

## МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В. В. ЧАЙКО<sup>1)</sup>, О. Л. КОНОВАЛОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается подход к моделированию процессов геомеханики на основе метода внутренних сил. В частности, исследуется проблема неинвариантности метода к поворотам. Предложена оригинальная модификация метода на основе дополнительных центральных сил, определяемых деформациями сопряженных ячеек Вороного. Получено аналитическое соотношение между параметрами микроструктурной модели и упругими свойствами моделируемого материала. Представлены результаты численных экспериментов по верификации данного соотношения и точности моделирования напряженно-деформированного состояния.

**Ключевые слова:** численный эксперимент; дискретно-элементное моделирование; микроструктурные параметры; напряженно-деформированное состояние; деформируемая диаграмма Вороного.

## DEFORMABLE VORONOI MODEL FOR THE RESEARCH OF THE PLANE STRESS-STRAIN STATE

V. V. CHAIKO<sup>a</sup>, O. L. KONOVALOV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. V. Chaiko (chvictor0@gmail.com)

The paper considers an approach to modelling geomechanical processes based on the internal forces method. In particular, the problem of non-invariance of the method to rotations is investigated. An original modification of the method based on additional central forces determined by deformations of adjacent Voronoi cells is proposed. An analytical relationship between the parameters of the microstructural model and the elastic properties of the simulated material is obtained. The results of numerical experiments to verify this relationship and the accuracy of modelling the stress-strain state are presented.

**Keywords:** numerical experiment; discrete element modelling; microstructural parameters; stress-strain state; deformable Voronoi.

### Образец цитирования:

Чайко ВВ, Коновалов ОЛ. Модель деформируемой диаграммы Вороного для исследования плоского напряженно-деформированного состояния. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:102–112.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-102-112>

### For citation:

Chaiko VV, Kononov OL. Deformable Voronoi model for the research of the plane stress-strain state. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:102–112. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-102-112>

### Авторы:

**Виктор Валерьевич Чайко** – аспирант кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор технических наук, профессор В. В. Краснопрошин.  
**Олег Леонидович Коновалов** – кандидат технических наук; заведующий научно-исследовательской лабораторией информационных технологий и компьютерной графики, доцент кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики.

### Authors:

**Victor V. Chaiko**, postgraduate student at the department of information management systems, faculty of applied mathematics and computer science.  
[chvictor0@gmail.com](mailto:chvictor0@gmail.com)  
**Oleg L. Kononov**, PhD (engineering); head of the laboratory of information technologies and computer graphics and associate professor at the department of information management systems, faculty of applied mathematics and computer science.

## Введение

Дискретно-элементное (ДЭ) моделирование является перспективным подходом для исследования процессов трещинообразования в задачах геомеханики [1; 2]. Существует множество модификаций ДЭ-моделей, в которых деформируемое твердое тело представляется набором частиц и соединяющих их связей (пружин), отличающихся способом построения сетки и методом расчета сил, прикладываемых к частицам (см., например, [3; 4]). В модели RMIB (*real multidimensional internal bonds*) [5] генерируется упаковка частиц, заполняющих пространство моделируемого объекта. Связи устанавливаются между центрами касающихся частиц. Связь включает нормальную и касательную пружины, которые учитываются в расчете силы, возникающей при их деформации. На рис. 1 показано, что невозможно полноценно определить деформацию связи через перемещение двух соседних частиц без потери инвариантности схемы к поворотам. Чтобы преодолеть это ограничение, для вычисления локальной деформации в окрестности каждой частицы в RMIB используется процедура, анализирующая перемещения самой частицы и соседних с ней частиц.

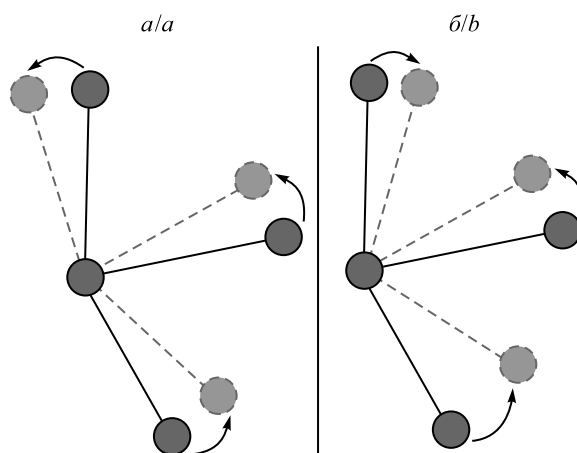


Рис. 1. Неинвариантность деформации связи к поворотам при ее тривиальном вычислении:

