big(g_2(x, 0)\big) = \varphi(x), \\ \left.\left(\dfrac{\partial\tilde{f}_1\big(g_1(x, t)\big)}{\partial g_1}(g_1)_t\right)\right|_{t=0} + \left.\left(\dfrac{\partial\tilde{f}_2\big(g_2(x, t)\big)}{\partial g_2}(g_2)_t\right)\right|_{t=0} = \psi(x), \ x \geq 0, \end{cases} \tag{22}$$

так как производная $F_t(x, t)\big|_{t=0} = 0$ благодаря свойству $h_i\left\{g_i(x, t), t\right\} = x, x \geq 0, i = 1, 2$, из (5). Поскольку $(g_1)_t = \xi_t = a(x, t)\xi_x$ и $(g_2)_t = \eta_t = -a(x, t)\eta_x$ согласно (13), то система (22) равна системе

$$\begin{cases} \left[\tilde{f}_1(\xi) + \tilde{f}_2(\eta)\right]\Big|_{t=0} = \varphi(x), \\ \left[\big(\tilde{f}_1(\xi)\big)_\xi \xi_x - \big(\tilde{f}_2(\eta)\big)_\eta \eta_x\right]\Big|_{t=0} = \left[\big(\tilde{f}_1(\xi)\big)_x - \big(\tilde{f}_2(\eta)\big)_x\right]\Big|_{t=0} = \dfrac{\psi(x)}{a(x, 0)}. \end{cases}$$

Используя коммутируемость операции дифференцирования по x и взятия следа при $t = 0$, интегрируем по x от 0 до x второе уравнение этой системы и в результате имеем

$$\left[\tilde{f}_1(\xi) - \tilde{f}_2(\eta)\right]\Big|_{t=0} = \int_0^x \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu + C, \ C \in R.$$

Если это уравнение сначала прибавить к первому уравнению последней системы и потом вычесть из него, то при $y_i = g_i(x, 0)$, $i = 1, 2$, из (13) в силу вторых тождеств из (5) при $i = 1, 2$ последовательно находим решения системы (22):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(y_1) &= \frac{\varphi\big(h_1\{y_1, 0\}\big)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{h_1\{y_1, 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu + C, \\ \tilde{f}_2(y_2) &= \frac{\varphi\big(h_2\{y_2, 0\}\big)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{h_2\{y_2, 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu - C. \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляем функции (23) при $y_i = g_i(x, t)$, $i = 1, 2$, в общий интеграл (19) и получаем единственное формальное решение $\hat{u}_-$ вида (11) из теоремы 1.

Ищем формальное решение $\hat{u}_+$ смешанной задачи (1)–(3) на G_+ как решение задачи Пикара для уравнения (1) при равенстве функций видов (19) и (11) на характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ и граничном режиме (3) при $x = 0$. Нам известно, что неявная функция $y_2 = g_2(x, t)$ при $y_2 = g_2(0, 0)$ имеет обратную функцию $x = h_2\{g_2(0, 0), t\}$ при $y_2 = g_2(0, 0)$. Поэтому на критической характеристике $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ разность функции (19) и непрерывного продолжения функции (11) с G_- на эту характеристику равна

$$\left[u - \hat{u}_-\right]\Big|_{g_2(x,t) = g_2(0,0)} = \tilde{f}_1\left(g_1(x, t)\right)_{x = h_2\{g_2(0,0),\, t\}} + \tilde{f}_2\left(g_2(0, 0)\right) -$$

$$-\frac{\varphi\left(h_1\{g_1(x, t), 0\}\right)\Big|_{x = h_2\{g_2(0,0),\, t\}} + \varphi\left(h_2\{g_2(0, 0), 0\}\right)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(0,0),\,0\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,0\}|_{x = h_2\{g_2(0,0),\,t\}}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu =$$

$$= \tilde{f}_1\Big(g_1\big(h_2\{g_2(0, 0), t\}, t\big)\Big) - \frac{\varphi\Big(h_1\big\{g_1\big(h_2\{g_2(0, 0), t\}, t\big), 0\big\}\Big) + \varphi(0)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),\,t\},\,t),\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu = 0,$$

так как $\tilde{f}_2\left(g_2(0, 0)\right) = 0$ ввиду (20) и $h_2\{g_2(0, 0), 0\} = 0$ в силу второго тождества из (5) при $i = 2$, $x = 0$. Отсюда при $z_1 = g_1\big(h_2\{g_2(0, 0), t\}, t\big)$ находим первую функцию:

$$\tilde{f}_1(z_1) = \frac{\varphi\left(h_1\{z_1, 0\}\right) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{h_1\{z_1,\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu. \tag{24}$$

Подставляем общий интеграл (19) в граничный режим (3):

$$\tilde{f}_1\left(g_1(0, t)\right) + \tilde{f}_2\left(g_2(0, t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(0,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\,\tau\}} \frac{\hat{f}\left(|s|, \tau\right)}{a\left(|s|, \tau\right)}ds = \mu(t),\ t \ge 0.$$

Отсюда и из выражения (24) выводим вторую функцию:

$$\tilde{f}_2\left(g_2(0, t)\right) = \mu(t) - \frac{\varphi\left(h_1\{g_1(0, t), 0\}\right) + \varphi(0)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,t),\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(0,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\,\tau\}} \frac{\hat{f}\left(|s|, \tau\right)}{a\left(|s|, \tau\right)}ds.$$

Здесь, полагая $z_2 = g_2(0, t)$ и тем самым $t = h^{(2)}[0, z_2]$, имеем

$$\tilde{f}_2(z_2) = \mu\left(h^{(2)}[0, z_2]\right) - \frac{\varphi\Big(h_1\big\{g_1\big(0, h^{(2)}[0, z_2]\big), 0\big\}\Big) + \varphi(0)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,\,h^{(2)}[0,\,z_2]),\,0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)}d\nu - \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,\,z_2]} d\tau \int\limits_{h_2\{z_2,\,\tau\}}^{h_1\{g_1(0,\,h^{(2)}[0,\,z_2]),\,\tau\}} \frac{\hat{f}\left(|s|, \tau\right)}{a\left(|s|, \tau\right)}ds, \tag{25}$$

так как $g_2\left(0, h^{(2)}[0, z_2]\right) = z_2$ ввиду первого тождества из (6) при $i = 2$, $x = 0$. Подставляем функции (24) при $z_1 = g_1(x, t)$ и (25) при $z_2 = g_2(x, t)$ в общий интеграл (19) и получаем формальное решение $\hat{u}_+$ вида (12) на G_+.

Сначала покажем дважды непрерывную дифференцируемость функций u_- на G_- и u_+ на G_+. Гладкости g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$, $i = 1, 2$, и гладкости на φ, ψ, μ из (8) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости всех слагаемых, которые их содержат в функциях (11) на G_- и (12) на G_+. Убедимся в том, что гладкости $\hat{f} \in C(G_\infty)$ из (8) и гладкости (10) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости остальных слагаемых функций (11) на G_- и (12) на G_+.

Вычислим производную от F вдоль характеристик $g_i(x, t) = C_i$, $i = 1, 2$. Поскольку градиенты $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g_i(x, t) = \{(g_i)_x, (g_i)_t\}$ направлены по нормалям в точках этих характеристик, то векторы $\vec{\upsilon}_i = \{-(g_i)_t, (g_i)_x\}$ ориентированы вдоль характеристик $g_i(x, t) = C_i$, $i = 1, 2$, потому что их скалярные произведения $\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g_i(x, t), \vec{\upsilon}_i\right) = -(g_i)_x (g_i)_t + (g_i)_t (g_i)_x = 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $i = 1, 2$. Ввиду тождеств из (5) первые частные производные от функции F вида (21) равны

$$F_t = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\hat{f}\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - \frac{\hat{f}\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

$$F_x = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\hat{f}\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} - \frac{\hat{f}\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau.$$

Поэтому производными от F вдоль характеристик служат функции

$$(g_1)_x F_t - (g_1)_t F_x = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\hat{f}\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \left[(g_1)_t \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial x} - (g_1)_x \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial t} \right] d\tau,$$

$$(g_2)_x F_t - (g_2)_t F_x = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\hat{f}\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \left[(g_2)_x \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial t} - (g_2)_t \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial x} \right] d\tau,$$

так как для частных производных от функций $h_i = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$ справедливы соотношения

$$(g_i)_t \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial x} - (g_i)_x \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial t} = (g_i)_t \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_x - (g_i)_x \frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_t \equiv 0,\ i = 1, 2,$$

где символом $\{\bullet\}$ обозначены указанные выше переменные функций $h_i = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$.