*a* – поворот сетки; *b* – сжатие и поворот сетки

Fig. 1. Non-invariance of bond deformation to rotations at trivial calculation:  
*a* – mesh rotate; *b* – mesh compression and rotate

В работе [6] получена модель деформируемой диаграммы Вороного (*deformable Voronoi, DV*), инвариантная к поворотам. Помимо этого, в ней нет дополнительного вычисления матрицы локальных деформаций. Для генерации решетки пружин и расчета сил используется тетраэдризация Делоне и двойственная диаграмма Вороного. Также авторами работы [6] получено приемлемое упругое поведение модели для материалов с коэффициентом Пуассона  $\nu$  в диапазоне от 0,1 до 0,3 и отмечена возможность моделирования ауксетиков с коэффициентом  $\nu$  в пределах от  $-0,1$  до  $-0,5$ . Соотношения микроструктурных параметров DV-модели  $k_n$  и  $\nu_m$  и свойств упругой сплошной среды  $E$  и  $\nu$  подобраны экспериментально. В предлагаемой статье рассматриваются модификации модели DV для решения задач исследования напряженно-деформированного состояния твердых тел в двумерном случае, а также определяется соотношение микроструктурных параметров  $k_n$  и  $\nu_m$  и свойств сплошной среды  $E$  и  $\nu$ .

## Материалы и методы исследования

**Модель деформируемой диаграммы Вороного.** В пространстве моделируемого тела генерируется триангуляция Делоне. Ребра триангуляции соответствуют связям, узлы – частицам. На рис. 2 показана схема деформирования сетки в окрестности связи между частицами  $O$  и  $A$  (конфигурация связь – сторона ячейки Вороного). При этом сторона ячейки Вороного не перестраивается, а деформируется тем же способом, что и треугольники в окрестности конфигурации.

Введем обозначения:

- $u_i$  и  $u_j$  – перемещение частиц;
- $u_{ij} = u_i - u_j$  – перемещение связи  $OA$ ;
- $l$  – исходная длина связи  $OA$ ;
- $n = (\sin \varphi, \cos \varphi) = (\xi_1, \xi_2)$  – направление связи  $OA$ ;

- $(\xi'_1, \xi'_2) = (\xi_1 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha, \xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha)$  – направление связи  $OB$ ;
- $(\xi''_1, \xi''_2) = (\xi_1 \cos \beta - \xi_2 \sin \beta, \xi_1 \sin \beta + \xi_2 \cos \beta)$  – направление связи  $OC$ ;
- $u^n = (u_{ij} \cdot n)n$  – нормальная компонента деформации связи;
- $r$  – исходная длина стороны ячейки Вороного;
- $r'_1$  и  $r'_2$  – длины частей деформированной стороны ячейки Вороного;
- $r' = r'_1 + r'_2$  – длина деформированной стороны ячейки Вороного;
- $a, b, c, \alpha, \beta$  – исходные длины связей  $OA, OB, OC$  и углы между ними;
- $a', b', c', \alpha', \beta'$  – длины связей  $OA, OB, OC$  и углы между ними после деформации.

В модели DV, как и в VIB [3], у связи отсутствует касательная пружина, что само по себе ограничивает поведение материала фиксированным коэффициентом Пуассона. Вариативность коэффициента Пуассона обеспечивается за счет увеличения исходной длины связи на величину  $\Delta l$ , зависящую от изменения длины соответствующей стороны ячейки Вороного:

$$\Delta l = v_m(r - r'). \quad (1)$$

Сила  $F_{ij}$ , возникающая при деформации связи, рассчитывается с использованием только ее нормальной компоненты, но с учетом изменения исходной длины связи (1):

$$F_{ij} = k_n(u_{ij}^n - \Delta l n). \quad (2)$$

Вычисление  $r'_1$  и  $r'_2$  на практике удобно осуществлять следующим способом. Сначала рассчитываются барицентрические координаты центров описанных окружностей треугольников  $OAB$  и  $OAC$ . Затем по полученным барицентрическим координатам определяются точки  $H'_1$  и  $H'_2$  для деформированных треугольников  $OA'B'$  и  $OA'C'$ .

На рис. 3 изображена модификация модели, где при деформации сетки диаграмма Вороного перестраивается (модель перестраиваемой диаграммы Вороного (*remeshing Voronoi, RV*)).

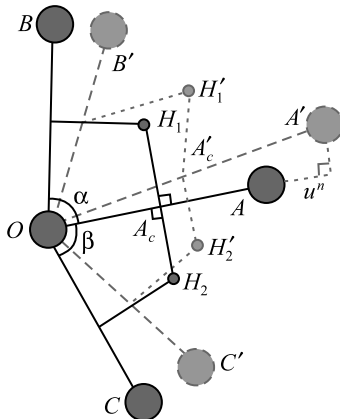


Рис. 2. Схема деформирования связи модели DV  
 Fig. 2. Deformation of the bond of the DV model

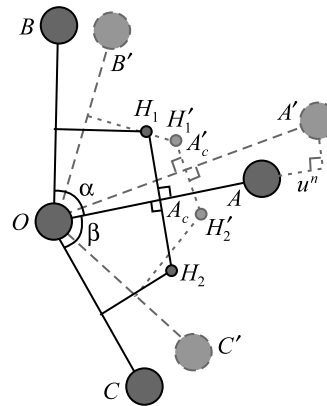


Рис. 3. Схема деформирования связи модели RV  
 Fig. 3. Deformation of the bond of the RV model

В этой модификации  $r'_1$  и  $r'_2$  находятся с помощью вычисления  $H'_1$  и  $H'_2$  – центров окружностей, описанных около треугольников  $OA'B'$  и  $OA'C'$ . В остальном модель RV аналогична модели DV.

**Вывод соотношений параметров модели DV.** Подход к определению микроструктурных параметров  $k_n$  и  $v_m$  аналогичен [5]. Рассматривается репрезентативный элементарный объем (*representative element volume, REV*) сплошной среды в виде квадрата со стороной длиной  $L$ , к которому применена деформация с матрицей  $\epsilon_{ij}$ . В DV-модели REV содержит множество конфигураций связь – сторона ячейки Вороного. Потенциальная энергия деформированного непрерывного элемента равна суммарной энергии, накопленной во всех конфигурациях.

Определим энергию деформации некоторой конфигурации с заданными параметрами  $l, r$  и  $\phi$ . Разделим пружину с переменной исходной длиной на две части:  $L$ -пружину – нормальную пружину без учета деформации стороны ячейки Вороного (аналогично RMIB) и  $R$ -пружину – пружину, которая оказывает силу, возникающую при изменении исходной длины связи на  $\Delta l$ . Используя соотношение

$$u_n = l \sum_{i,j} \xi_i \epsilon_{ij} \xi_j,$$

получим энергию  $L$ -пружины без учета деформации стороны ячейки Вороного:

$$U_L = \frac{1}{2} k_n u_n^2 = \frac{1}{2} k_n l^2 \left( \sum_{i,j} \xi_i \varepsilon_{ij} \xi_j \right)^2. \quad (3)$$

Принимая во внимание перпендикулярность  $H_1 H_2$  и  $OA$  и применяя линеаризацию относительно  $\varepsilon_{ij}$ , имеем

$$r' = r \left( (\xi_2 \varepsilon_{11} - \xi_1 \varepsilon_{12})^2 + (\xi_2 \varepsilon_{21} - \xi_1 \varepsilon_{22})^2 \right)^{0,5} \approx r \left( \xi_2^2 \varepsilon_{11} - \xi_1 \xi_2 (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + \xi_1^2 \varepsilon_{22} \right). \quad (4)$$

Из (1), (2) следует, что при изменении длины  $R$ -пружины в интервале  $s \in [l, l + u_n]$  возникающая сила изменяется в интервале  $F \in [0, -v_m k_n (r' - r)]$ . Используя это, определим механическую работу при ее деформации:

$$A_R = - \int_{s=l}^{l+u_n} v_m k_n \frac{r' - r}{u_n} (s - l) ds = -\frac{1}{2} v_m k_n r' u_n + C_1 r' + C_2 u_n + C_3.$$

Так как в дальнейшем нам понадобятся только слагаемые второй степени от  $\varepsilon_{ij}$ , определим энергию  $R$ -пружины:

$$U_R = -\frac{1}{2} v_m k_n u_n r' \approx -\frac{1}{2} v_m k_n l r \sum_{i,j} \sum_{n,m} (-1)^{\delta_{nm}} \xi_i \xi_j \xi_{3-n} \xi_{3-m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm}.$$