Более того, согласно замене (13) этими производными являются функции

$$K_2(x, t) \equiv (g_1)_x F_t - (g_1)_t F_x = -\frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{\hat{f}\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_2\{g_2(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \frac{\partial h_2\{g_2(x, t), \tau\}}{\partial g_2} d\tau, \tag{26}$$

$$K_1(x, t) \equiv (g_2)_x F_t - (g_2)_t F_x = -\frac{1}{2} J(x, t) \int_0^t \frac{\hat{f}\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)}{a\left(\left|h_1\{g_1(x, t), \tau\}\right|, \tau\right)} \frac{\partial h_1\{g_1(x, t), \tau\}}{\partial g_1} d\tau. \tag{27}$$

Из формул (26) и (27) выводим, что если $\hat{f} \in C(G_\infty)$ и для H_i верны включения (10), то

$$F_t(x, t) = \frac{\left[\eta_t K_2(x, t) - \xi_t K_1(x, t)\right]}{J(x, t)} \in C^1(G_\infty),$$

$$F_x(x, t) = \frac{\left[\eta_x K_2(x, t) - \xi_x K_1(x, t)\right]}{J(x, t)} \in C^1(G_\infty),$$

так как якобиан $J(x, t) \neq 0$ в G_∞ и $J \in C^2(G_\infty)$. Эти равенства и включения подтверждают дважды непрерывную дифференцируемость функции F вида (21) в формулах (11) и (12) на G_∞.

Благодаря гладкости функций $g_i,\ h_i,\ h^{(i)} \in C^2,\ i=1,\ 2,$ для доказательства дважды непрерывной дифференцируемости на G_+ последнего повторного интеграла из (12) достаточно убедиться в непрерывной дифференцируемости производной по z_2 от последнего интеграла функции $\tilde{f}_2(z_2)$ из (25), который без коэффициента $-\frac{1}{2}$ ниже обозначен через $F_0(z_2)$:

$$\frac{\partial F_0(z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial h^{(2)}[0,\ z_2]}{\partial z_2} \int\limits_{h_2\left\{z_2,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right\}}^{h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right),\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right\}} \frac{\hat{f}\left(|s|,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right)}{a\left(|s|,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right)} ds +$$

$$+ \int\limits_0^{h^{(2)}[0,\ z_2]} \left[\frac{\hat{f}\left(\left|h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right),\ \tau\right\}\right|,\ \tau\right)}{a\left(\left|h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right),\ \tau\right\}\right|,\ \tau\right)} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial z_2} - \frac{\hat{f}\left(\left|h_2\{z_2,\ \tau\}\right|,\ \tau\right)}{a\left(\left|h_2\{z_2,\ \tau\}\right|,\ \tau\right)} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial z_2} \right] d\tau. \qquad (28)$$

Здесь первый интеграл равен нулю, поскольку пределы интегрирования $h_1\left\{g_1(0,\ t),\ t\right\}=0$ и $h_2\left\{z_2,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right\}=0$ ввиду (5) при $i=1,\ t=h^{(2)}[0,\ z_2]$ и (7) при $i=2,\ y_2=z_2$ соответственно. Производная (28) при $\tilde{t}=h^{(2)}[0,\ z_2]$ равна

$$\frac{\partial F_0(z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial g_1(0,\ \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial z_2} \int\limits_0^{\tilde{t}} \frac{\hat{f}\left(\left|h_1\left\{g_1(0,\ \tilde{t}),\ \tau\right\}\right|,\ \tau\right)}{a\left(\left|h_1\left\{g_1(0,\ \tilde{t}),\ \tau\right\}\right|,\ \tau\right)} \frac{\partial h_1\left\{g_1(0,\ \tilde{t}),\ \tau\right\}}{\partial g_1} d\tau -$$

$$- \int\limits_0^{\tilde{t}} \frac{\hat{f}\left(\left|h_2\left\{g_2(0,\ \tilde{t}),\ \tau\right\}\right|,\ \tau\right)}{a\left(\left|h_2\left\{g_2(0,\ \tilde{t}),\ \tau\right\}\right|,\ \tau\right)} \frac{\partial h_2\left\{g_2(0,\ \tilde{t}),\ \tau\right\}}{\partial g_2} d\tau = \frac{\partial g_1(0,\ \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial z_2} H_1(0,\ \tilde{t}) - H_2(0,\ \tilde{t}) \in C^1[0,\ +\infty[,$$

потому что если $\tilde{t}=h^{(2)}[0,\ z_2]$, то $z_2=g_2\left(0,\ h^{(2)}[0,\ z_2]\right)=g_2(0,\ \tilde{t})$ из (6) при $i=2,\ y_2=z_2$. Таким образом, непрерывная дифференцируемость производной $\frac{\partial F_0}{\partial z_2}$ по $\tilde{t}$ и, значит, по z_2 следует из интегральных требований гладкости (10) при $x=0$.

Осталось проверить дважды непрерывную дифференцируемость функций (11) в замыкании $\overline{G_-}$ множества G_- и (12) в G_+ на общей характеристике $g_2(x,\ t)=g_2(0,\ 0)$. Первое условие согласования из (9) обеспечивает их непрерывность на этой характеристике:

$$\left[\hat{u}_- - \hat{u}_+\right]\Big|_{g_2(x,\ t)=g_2(0,\ 0)} = \frac{\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}\left[0,\ g_2(0,\ 0)\right]\right),\ 0\right\}\right) + \varphi\left(h_2\left\{g_2(0,\ 0),\ 0\right\}\right)}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}\left[0,\ g_2(0,\ 0)\right]\right),\ 0\right\}}^{h_2\{g_2(0,\ 0),\ 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,\ 0)} d\nu - \mu\left(h^{(2)}\left[0,\ g_2(0,\ 0)\right]\right) - \frac{1}{2} F_0(z_2)\Big|_{z_2=g_2(0,\ 0)} = \varphi(0) - \mu(0), \qquad (29)$$

так как $h^{(2)}\left[0,\ g_2(0,\ 0)\right]=0$ в (6) при $i=2,\ t=0$ и $h_i\left[g_i(0,\ 0),\ 0\right]=0$ в (5) при $i=1,\ 2,\ x=0$.

Вычисляем первую производную по t разности функций (11) в $\overline{G_-}$ и (12) в G_+:

$$\frac{\partial \hat{u}_-}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}_+}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi\left(h_2\left\{g_2(x,\ t),\ 0\right\}\right)}{dh_2} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t} + \frac{d\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}\left[0,\ g_2(x,\ t)\right]\right),\ 0\right\}\right)}{dh_1} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{\psi\left(h_2\left\{g_2(x,\ t),\ 0\right\}\right)}{a\left(h_2\left\{g_2(x,\ t),\ 0\right\},\ 0\right)} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t} - \frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}\left[0,\ g_2(x,\ t)\right]\right),\ 0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,\ h^{(2)}\left[0,\ g_2(x,\ t)\right]\right),\ 0\right\},\ 0\right)} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} \right] -$$

$$-\frac{d\mu\left(h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right)}{dh^{(2)}}\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[H_1(0,\,\tilde{t})\frac{\partial g_1(0,\,\tilde{t})}{\partial t}-H_2(0,\,\tilde{t})\frac{\partial g_2(0,\,\tilde{t})}{\partial t}\right],\ x,\, t\ge 0, \tag{30}$$

где старым символом $\{\bullet\}$ обозначены переменные функции $h_1 = h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}$, а новым символом $[\bullet]$ – переменные функции $h^{(2)} = h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]$.

Дифференцируем один раз по t как сложную функцию, используем дифференциальные уравнения характеристик (15) и приходим к тождествам

$$\frac{\partial h_i\{g_i(x,\, t),\, 0\}}{\partial t}=\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_t=(-1)^{i+1}a(x,\, t)\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_x=$$

$$=(-1)^{i+1}a(x,\, t)\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial x},\ x,\, t\ge 0,\ i=1,\, 2. \tag{31}$$

В силу вторых формул обращения из (5) при $i = 1, 2$, $t = 0$ находим

$$\left.\frac{\partial h_i\{g_i(x,\, t),\, 0\}}{\partial x}\right|_{t=0}=1,\ x\ge 0,\ i=1,\, 2, \tag{32}$$

и, следовательно, из (31) имеем

$$\left.\frac{\partial h_i\{g_i(x,\, t),\, 0\}}{\partial t}\right|_{t=0}=(-1)^{i+1}a(x,\, 0),\ x\ge 0,\ i=1,\, 2, \tag{33}$$

так как в правых частях тождеств (31) взятие следа при $t = 0$ перестановочно с дифференцированием по x. Ввиду второй формулы обращения из (6) при $i = 2$, $x = 0$ из $h^{(2)}\left[0,\, g_2(0,\, t)\right]=t$ и равенства (33) при $i = 1$, $x = 0$ выводим

$$\left.\frac{\partial h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]}{\partial t}\right|_{x=0}=1,\ t\ge 0, \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}}{\partial t}\right|_{x=t=0}=a(0,\, 0), \tag{35}$$

потому что здесь взятие следа при $x = 0$ перестановочно с дифференцированием по t.