Суммарная энергия, накопленная при деформации REV,

$$\Phi = \frac{\sum U_L + \sum U_R}{L^2}.$$

Тензор модуля упругости можно определить через энергию REV [5]:

$$C_{ijnm} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{nm}} = \sum \frac{k_n l^2 \xi_i \xi_j \xi_n \xi_m + k_n v_m l r (-1)^{\delta_{nm}} \xi_i \xi_j \xi_{3-n} \xi_{3-m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm}}{L^2}. \quad (5)$$

Тензор модуля упругости удобно представить в матричной форме:

$$\Omega = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \frac{1}{2}(C_{1112} + C_{1121}) \\ C_{2211} & C_{2222} & \frac{1}{2}(C_{2212} + C_{2221}) \\ C_{1211} & C_{1222} & \frac{1}{2}(C_{1212} + C_{2121}) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При этом выполняется соотношение

$$\sigma = \Omega \varepsilon,$$

где  $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sqrt{2}\sigma_{12}]^T$  – вектор, составленный из компонент тензора напряжений,  $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sqrt{2}\varepsilon_{12}]^T$  – вектор, составленный из компонент тензора деформаций.

Если количество конфигураций в рассматриваемом квадратном элементе достаточно велико, уравнение (5) можно переписать в интегральной форме:

$$C_{ijnm} = \frac{1}{L^2} \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} k_n v_m l r (-1)^{\delta_{nm}} \xi_i \xi_j \xi_{3-n} \xi_{3-m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} D(l, r, \varphi) d\varphi dr dl + \frac{1}{L^2} \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{2\pi} k_n l^2 \xi_i \xi_j \xi_n \xi_m D_l(l, \varphi) d\varphi dl,$$

где  $D(l, r, \varphi) d\varphi dr dl$  – количество конфигураций в REV с параметрами в интервале  $[l, l + dl] \times [r, r + dr] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$ .

Для изотропного материала связи распределены равномерно по всем направлениям, поэтому можно провести замену

$$D(l, r, \varphi) = \frac{N(l, r)}{2\pi},$$

где  $N(l, r)drdl$  – количество конфигураций в REV с параметрами в интервале  $[l, l + dl] \times [r, r + dr]$ .  
 Разделив интегралы, после сокращения имеем следующую матрицу модулей упругости:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 3\alpha_{2D}k_n + \beta_{2D}k_n\nu_m & \alpha_{2D}k_n + 3\beta_{2D}k_n\nu_m & 0 \\ & 3\alpha_{2D}k_n + \beta_{2D}k_n\nu_m & 0 \\ \text{Symmetry} & & \alpha_{2D}k_n - \beta_{2D}k_n\nu_m \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При этом  $\alpha_{2D} = \frac{\int_{l_1}^{l_2} l^2 N(l) dl}{8L^2}$ ,  $\beta_{2D} = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} lr N(l, r) dr dl}{8L^2}$ .

Данные интегралы могут быть оценены для дискретной геометрической структуры:

$$\alpha_{2D} = \frac{\sum l^2}{8L^2},$$

$$\beta_{2D} = \frac{\sum lr}{8L^2}.$$

В случае плоского напряженного состояния (*plane stress*) матрица (6) имеет вид

$$\Omega = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Приравняв (7) и (8) и решив полученные уравнения, найдем микроструктурные коэффициенты модели DV:

$$k_n = \frac{E(3-\nu)}{8\alpha_{2D}(1-\nu^2)}, \quad (9)$$

$$\nu_m = \frac{\alpha_{2D}(3\nu-1)}{\beta_{2D}(3-\nu)}. \quad (10)$$

**Вывод соотношений параметров модели RV.** Для модели перестраиваемой диаграммы Вороного проводятся аналогичные рассуждения. Из геометрических свойств конфигурации RV получаем

$$r' = r'_1 + r'_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{b' - a' \cos \alpha'}{\sin \alpha'} + \frac{c' - a' \cos \beta'}{\sin \beta'} \right).$$

Используя линеаризацию по  $\varepsilon_{ij}$ , для преобразованных в ходе деформации параметров  $a, b, c, \alpha, \beta$  конфигурации RV имеем

$$a' \approx a(1 + \xi_1^2 \varepsilon_{11} + \xi_2^2 \varepsilon_{22} + \xi_1 \xi_2 \varepsilon_{12}), \quad (11)$$

$$b' \approx b(1 + \xi_1'^2 \varepsilon_{11} + \xi_2'^2 \varepsilon_{22} + \xi_1' \xi_2' \varepsilon_{12}), \quad (12)$$

$$c' \approx c(1 + \xi_1''^2 \varepsilon_{11} + \xi_2''^2 \varepsilon_{22} + \xi_1'' \xi_2'' \varepsilon_{12}), \quad (13)$$

$$\sin \alpha' \approx \sin \alpha \left( 1 + (1 - \xi_1^2 - \xi_1'^2) \varepsilon_{11} + (1 - \xi_2^2 - \xi_2'^2) \varepsilon_{22} + (-\xi_1 \xi_2 - \xi_1' \xi_2') (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right), \quad (14)$$

$$\sin \beta' \approx \sin \beta \left( 1 + (1 - \xi_1^2 - \xi_1''^2) \varepsilon_{11} + (1 - \xi_2^2 - \xi_2''^2) \varepsilon_{22} + (-\xi_1 \xi_2 - \xi_1'' \xi_2'') (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha' \approx \cos \alpha & \left( 1 + \left( \frac{2\xi_1 \xi_1'}{\cos \alpha} - \xi_1^2 - \xi_1'^2 \right) \varepsilon_{11} + \left( \frac{2\xi_2 \xi_2'}{\cos \alpha} - \xi_2^2 - \xi_2'^2 \right) \varepsilon_{22} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\xi_1 \xi_2' + \xi_1' \xi_2}{\cos \alpha} - \xi_1 \xi_2 - \xi_1' \xi_2' \right) (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta' \approx \cos \beta & \left( 1 + \left( \frac{2\xi_1 \xi_1''}{\cos \beta} - \xi_1^2 - \xi_1''^2 \right) \varepsilon_{11} + \left( \frac{2\xi_2 \xi_2''}{\cos \beta} - \xi_2^2 - \xi_2''^2 \right) \varepsilon_{22} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\xi_1 \xi_2'' + \xi_1'' \xi_2}{\cos \beta} - \xi_1 \xi_2 - \xi_1'' \xi_2'' \right) (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Определим накопленную энергию в конфигурации RV. Аналогично DV разделим связь модели RV на  $L$ -пружину и  $R$ -пружину. Энергия  $U_L$  определяется, как в (3). Найдем энергию  $R$ -пружины, используя линейризацию (11)–(17):

$$U_R(a, b, c, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} k_n v_m u_n r' \approx \sum_{i,j} \sum_{n,m} E_{ijnm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm},$$

где

$$E_{1111} = G_1 \xi_{11}^4 + G_2 \xi_{11}^2 \xi_{22}^2 + G_3 \xi_{11}^2,$$

$$E_{1122} = G_1 \xi_{11}^2 \xi_{22}^2 + G_2 \xi_{11}^4 + G_3 \xi_{11}^2,$$

$$G_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{b(2 \cos^2 \alpha + 1) + 3a \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{c(2 \cos^2 \beta + 1) + 3a \cos \beta}{\sin \beta} \right),$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (2b \sin \alpha + 2c \sin \beta),$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{-b - a \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{-c - a \cos \beta}{\sin \beta} \right).$$

Проводя аналогичные модели DV рассуждения, определим модули упругости для модели RV:

$$C_{ijnm} = \frac{1}{L^2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^2 U_R}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{nm}} D(a, b, c, \alpha, \beta, \varphi) d\varphi d\beta d\alpha dc db da + I_L,$$

где  $D(a, b, c, \alpha, \beta, \varphi) d\varphi d\beta d\alpha dc db da$  – количество конфигураций в REV с параметрами в интервале  $[a, a + da] \times [b, b + db] \times [c, c + dc] \times [\alpha, \alpha + d\alpha] \times [\beta, \beta + d\beta] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$ .

Как и в модели DV, пользуясь изотропностью материала, можно провести замену

$$D(a, b, c, \alpha, \beta, \varphi) = \frac{N(a, b, c, \alpha, \beta)}{2\pi}.$$

После сокращения получаем матрицу модулей упругости

$$\Omega = \begin{bmatrix} 3\alpha_{2D} k_n + M_1 k_n v_m & \alpha_{2D} k_n + M_2 k_n v_m & 0 \\ & 3\alpha_{2D} k_n + M_1 k_n v_m & 0 \\ \text{Symmetry} & & \alpha_{2D} k_n + M_3 k_n v_m \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где

$$M_1 = \frac{1}{8L^2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_0^\pi \int_0^\pi (3G_1 + G_2 + 4G_3) N(a, b, c, \alpha, \beta) d\beta d\alpha dc db da,$$

$$M_2 = \frac{1}{8L^2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_0^\pi \int_0^\pi (G_1 + 3G_2 + 4G_3) N(a, b, c, \alpha, \beta) d\beta d\alpha dc db da.$$