В тождестве (30) полагаем $g_2(x,\, t)=g_2(0,\, 0)$, т. е. $x = t = 0$, и на основе значений (33) при $i = 2$, (34), (35), а также второго условия согласования из (9) приходим к равенству

$$\left.\left[\frac{\partial u_-}{\partial t}-\frac{\partial u_+}{\partial t}\right]\right|_{g_2(x,\, t)=g_2(0,\, 0)}=\psi(0)-\mu'(0)=0, \tag{36}$$

так как $\tilde{t}=h^{(2)}\left[0,\, g_2(0,\, 0)\right]=0$ ввиду вторых формул обращения из (6) для $i = 2, x = t = 0$ и $h_i\{g_i(0,\, 0),\, 0\}=0$ ввиду вторых формул обращения из (5) для $i = 1, 2$, $x = t = 0$.

Находим первую производную по x разности функций (11) в $\overline{G_-}$ и (12) в G_+:

$$\frac{\partial \hat{u}_-}{\partial x}-\frac{\partial \hat{u}_+}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[\frac{d\varphi\left(h_2\{g_2(x,\, t),\, 0\}\right)}{dh_2}\frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x}+\frac{d\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}\right)}{dh_1}\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(h_2\{g_2(x,\, t),\, 0\}\right)}{a\left(h_2\{g_2(x,\, t),\, 0\},\, 0\right)}\frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x}-\frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\},\, 0\right)}\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x}\right]-$$

$$-\frac{d\mu\left(h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right)}{dh^{(2)}}\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[H_1(0,\,\tilde{t})\frac{\partial g_1(0,\,\tilde{t})}{\partial x}-H_2(0,\,\tilde{t})\frac{\partial g_2(0,\,\tilde{t})}{\partial x}\right],\ x,\,t\geq 0. \tag{37}$$

След при $x = 0$ левой части равенства (32) для $i = 1$ нельзя внести под производную по x от h_1 и, значит, невозможно получить аналог формулы (35) для производной по x от h_1 из (32) для $i = 1$. Поэтому берем первую производную по x от более сложной функции, чем функция $h_1 = h_1\{g_1(x,\,t),\,0\}$, и благодаря уравнению характеристики из (15) для $i = 2$ находим

$$\frac{\partial h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}}{\partial x}=\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial g_2}(g_2)_x=-\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial g_2}\frac{(g_2)_t}{a(x,\,t)}=-\frac{1}{a(x,\,t)}\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t},\ x,\,t\geq 0. \tag{38}$$

Из тождества (38) при $x = t = 0$ с помощью равенства (34) имеем

$$\left.\frac{\partial h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}}{\partial x}\right|_{x=t=0}=-1. \tag{39}$$

Аналогичное однократное дифференцирование по x дает тождество

$$\frac{\partial h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]}{\partial x}=\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial g_2}(g_2)_x=-\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial g_2}\frac{(g_2)_t}{a(x,\,t)}=-\frac{1}{a(x,\,t)}\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t},\ x,\,t\geq 0. \tag{40}$$

Согласно равенству (34) из тождества (40) при $x = 0$ находим

$$\left.\frac{\partial h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{1}{a(0,\,t)},\ t\geq 0. \tag{41}$$

С помощью соотношений (32) при $i = 2$, (39), (41) и второго условия согласования в (9) из тождества (37) для $x = t = 0$ аналогично формуле (36) получаем

$$\left.\left[\frac{\partial\hat{u}_-}{\partial x}-\frac{\partial\hat{u}_+}{\partial x}\right]\right|_{g_2(x,\,t)=g_2(0,\,0)}=\frac{\mu'(0)-\psi(0)}{a(0,\,0)}=0. \tag{42}$$

Дифференцируем еще раз по t выражение (30) и для всех $x,\,t \geq 0$ имеем

$$\frac{\partial^2\hat{u}_-}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\hat{u}_+}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\varphi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{dh_2^2}\left(\frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{d^2\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{dh_1^2}\left(\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d\varphi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{dh_2}\frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial t^2}+\frac{d\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{dh_1}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial t^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\psi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{a\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\},\,0\right)}\right)_t\frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t}-\left(\frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\},\,0\right)}\right)_t\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\big(h_2\{g_2(x,t),0\}\big)}{a\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)}\frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial t^2}-\frac{\psi\Big(h_1\Big\{g_1\Big(0,h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]\Big),0\Big\}\Big)}{a\Big(h_1\Big\{g_1\Big(0,h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]\Big),0\Big\},0\Big)}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial t^2}\right]-$$

$$-\frac{d^2\mu\Big(h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]\Big)}{dh^{(2)2}}\left(\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t}\right)^2-\frac{d\mu\Big(h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]\Big)}{dh^{(2)}}\frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[H_1(0,\tilde t)\frac{\partial^2 g_1(0,\tilde t)}{\partial t^2}-H_2(0,\tilde t)\frac{\partial^2 g_2(0,\tilde t)}{\partial t^2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_1(0,\tilde t)}{\partial t}\frac{\partial g_1(0,\tilde t)}{\partial t}-\frac{\partial H_2(0,\tilde t)}{\partial t}\frac{\partial g_2(0,\tilde t)}{\partial t}\right]. \quad (43)$$

Первая производная по t от левой и правой частей тождества (31) равна

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial t^2}=(-1)^{i+1}\left[a_t(x,t)\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial x}+a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial t}\right)\right],\ x,t\ge 0,\ i=1,2,$$

где мы поменяли порядок следования частных производных по x и t. Здесь первые производные от h_i по t заменяем правыми частями тождеств (31) и для $x, t \ge 0$ имеем тождества

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial t^2}=(-1)^{i+1}\left[a_t(x,t)\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial x}+(-1)^{i+1}a(x,t)\left(a_x(x,t)\frac{\partial h_i\{\bullet\}}{\partial x}+a(x,t)\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\}}{\partial x^2}\right)\right],\ i=1,2,$$

в которых используем равенства (32) с $t = 0$ и приходим к равенствам

$$\left.\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),0\}}{\partial t^2}\right|_{t=0}=(-1)^{i+1}\Big[a_t(x,0)+(-1)^{i+1}a(x,0)a_x(x,0)\Big],\ x\ge 0,\ i=1,2. \quad (44)$$

Поскольку в левой части этих равенств след при $x = 0$ и вторая производная по t перестановочны, то так же, как при выводе (35), из (44) при $i = 1$, $x = 0$, $t=h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]$ получаем

$$\left.\frac{\partial^2 h_1\Big\{g_1\Big(0,h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]\Big),0\Big\}}{\partial t^2}\right|_{x=t=0}=a_t(0,0)+a(0,0)a_x(0,0). \quad (45)$$

Ниже нам понадобятся выражения следующих производных из (43):

$$\left(\frac{\psi\big(h_i\{g_i(x,t),0\}\big)}{a\big(h_i\{g_i(x,t),0\},0\big)}\right)_t=\frac{\left[\frac{d\psi(\bullet)}{dh_i}a(\bullet)-\psi(\bullet)\frac{da(\bullet)}{dh_i}\right]\frac{dh_i\{\bullet\}}{dt}}{a^2(\bullet)},\ x,t\ge 0,\ i=1,2, \quad (46)$$

где символ $(\bullet)$ у ψ и a означает переменные $h_i\{g_i(x,t),0\}$ и $h_i\{g_i(x,t),0\}$, 0 соответственно,

$$\frac{\partial H_i(0,\tilde t)}{\partial t}=\frac{\hat f(0,\tilde t)}{a(0,\tilde t)}\frac{\partial h_i\{g_i(0,\tilde t),\tilde t\}}{\partial g_i}\frac{\partial \tilde t}{\partial t},\ \tilde t=h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big],\ x,t\ge 0,\ i=1,2,$$

$$\left.\frac{\partial H_i(0,\tilde t)}{\partial t}\frac{\partial g_i(0,\tilde t)}{\partial t}\right|_{x=t=0}= \quad (47)$$

$$=\left.\frac{\hat f(0,\tilde t)}{a(0,\tilde t)}\frac{\partial h_i\{g_i(0,\tilde t),\tilde t\}}{\partial t}\frac{\partial h^{(2)}\big[0,g_2(x,t)\big]}{\partial t}\right|_{x=t=0}=(-1)^{i+1}\hat f(0,0),\ i=1,2,$$

благодаря значениям (33) для $i = 2$, (34) и (35) для $i = 1$.

Итак, в тождестве (43) полагаем $x = t = 0$ и в силу значений (34), (35), (44), (46), (47), а также третьего условия согласования из (9) по аналогии с (36) имеем

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial t^2}\right]\Bigg|_{g_2(x,\,t)=g_2(0,\,0)} = \hat{S} - \mu''(0) = 0. \tag{48}$$

Дифференцируем второй раз по x выражение (37) и для всех $x,\ t \geq 0$ находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\varphi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{dh_2^2}\left(\frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x}\right)^2 + \frac{d^2\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{dh_1^2}\left(\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x}\right)^2\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{d\varphi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{dh_2}\frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial x^2} + \frac{d\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{dh_1}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial x^2}\right] - \\
&- \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\psi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{a\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\},\,0\right)}\right)_x\frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x} - \left(\frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\},0\right)}\right)_x\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x}\right] - \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\}\right)}{a\left(h_2\{g_2(x,\,t),\,0\},\,0\right)}\frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial x^2} - \frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\},\,0\right)}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial x^2}\right] - \\
&- \frac{d^2\mu\left(h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right)}{dh^{(2)2}}\left(\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial x}\right)^2 - \frac{d\mu\left(h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right)}{dh^{(2)}}\frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{1}{2}\left[H_1(0,\,\tilde{t})\frac{\partial^2 g_1(0,\,\tilde{t})}{\partial x^2} - H_2(0,\,\tilde{t})\frac{\partial^2 g_2(0,\,\tilde{t})}{\partial x^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_1(0,\,\tilde{t})}{\partial x}\frac{\partial g_1(0,\,\tilde{t})}{\partial x} - \frac{\partial H_2(0,\,\tilde{t})}{\partial x}\frac{\partial g_2(0,\,\tilde{t})}{\partial x}\right].
\end{aligned} \tag{49}$$

Дифференцирование еще раз по x в левой части тождества (39) под знаком следа при $x = 0$ неверно, так как эти операции не коммутируют. Первые производные по t и x от тождества (38) равны

$$\frac{\partial^2 h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}}{\partial t\partial x} = \frac{a_t(x,\,t)}{a^2(x,\,t)}\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} - \frac{1}{a(x,\,t)}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial t^2},\ x,\ t \geq 0, \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2 h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}}{\partial x^2} = \frac{a_x(x,\,t)}{a^2(x,\,t)}\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} - \frac{1}{a(x,\,t)}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial t\partial x},\ x,\ t \geq 0,$$

соответственно. В последнем выражении применяем предыдущее тождество (50) и приходим к тождеству

$$\frac{\partial^2 h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}}{\partial x^2} = \left(\frac{a_x(x,\,t)}{a^2(x,\,t)} - \frac{a_t(x,\,t)}{a^3(x,\,t)}\right)\frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} + \frac{1}{a^2(x,\,t)}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial t^2},\ x,\ t \geq 0,$$

из которого при $x = t = 0$ ввиду равенств (35) и (45) находим

$$\frac{\partial^2 h_1\left\{g_1\left(0,\,h^{(2)}\left[0,\,g_2(x,\,t)\right]\right),\,0\right\}}{\partial x^2}\Bigg|_{x=t=0} = \frac{2a_x(0,\,0)}{a(0,\,0)}. \tag{51}$$

Продифференцировав по t и x обе части тождества (41), аналогично предыдущему имеем

$$\frac{\partial^2 h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]}{\partial t \partial x} = \frac{a_t(x,\, t)}{a^2(x,\, t)} \frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t} - \frac{1}{a(x,\, t)} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t^2},\ x,\, t \geq 0, \tag{52}$$

$$\frac{\partial^2 h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]}{\partial x^2} = \frac{a_x(x,\, t)}{a^2(x,\, t)} \frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t} - \frac{1}{a(x,\, t)} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t \partial x} =$$

$$= \left(\frac{a_x(x,\, t)}{a^2(x,\, t)} - \frac{a_t(x,\, t)}{a^3(x,\, t)} \right) \frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t} + \frac{1}{a^2(x,\, t)} \frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial t^2}.$$

Согласно равенству (34) с $x = 0$ отсюда при $x = 0$ получаем

$$\left.\frac{\partial^2 h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]}{\partial x^2}\right|_{x = 0} = \frac{a(0,\, t) a_x(0,\, t) - a_t(0,\, t)}{a^3(0,\, t)},\ t \geq 0. \tag{53}$$

Справедливы следующие тождества, аналогичные тождествам (46) и (47):

$$\left(\frac{\psi\left(h_i\left\{g_i(x,\, t),\, 0\right\}\right)}{a\left(h_i\left\{g_i(x,\, t),\, 0\right\},\, 0\right)} \right)_x = \frac{\left[\frac{d\psi(\bullet)}{dh_i} a(\bullet) - \psi(\bullet) \frac{da(\bullet)}{dh_i} \right] \frac{dh_i\{\bullet\}}{dx}}{a^2(\bullet)},\ x,\, t \geq 0,\ i = 1,\, 2, \tag{54}$$

$$\frac{\partial H_i(0,\, \tilde{t})}{\partial x} = \frac{\hat{f}(0,\, \tilde{t})}{a(0,\, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\left\{g_i(0,\, \tilde{t}),\, \tilde{t}\right\}}{\partial g_i} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x},\ \tilde{t} = h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right],\ x,\, t \geq 0,\ i = 1,\, 2,$$

$$\left.\frac{\partial H_i(0,\, \tilde{t})}{\partial x} \frac{\partial g_i(0,\, \tilde{t})}{\partial x}\right|_{x = t = 0} = \left.\frac{\hat{f}(0,\, \tilde{t})}{a(0,\, \tilde{t})} \frac{\partial h_i\left\{g_i(0,\, \tilde{t}),\, \tilde{t}\right\}}{\partial x} \frac{\partial h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]}{\partial x}\right|_{x = t = 0} = \tag{55}$$

$$= (-1)^{i+1} \frac{\hat{f}(0,\, 0)}{a^2(0,\, 0)},\ i = 1,\, 2,$$

согласно значениям (32) для $i = 2$, (39) для $i = 1$ и (41).

На основании равенств (32) для $i = 2$, $x = 0$, (39) для $i = 1$, (41), (51), (53)–(55) из тождества (49) при $x = t = 0$ благодаря второму и третьему условиям согласования из (9) получаем

$$\left.\left[\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x^2} \right]\right|_{g_2(x,\, t) = g_2(0,\, 0)} = \frac{\hat{S} - \mu''(0)}{a^2(0,\, 0)} + \frac{a(0,\, 0) a_x(0,\, 0) - a_t(0,\, 0)}{a^3(0,\, 0)} \left[\psi(0) - \mu'(0)\right] = 0. \tag{56}$$

Продифференцировав (30) один раз по x, видим, что разность $\frac{\partial^2 \hat{u}_-}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \hat{u}_+}{\partial x \partial t}$ равна

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\varphi\left(h_2\left\{g_2(x,\, t),\, 0\right\}\right)}{dh_2^2} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t} \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial x} + \frac{d^2\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}\right)}{dh_1^2} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial x} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{d\varphi\left(h_2\left\{g_2(x,\, t),\, 0\right\}\right)}{dh_2} \frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial x \partial t} + \frac{d\varphi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}\right)}{dh_1} \frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial x \partial t} \right] -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\psi\left(h_2\left\{g_2(x,\, t),\, 0\right\}\right)}{a\left(h_2\left\{g_2(x,\, t),\, 0\right\},\, 0\right)} \right)_x \frac{\partial h_2\{\bullet\}}{\partial t} - \left(\frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,\, h^{(2)}\left[0,\, g_2(x,\, t)\right]\right),\, 0\right\},\, 0\right)} \right)_x \frac{\partial h_1\{\bullet\}}{\partial t} \right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(h_2\left\{g_2(x,t),0\right\}\right)}{a\left(h_2\left\{g_2(x,t),0\right\},0\right)}\frac{\partial^2 h_2\{\bullet\}}{\partial x\partial t}-\frac{\psi\left(h_1\left\{g_1\left(0,h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]\right),0\right\}\right)}{a\left(h_1\left\{g_1\left(0,h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]\right),0\right\},0\right)}\frac{\partial^2 h_1\{\bullet\}}{\partial x\partial t}\right]-$$

$$-\frac{d^2\mu\left(h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]\right)}{dh^{(2)2}}\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial t}\frac{\partial h^{(2)}[\bullet]}{\partial x}-\frac{d\mu\left(h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]\right)}{dh^{(2)}}\frac{\partial^2 h^{(2)}[\bullet]}{\partial x\partial t}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[H_1(0,\tilde t)\frac{\partial^2 g_1(0,\tilde t)}{\partial x\partial t}-H_2(0,\tilde t)\frac{\partial^2 g_2(0,\tilde t)}{\partial x\partial t}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_1(0,\tilde t)}{\partial x}\frac{\partial g_1(0,\tilde t)}{\partial t}-\frac{\partial H_2(0,\tilde t)}{\partial x}\frac{\partial g_2(0,\tilde t)}{\partial t}\right]. \quad (57)$$

Продифференцировав один раз по x равенство (33) для $i=2$, находим

$$\left.\frac{\partial^2 h_2\left\{g_2(x,t),0\right\}}{\partial x\partial t}\right|_{t=0}=-a_x(x,0),\ x\ge 0, \quad (58)$$

так как операции следа при $t=0$ и дифференцирования по x перестановочны. В силу равенств (35) и (45) из тождества (50) при $x=t=0$ выводим

$$\left.\frac{\partial^2 h_1\left\{g_1\left(0,h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]\right),0\right\}}{\partial x\partial t}\right|_{x=t=0}=-a_x(0,0). \quad (59)$$

Из тождества (52) при $x=t=0$ ввиду равенства (34) и производной от (34) еще раз по t имеем

$$\left.\frac{\partial^2 h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]}{\partial t\partial x}\right|_{x=t=0}=\frac{a_t(0,0)}{a^2(0,0)}, \quad (60)$$

поскольку в (34) взятие следа при $x=0$ коммутирует с дифференцированием по t.

В тождестве (57) при $x=t=0$ применяем равенства (32) и (33) для $i=2$, (35) и (39) для $i=1$, (34), (41), (54), (58) – (60) и значения

$$\left.\frac{\partial H_i(0,\tilde t)}{\partial x}\frac{\partial g_i(0,\tilde t)}{\partial t}\right|_{x=t=0}=\left.\frac{\hat f(0,\tilde t)}{a(0,\tilde t)}\frac{\partial h_i\left\{g_i(0,\tilde t),\tilde t\right\}}{\partial t}\frac{\partial h^{(2)}\left[0,g_2(x,t)\right]}{\partial x}\right|_{x=t=0}=(-1)^i\frac{\hat f(0,0)}{a(0,0)},\ i=1,2,$$

согласно равенствам (33) для $i=2$, (35) для $i=1$ и (41). В результате применения этих равенств, значений и двух последних условий согласования из (9) убеждаемся в том, что

$$\left[\frac{\partial^2\hat u_-}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\hat u_+}{\partial x\partial t}\right]\Bigg|_{g_2(x,t)=g_2(0,0)}=\frac{\mu''(0)-\hat S}{a(0,0)}+\frac{a_t(0,0)}{a^2(0,0)}\left[\psi(0)-\mu'(0)\right]=0. \quad (61)$$

Установленные выше значения (29), (36), (42), (48), (56) и (61) указывают на дважды непрерывную дифференцируемость единственного решения задачи (1)–(3) и на характеристике $g_2(x,t)=g_2(0,0)$. Единственность решения обеспечивается алгоритмом его поиска.

Из формулы (11) при любом $T>0$ легко выводится непрерывная зависимость решения $\hat u_-$ в банаховом пространстве $X^{(1)}=C^2\left(G_T^-\right)$ от исходных данных φ, ψ, $\hat f$ в произведении $Y^{(1)}$ банаховых пространств $C^2[0,+\infty[$, $C^1[0,+\infty[$, $\hat C\left(G_T^-\right)$ этих исходных данных, где множества $G_T^-=G_T\cap G_-$, $G_T=$ $=\left\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x<+\infty,\ 0\le t\le T\right\}$, с нормами

$$\left\|\hat u_-\right\|_{C^2\left(G_T^-\right)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\sum_{0\le k+l\le 2}\left|\partial_x^k\partial_t^l u(x,t)\right|,\ \partial_x^k\partial_t^l=\frac{\partial^{k+l}}{\partial_x^k\partial_t^l},\ \|\varphi\|_{C^2[0,+\infty[}=\sup_{0\le x<+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|\right),$$

$$\|\psi\|_{C^1[0,+\infty[}=\sup_{0\le x<+\infty}\left(\sum_{k=0}^{1}\left|\psi^{(k)}(x)\right|\right),\ \left\|\hat f\right\|_{\hat C\left(G_T^-\right)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\left(\left|\hat f(x,t)\right|+\sum_{i=1}^{2}\sum_{0\le k+l\le 1}\left|\partial_x^k\partial_t^l H_i(x,t)\right|\right). \quad (62)$$

При любом $T > 0$ из (12) следует непрерывная зависимость решения $\hat{u}_+$ в банаховом пространстве $X^{(2)} = C^2\left(G_T^+\right)$ от данных φ, ψ, μ, $\hat{f}$ в произведении $Y^{(2)}$ банаховых пространств $C^2\left[0, X_a\right]$, $C^1\left[0, X_a\right]$, $C^2\left[0, T\right]$, $\hat{C}\left(G^T\right)$ этих данных, где $G_T^+ = G^T \cap G_+$, $G^T = \left\{(x, t) \in G_\infty : g_1(x, t) \le g_1\left(h_2\left\{g_2(0, 0), T\right\}, T\right), 0 \le t \le T\right\}$ и $X_a = h_1\left\{g_1\left(h_2\left\{g_2(0, 0), T\right\}, T\right), 0\right\}$, с нормами

$$\left\|\hat{u}_+\right\|_{C^2\left(G_T^+\right)} = \max_{(x, t) \in G_T^+} \sum_{0 \le k + l \le 2} \left|\partial_x^k \partial_t^l u(x, t)\right|,$$

$$\|\varphi\|_{C^2[0, X_a]} = \max_{0 \le x \le X_a} \sum_{k=0}^{2} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|, \ \|\psi\|_{C^1[0, X_a]} = \max_{0 \le x \le X_a} \sum_{k=0}^{1} \left|\psi^{(k)}(x)\right|, \tag{63}$$

$$\|\mu\|_{C^2[0, T]} = \max_{0 \le t \le T} \left(\sum_{k=0}^{2} \left|\mu^{(k)}(t)\right|\right), \ \left\|\hat{f}\right\|_{\hat{C}\left(G^T\right)} = \max_{(x, t) \in G^T} \left(\left|\hat{f}(x, t)\right| + \sum_{i=1}^{2} \sum_{0 \le k + l \le 1} \left|\partial_x^k \partial_t^l H_i(x, t)\right|\right).$$

Необходимость требований гладкости (8) и условий согласования (9) доказана нами уже перед формулировкой теоремы 1. Для непрерывных правых частей $\hat{f} \in C(G_\infty)$ мы показали лишь достаточность требований гладкости интегралов H_1, H_2 в (10). Поскольку согласно формулам (26) и (27) произведения интегралов H_1, H_2 на минус половину якобиана $J(x, t) \ne 0$ служат производными вдоль двух семейств характеристик $g_i(x, t) = C_i$, $i = 1, 2$, то для доказательства необходимости требований гладкости (10) на $\hat{f} \in C(G_\infty)$ не хватает обоснования того, что в (21) функция $F \in C^2(G_\infty)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Для коэффициента $a(x, t) \ge a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$ интегральные требования гладкости (10) на непрерывную часть $\hat{f} \in C(G_\infty)$ равносильны интегральным требованиям

$$\int_0^t \hat{f}\left(\left|h_i\left\{g_i(x, t), \tau\right\}\right|, \tau\right) \frac{\partial h_i\left\{g_i(x, t), \tau\right\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \ i = 1, 2.$$

Чтобы подтвердить необходимость этих интегральных требований гладкости для правой части $\hat{f} \in C(G_\infty)$ уравнения (1), надо обобщить метод корректировки пробных решений из [17] для постоянной скорости $a_1 = a_2 = a > 0$ на переменные скорости $a(x, t) \ge a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty$.

Общее телеграфное уравнение с переменными коэффициентами

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty$ рассматривается общее телеграфное уравнение

$$\begin{gathered} \mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + \\ + c(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t) = f(x, t), \ (x, t) \in \dot{G}_\infty, \end{gathered} \tag{64}$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами при первых производных и потенциалом $b, c, q \in C^1(G_\infty)$, которые для упрощения доказательств продолжаем четно по x на $x < 0$.

Исследуем корректность по Адамару первой смешанной задачи в $\dot{G}_\infty$ для этого телеграфного уравнения при начальных условиях (2) и граничном режиме (3).

Полагая $t = 0$ во второй производной по t от граничного режима (3), из начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (64) при $x = t = 0$ имеем необходимое условие согласования:

$$S \equiv f(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) - b(0, 0)\psi(0) - c(0, 0)\varphi'(0) - q(0, 0)\varphi(0) = \mu''(0). \tag{65}$$

Верна следующая теорема существования классических решений задачи (64), (2), (3).

Теорема 2. *Пусть в уравнении (64) коэффициенты* $a(x, t) \ge a_0 > 0$, $(x, t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$. *Тогда при достаточных предположениях (8)–(10) теоремы 1, но при условии согласования (65) вместо третьего условия согласования в (9) классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *первой смешанной задачи (64), (2), (3) в* $\dot{G}_\infty$ *существует, единственно и устойчиво. При этом условия (8) при* $\hat{f} = f$ *и* $\varphi(0) = \mu(0)$, $\psi(0) = \mu'(0)$, $S = \mu''(0)$ *необходимы.*

Доказательство. Существование классического решения смешанной задачи (64), (2), (3) в $\dot{G}_\infty$ доказывается с помощью известного метода продолжения по параметру Шаудера [18–21] и теорем повышения гладкости сильного обобщенного решения [21; 22]. Для любого времени $T > 0$ этой смешанной задаче соответствует операторное уравнение $Lu(x, t) = \Im(x, t)$, где $L = \{\mathcal{L}, l_0, l_1, \mathcal{G}\} : E \supset D(L) \to F$ – линейный оператор, действующий из области определения $D(L) = W_2^2(G_T)$ банахова пространства E в банахово пространство F. Банахово пространство E – пополнение функций пространства Соболева $D(L) = W_2^2(G_T)$ по норме

$$\|u\|_E = \left\{ \sup_{0<t<T} \int_0^{+\infty} \left[|u_t(s, t)|^2 + |u_s(s, t)|^2 + |u(s, t)|^2 \right] ds \right\}^{1/2}.$$

Пространство $F = L_2(]0, T[\times]0, +\infty[) \times W_2^1(0, +\infty) \times L_2(0, +\infty) \times W_2^1(0, T)$ – декартово произведение пространств Лебега и Соболева – представляет собой множество функций $\Im = \{f, \varphi, \psi, \mu\}$ с конечной нормой

$$\|\Im\|_F = \left\{ \int_0^T \int_0^{+\infty} |f(s, \tau)|^2 \, ds d\tau + \int_0^{+\infty} \left(|\varphi'(s)|^2 + |\varphi(s)|^2 \right) ds + \int_0^{+\infty} |\psi(s)|^2 \, ds + \int_0^T \left(|\mu'(\tau)|^2 + |\mu(\tau)|^2 \right) d\tau \right\}^{1/2}.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1, здесь мы заменяем дифференциальное выражение $\mathcal{L}u$ уравнения (64) на равное выражение

$$\mathcal{L}u(x, t) = \hat{\mathcal{L}}u(x, t) + \hat{b}(x, t)u_t(x, t) + \hat{c}(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t), \ (x, t) \in G_\infty,$$

где дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{L}}$ взят из (1) и коэффициенты $\hat{b} = a^{-1}a_t + b$, $\hat{c} = aa_x + c$.

Смешанной задаче (1)–(3) в G_T соответствует аналогичное операторное уравнение $\hat{L}u(x, t) = \hat{\Im}(x, t)$, где линейный оператор $\hat{L} = \{\hat{\mathcal{L}}, l_0, l_1, \mathcal{G}\} : E \supset D(\hat{L}) \to F$ действует из той же области определения $D(\hat{L}) = W_2^2(G_T)$ банахова пространства E в банахово пространство F функций $\hat{\Im} = \{\hat{f}, \varphi, \psi, \mu\}$.

Воспользуемся сильными замыканиями этих операторов $L, \hat{L} : E \supset W_2^2(G_T) \to F$ из банахова пространства E с плотной в нем областью определения $D(L) = D(\hat{L}) = W_2^2(G_T)$ в банахово пространство F. Стандартным образом доказывается, что линейные операторы L и $\hat{L}$ допускают сильные замыкания $\overline{L}$ и $\overline{\hat{L}}$ соответственно, т. е. замыкания их графиков не содержат пар функций вида $\{0, \Im\}$, $\Im \neq 0$, и $\{0, \hat{\Im}\}$, $\hat{\Im} \neq 0$, соответственно. Согласно критерию замыкаемости линейных операторов для этого надо убедиться в том, что если последовательность $u_n(x, t) \in W_2^2(G_T)$ сходится ($u_n(x, t) \to 0$) в E и сходятся последовательности $Lu_n(x, t) \to \Im(x, t)$, $\hat{L}u_n(x, t) \to \hat{\Im}(x, t)$ в F при $n \to +\infty$, то функции $\Im(x, t) = \hat{\Im}(x, t) = 0$. Действительно, в вектор-функциях $\Im(x, t)$, $\hat{\Im}(x, t)$ предельные начальные данные $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ и предельное граничное данное $\mu = 0$ обращаются в нуль, потому что операторы l_0, l_1 и $\mathcal{G}$ непрерывны из E в F на области определения $W_2^2(G_T)$. Чтобы показать, что в вектор-функциях $\Im(x, t)$, $\hat{\Im}(x, t)$ предельные правые части $f(x, t)$ и $\hat{f}(x, t)$ уравнений (64) и (1) равны нулю, достаточно сначала проинтегрировать один раз по частям под двойными интегралами произведения $\mathcal{L}u(x, t)$ и $\hat{\mathcal{L}}u(x, t)$ соответственно на любые функции $\nu(x, t)$ вида произведений функций с компактным носителем из $C_0^\infty(G_T)$ и срезок (функций из $C^\infty[0, +\infty[$, равных нулю при всех больших x). Потом в полученном результате перейти к пределу при $n \to +\infty$ и в пределе получить нули. Отсюда вытекают равенства $f = 0$ и $\hat{f} = 0$, так как множество всех таких функций ν плотно в пространстве Лебега $L_2(]0, +\infty[\times]0, T[)$ [19; 23, с. 24–27]. Поскольку линейные операторы L и $\hat{L}$ отличаются лишь младшими слагаемыми, то равны области определения их сильных замыканий $\overline{L}$ и $\overline{\hat{L}}$ соответственно, т. е. $D(\overline{L}) = D(\overline{\hat{L}})$.

Определение 2. Сильными обобщенными решениями смешанных задач (1)–(3) и (64), (2), (3) в $\dot{G}_\infty$ называют решения $u \in E$ операторных уравнений

$$\overline{\hat{L}}u = \hat{\Im}, \ \overline{L}u = \Im, \ \hat{\Im}, \Im \in F, \ u(x, t) \in D(\overline{\hat{L}}),$$

соответственно.

Известным способом выводится априорная оценка (энергетическое неравенство):

$$\|u(x, t)\|_E \le \hat{C} \left\| \overline{\hat{L}} u(x, t) \right\|_F, \; u(x, t) \in D\left(\overline{\hat{L}}\right), \; i = 1, 2, \tag{66}$$

где постоянная $\hat{C} > 0$ не зависит от x, t, u. С этой целью для любых $0 < \tau \le T$ и $u(x, t) \in W_2^2(G_T)$ умножаем уравнение (1) на $e^{c(\tau - t)} u_t$, $c \ge 0$, интегрируем результат умножения по t от 0 до τ и по x, вычисляем удвоенную вещественную часть интегрированием по частям один раз по t и два раза по x, делаем соответствующие оценки, приводим подобные слагаемые за счет больших $c > 0$ и так же, как, например, в [19–21], сначала получаем неравенства (66) для гладких функций $u \in W_2^2(G_T)$. Причем здесь можно не использовать сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)$ из [21], так как в смешанной задаче (1)–(3) неограниченный операторный коэффициент $A(t)$ уравнения (1) с граничным режимом (3) зависит от t, но имеет не зависящую от t соответствующую область определения $D(A)$. Затем это неравенство (66) распространяется предельным переходом с более гладких функций $u \in W_2^2(G_T)$ на функции $u \in D\left(\overline{\hat{L}}\right)$. Из априорной оценки (66) всегда следуют равенства $R\left(\overline{\hat{L}}\right) = \overline{R\left(\hat{L}\right)}$, т. е. множество значений $R\left(\overline{\hat{L}}\right)$ сильного замыкания $\overline{\hat{L}}$ равно сильному замыканию в F множества значений $R\left(\hat{L}\right)$ оператора $\hat{L}$ [21]. Поскольку в силу теоремы 1 функции из F аппроксимируются значениями $\hat{L}u$ на решениях $u \in C^2(G_\infty)$ в [19; 23], то оценка (66) дает существование обратного оператора $\left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$. Символ $\mathbb{L}(Y, X)$ обозначает множество линейных ограниченных операторов из банахова пространства Y в банахово пространство X.

Введем семейство линейных операторов с параметром ρ:

$$\overline{L_\rho} = \overline{\hat{L}} + \rho\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right), \; 0 \le \rho \le 1, \tag{67}$$

из которого видим, что при $\rho = 0$ отображение $\overline{L_0} = \overline{\hat{L}}$ – сильное замыкание линейного оператора смешанной задачи (1)–(3), а при $\rho = 1$ отображение $\overline{L_1} = \overline{L}$ – сильное замыкание линейного оператора смешанной задачи (64), (2), (3). Умножаем уравнение

$$\overline{L_\rho}\, u(x, t) = \Im(x, t), \; 0 \le \rho \le 1, \tag{68}$$

на линейный ограниченный оператор $\left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$ и приходим к уравнению

$$u(x, t) + \rho\left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1}\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right) u(x, t) = \left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1} \Im(x, t).$$

Для параметра $\dfrac{0 < \rho_0 < 1}{\|P_0\|_{\mathbb{L}(E, E)}}$, где оператор $P_0 = \left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1}\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right) \in \mathbb{L}(E, E)$ ограничен как произведение ограниченных операторов $\overline{L} - \overline{\hat{L}} \in \mathbb{L}(E, F)$ и $\left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$, это уравнение при $\rho = \rho_0$ имеет решение в виде ряда Неймана [21; 24, с. 105]

$$u(x, t) = (I + \rho_0 P_0)^{-1}\left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1} \Im(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\rho_0 P_0)^k \left(\overline{\hat{L}}\right)^{-1} \Im(x, t) \in E.$$

Если $\rho_0 \ge 1$, то сильная разрешимость уравнения (68) при $\rho = 1$ на F установлена.

В противном случае берем другое семейство линейных операторов с параметром ρ:

$$\overline{L_\rho} \equiv \overline{L_{\rho_0}} + (\rho - \rho_0)\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right), \; \rho_0 \le \rho \le 1, \tag{69}$$

которое является разностью семейства (67) при ρ и $\rho = \rho_0$. Умножив уравнение (69) на линейный ограниченный обратный оператор $\left(\overline{L_{\rho_0}}\right)^{-1} \in \mathbb{L}(F, E)$, приходим к уравнению

$$u(x, t) + (\rho - \rho_0)\left(\overline{L_{\rho_0}}\right)^{-1}\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right) u(x, t) = \left(\overline{L_{\rho_0}}\right)^{-1} \Im(x, t),$$

которое для значения ρ_1 параметра $\dfrac{\rho_0 < \rho_1 < 1}{\|P_1\|_{\mathbb{L}(E,\, E)}} + \rho_0$, где $P_1 = \left(\overline{L_{\rho_0}}\right)^{-1}\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right) \in \mathbb{L}(E,\, E)$, тоже имеет решение в виде ряда Неймана

$$u(x,\, t) = \left(I + (\rho_1 - \rho_0)P_1\right)^{-1}\left(\hat{L}_{\rho_0}\right)^{-1}\mathfrak{I}(x,\, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left((\rho_0 - \rho_1)P_1\right)^k\left(\overline{L_{\rho_0}}\right)^{-1}\mathfrak{I}(x,\, t) \in E$$

и т. д. Уравнения (1) и (64) отличаются лишь младшими членами, т. е. функцией u и ее первыми производными u_t, u_x. Поэтому так же, как и выше, выводится аналог неравенства (66):

$$\|u(x,\, t)\|_E \le C\left\|\overline{L_\rho}u(x,\, t)\right\|_F,\ u(x,\, t) \in D\left(\overline{L_\rho}\right) = D\left(\overline{L}\right),\ 0 \le \rho \le 1, \tag{70}$$

где постоянная $C \ge \hat{C} > 0$ не зависит от x, t, u, ρ, из которого имеем равномерную ограниченность операторов $\left\|\left(\overline{L_\rho}\right)^{-1}\right\|_{\mathbb{L}(F,\, E)} \le C$ по $0 \le \rho \le 1$ и норм $\|P_n\|_{\mathbb{L}(E,\, E)}$ по n. Поэтому на конечном шаге n находим $\rho_n = 1$, при котором уравнение (68) на F имеет решение

$$u(x,\, t) = \left(I + (\rho_n - \rho_{n-1})P_n\right)^{-1}\left(\overline{L_{\rho_{n-1}}}\right)^{-1}\mathfrak{I}(x,\, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left((\rho_{n-1} - \rho_n)P_n\right)^k\left(\overline{L_{\rho_{n-1}}}\right)^{-1}\mathfrak{I}(x,\, t) \in E,$$

где равномерно по n ограничены операторы $P_n = \left(\overline{L_{\rho_{n-1}}}\right)^{-1}\left(\overline{L} - \overline{\hat{L}}\right) \in \mathbb{L}(E,\, E)$.

Смешанной задаче (64), (2), (3) соответствуют два операторных уравнения $L^{(i)}u^{(i)}(x,\, t) = \mathfrak{I}^{(i)}(x,\, t)$, где $L^{(i)}$ – линейные операторы, действующие из банаховых пространств $X^{(i)}$ в банаховы пространства $Y^{(i)}$, $i = 1, 2$. Эти банаховы пространства указаны выше в (62) и (63). Здесь берутся операторы $L^{(1)} = \{\mathcal{L},\, l_0,\, l_1\}$, $L^{(2)} = \{\mathcal{L},\, l_0,\, l_1,\, \mathcal{G}\}$ и правые части $\mathfrak{I}^{(1)} = \{f,\, \varphi,\, \psi\} \in Y^{(1)}$, $\mathfrak{I}^{(2)} = \{f,\, \varphi,\, \psi,\, \mu\} \in Y^{(2)}$ в задаче Коши на G_- и задаче Пикара на G_+ соответственно для телеграфного уравнения (64). Из теоремы 1 и теоремы Банаха о замкнутом графике (или об открытом отображении) следует существование ограниченных линейных обратных операторов $\left(\hat{L}^{(i)}\right)^{-1} \in \mathbb{L}\left(Y^{(i)},\, X^{(i)}\right)$ к линейным операторам $\hat{L}^{(i)}: X^{(i)} \to Y^{(i)}$, $i = 1, 2$ [24, с. 112, 116]. Далее с помощью теорем повышения гладкости сильных решений $u \in D\left(\overline{L}\right)$ смешанной задачи (64), (2), (3) на $\dot{G}_\infty$ из [21; 22] показывается, что сужения этого сильного решения $u \in D\left(\overline{L_{\rho_n}}\right) = D\left(\overline{L}\right)$ на G_- и G_+ имеют гладкость $u \in X^{(i)}$, $i = 1, 2$. Чем больше гладкость исходных данных $\mathfrak{I}^{(i)}$, тем больше гладкость сильных решений $u^{(i)}$, $i = 1, 2$. Кроме того, выше для $\rho = 0$ обосновано, что $\left(\overline{L_0^{(i)}}\right)^{-1} \in \mathbb{L}\left(Y^{(i)},\, X^{(i)}\right)$, т. е. $u^{(i)} \in X^{(i)}$, а для $\rho < 1$ это можно доказать аналогично предыдущему методом продолжения по параметру ρ непосредственно в шкалах пространств $\mathbb{L}\left(Y^{(i)},\, X^{(i)}\right)$, $i = 1, 2$.

По построению решения u_- и u_+ дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{G_-}$ и G_+ соответственно и, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы на характеристике $g_2(x,\, t) = g_2(0,\, 0)$, потому что необходимые и достаточные первое и второе условия согласования из (9), которые дают непрерывность первых частных производных от $\hat{u}_-$ и $\hat{u}_+$ на $g_2(x,\, t) = g_2(0,\, 0)$ в доказательстве теоремы 1, не зависят от уравнения (1). Более того, необходимое третье условие согласования (65) вместо третьего условия согласования из (9) обеспечивает непрерывность вторых частных производных от u_- и u_+ на $g_2(x,\, t) = g_2(0,\, 0)$, так как в семействе (67) при $\rho = 1$ операторы $\overline{L_1^{(i)}} = \overline{L^{(i)}}$, $i = 1, 2$, соответствуют задаче (64), (2), (3).

Единственность классического решения смешанной задачи (64), (2), (3) вытекает из неравенства (70). Пусть она имеет два различных классических решения $u_1 \ne u_2$, $u_1, u_2 \in C^2(G_\infty)$. Тогда их разность $\widehat{u} = u_1 - u_2 \in C^2(G_\infty)$ является классическим решением однородной смешанной задачи (64), (2), (3), т. е. при $f = \varphi = \psi = \mu = 0$. Из неравенства (70) при $\rho = 1$ имеем, что $\widehat{u} = 0$ в пространстве левой части этого неравенства и тем самым $u_1 \equiv u_2$ в $C^2(G_\infty)$.

Наконец, устойчивость классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ смешанной задачи (64), (2), (3) в $\dot{G}_\infty$ по исходным данным f, φ, ψ, μ вытекает из его существования и единственности в силу, например, теоремы Банаха о замкнутом графике [24, с. 116]. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Теорема 2 обобщает те результаты работ [6–14], где обобщенные (непрерывно дифференцируемые) решения имеют необходимые и достаточные условия на начальные данные. Поскольку в них обобщенные решения удовлетворяют простейшим телеграфным уравнениям почти всюду на G_∞, то в теореме 2 для непрерывно дифференцируемых решений задачи (64), (2), (3) гладкость коэффициентов уравнения (64) и данных f, φ, ψ, μ, а также число условий согласования в (9) можно ослабить (например, до $b, c, q \in L_\infty(G_\infty)$ и первых двух условий из (9)).

Библиографические ссылки

1. Барановская СН. *О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения* [диссертация]. Минск: БГУ; 1991. 59 с.

2. Ломовцев ФЕ. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. В: Красовский СГ, редактор. *Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Материалы Международной математической конференции; 7–10 декабря 2015 г.; Минск, Беларусь. Часть 2. Теория устойчивости и управления движением. Стохастические дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения в частных производных. Методика преподавания математики.* Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2015. с. 74–75.

3. Моисеев ЕИ, Юрчук НИ. Классические и обобщенные решения задач для телеграфных уравнений с потенциалом Дирака. *Дифференциальные уравнения*. 2015;51(10):1338–1344. DOI: 10.1134/S0374064115100088.

4. Барановская СН, Новиков ЕН, Юрчук НИ. Задача с косой производной в граничном условии для телеграфного уравнения с потенциалом Дирака. *Дифференциальные уравнения*. 2018;54(9):1176–1183. DOI: 10.1134/S0374064118090030.

5. Аниконов ДС, Коновалова ДС. Обобщенная формула Даламбера для волнового уравнения с разрывными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2019;55(2):265–268. DOI: 10.1134/S0374064119020134.

6. Хромов АП. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2016;56(10):1795–1809. DOI: 10.7868/S0044466916100112.

7. Корнев ВВ, Хромов АП. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2016;16(4): 403–413. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.

8. Хромов АП. Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом и ненулевой начальной скоростью. *Доклады Академии наук*. 2017;474(6):668–670.

9. Хромов АП. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2019;19(3):280–288. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288.

10. Хромов АП, Корнев ВВ. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2019;59(2):286–300. DOI: 10.1134/S0044466919020091.

11. Хромов АП. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала. *Дифференциальные уравнения*. 2019;55(5):717–731. DOI: 10.1134/S0374064119050121.

12. Хромов АП, Корнев ВВ. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. *Доклады Академии наук*. 2019;484(1):18–20. DOI: 10.31857/S0869-5652484118-20.

13. Корнев ВВ, Хромов АП. Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения. В: *Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI»; 3–9 мая 2020 г.; Воронеж, Россия.* Воронеж: Наука-Юнипресс; 2020. с. 99–102.

14. Ломов ИС. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения в случае существенно несамосопряженного оператора. В: *Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI»; 3–9 мая 2020 г.; Воронеж, Россия.* Воронеж: Наука-Юнипресс; 2020. с. 124–126.

15. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. Вентцель ТД, переводчик; Олейник ОА, редактор. Москва: Мир; 1964. 830 с.

16. Ломовцев ФЕ, Лысенко ВВ. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. *Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.* 2019;3:5–17.

17. Ломовцев ФЕ. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;3:38–52.

18. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift.* 1934;38:257–282. DOI: 10.1007/BF01170635.

19. Ладыженская ОА. *Краевые задачи математической физики*. Москва: Наука; 1973. 408 с.

20. Юрчук НИ. Частично характеристическая граничная задача для одного вида уравнений в частных производных. II. *Дифференциальные уравнения*. 1969;5(3):531–542.

21. Ломовцев ФЕ. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов. *Дифференциальные уравнения*. 1992;28(5):873–886.

22. Ломовцев ФЕ. Гладкость сильных решений полных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов. *Дифференциальные уравнения*. 2001;37(2):276–278.

23. Лионс Ж-Л, Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Франк ЛС, переводчик; Грушин ВВ, редактор. Москва: Мир; 1971. 371 с.

24. Иосида К. *Функциональный анализ.* Волосов ВМ, переводчик. Москва: Мир; 1967. 623 с.

References

1. Baranovskaya SN. *O klassicheskom reshenii pervoi smeshannoi zadachi dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya* [On the classical solution of the first mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation] [dissertation]. Minsk: Belarusian State University; 1991. 59 p. Russian.

2. Lomovtsev FE. [The method of auxiliary mixed problems for a semi-infinite string]. In: Krasovskii SG, editor. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Materialy Mezhdunarodnoi matematicheskoi konferentsii; 7–10 dekabrya 2015 g.; Minsk, Belarus'. Chast' 2. Teoriya ustoichivosti i upravleniya dvizheniem. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh. Metodika prepodavaniya matematiki* [The 6th Bogdanov readings on ordinary differential equations. Materials of the International mathematical conference; 2015 December 7–10; Minsk, Belarus. Part 2. The theory of stability and motion control. Stochastic differential equations. Partial differential equations. Methods of teaching mathematics]. Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus; 2015. p. 74–75. Russian.

3. Moiseev EI, Yurchuk NI. [Classical and generalized solutions to problems for telegraph equations with the Dirac potential]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2015;51(10):1338–1344. Russian. DOI: 10.1134/S0374064115100088.

4. Baranovskaya SN, Novikov EN, Yurchuk NI. [The oblique derivative problem in the boundary condition for the telegraph equation with the Dirac potential]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2018;54(9):1176–1183. Russian. DOI: 10.1134/S0374064118090030.

5. Anikonov DS, Konovalova DS. [Generalized d'Alembert formula for the wave equation with discontinuous coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2019;55(2):265–268. Russian. DOI: 10.1134/S0374064119020134.

6. Khromov AP. [On the convergence of the formal Fourier solution of the wave equation with a summable potential]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 2016;56(10):1795–1809. Russian. DOI: 10.7868/S0044466916100112.

7. Kornev VV, Khromov AP. Resolvent approach to Fourier method in a mixed problem for non-homogeneous wave equation. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2016;16(4):403–413. Russian. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.

8. Khromov AP. [Mixed problem for wave equation with summable potential and nonzero initial velocity]. *Doklady Akademii nauk.* 2017;474(6):668–670. Russian.

9. Khromov AP. On classic solution of the problem for a homogeneous wave equation with fixed end-points and zero initial velocity. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2019;19(3):280–288. Russian. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288.

10. Khromov AP, Kornev VV. [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a non-homogeneous wave equation]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2019;59(2):286–300. Russian. DOI: 10.1134/S0044466919020091.

11. Khromov AP. [Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with an integrable potential]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2019;55(5):717–731. Russian. DOI: 10.1134/S0374064119050121.

12. Khromov AP, Kornev VV. Classical and generalized of a mixed problem – solutions for a non-homogeneous wave equation. *Doklady Akademii nauk.* 2019;484(1):18–20. Russian. DOI: 10.31857/S0869-5652484118-20.

13. Kornev VV, Khromov AP. Divergent series and generalized solution of a mixed problem for wave equation. In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii. Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya – XXXI»; 3–9 maya 2020 g.; Voronezh, Rossiya* [Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the International conference. Voronezh spring mathematical school «Pontryagin readings – XXXI»; 2020 May 3–9; Voronezh, Russia]. Voronezh: Nauka-Yunipress; 2020. p. 99–102. Russian.

14. Lomov IS. d'Alembert generalized formula for the telegraph equation in case of a substantially non-self-adjoint operator. In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii. Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya – XXXI»; 3–9 maya 2020 g.; Voronezh, Rossiya* [Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the International conference. Voronezh spring mathematical school «Pontryagin readings – XXXI»; 2020 May 3–9; Voronezh, Russia]. Voronezh: Nauka-Yunipress; 2020. p. 124–126. Russian.

15. Courant R, Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Volume II. Partial differential equations*. New York: Wiley; 1962. XXII, 830 p.

Russian edition: Courant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*. Venttsel' TD, translator; Oleinik OA, editor. Moscow: Mir; 1964. 830 p.

16. Lomovtsev FE, Lysenko VV. Non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta.* 2019;3:5–17. Russian.

17. Lomautsau FE. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;3:38–52. Russian.

18. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift.* 1934;38:257–282. DOI: 10.1007/BF01170635.

19. Ladyzhenskaya OA. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1973. 408 p. Russian.

20. Yurchuk NI. [Partially characteristic boundary value problem for one kind of partial differential equations. II]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1969;5(3):531–542. Russian.

21. Lomautsau FE. [On necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the Cauchy problem for second-order hyperbolic differential equations with a variable domain of definition of operator coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1992;28(5):873–886. Russian.

22. Lomautsau FE. [Smoothness of strong solutions of complete hyperbolic second-order differential equations with variable domains of operator coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2001;37(2):276–278. Russian.

23. Lions J-L, Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volume 1.* Paris: Dunod; 1968. XIX, 372 p.

Russian edition: Lions J-L, Magenes E. *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya*. Frank LS, translator; Grushin VV, editor. Moscow: Mir; 1971. 371 p.

24. Yosida K. *Functional analysis*. Berlin: Springer-Verlag; 1965. XI, 458 p.

Russian edition: Yosida K. *Funktsional'nyi analiz*. Volosov VM, translator. Moscow: Mir; 1967. 623 p.

Статья поступила в редколлегию 20.06.2020.
Received by editorial board 20.06.2020.