Приравняв (18) и (8) и решив полученные уравнения, найдем микроструктурные коэффициенты модели RV:

$$k_n = \frac{E(M_2 - \nu M_1)}{\alpha_{2D}(1 - \nu^2)(3M_2 - M_1)}, \quad (19)$$

$$\nu_m = \frac{\alpha_{2D}(1 - 3\nu)}{\nu M_1 - M_2}. \quad (20)$$

Интегралы  $M_1$  и  $M_2$  могут быть оценены для дискретной геометрической структуры:

$$M_1 = \frac{\sum (3G_1 + G_2 + 4G_3)}{8L^2},$$

$$M_2 = \frac{\sum (G_1 + 3G_2 + 4G_3)}{8L^2}.$$

### Результаты и их обсуждение

**Численные эксперименты.** Для подтверждения полученных соотношений микроструктурных параметров и параметров сплошной среды (9), (10) для модели DV и (19), (20) для модели RV, а также исследования применимости методов проводились описанные ниже численные эксперименты.

**Эксперимент 1:** восстановление матрицы упругости (6). Эксперимент проводится для верификации поведения модели с полученными микроструктурными параметрами. Генерируется триангуляция из  $10^5$  вершин квадратного элемента размером  $1 \times 1$ . Параметры сплошной среды  $E = 10^7$ ,  $\nu = 0,2$ , если не указано иное. Особенностью эксперимента является то, что одинаковая деформация задается для всех элементов сетки. Так как модули упругости считаются неизвестными, тензор напряжений получен численно. Тензор напряжений  $\sigma_{ij}^h(x, y)$  в достаточно малом квадрате с центром в  $(x, y)$  и стороной  $h$  вычисляется путем непосредственного учета всех сил от пружин, пересекающих стороны рассматриваемого квадрата. Так как сетка обладает нерегулярной структурой, тензор напряжений будет различаться в пространстве моделируемого объекта. Определяется усредненный по всей сетке с шагом  $h$  тензор напряжений  $\sigma_0 = h^2 \sum \sigma_{ij}^h(x, y)$ . Модули упругости восстанавливаются с использованием  $\sigma_0$  и соотношения (10). На рис. 4 видна погрешность восстановленного модуля упругости при значительных величинах деформации, что можно объяснить применением линеаризации (4) и (11)–(17). Можно заметить, что модель RV быстрее теряет точность при увеличении деформации.

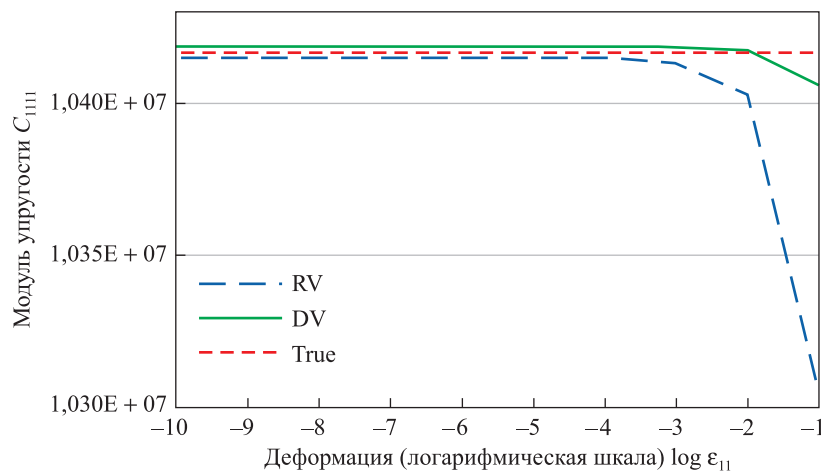


Рис. 4. Восстановление модуля упругости  $C_{1111}$  при различных величинах деформации

Fig. 4. Recovery of the elastic modulus  $C_{1111}$  at various values of deformation



На рис. 5 и 6 показаны восстановленные модули упругости  $C_{1111}$  и  $C_{1122}$  при малой деформации и различных коэффициентах Пуассона. Как видно из представленных результатов, дискретная модель в заданных условиях достаточно точно описывает поведение упругой сплошной среды.

**Эксперимент 2:** моделирование изгиба балки под действием собственного веса с жестким закреплением с двух сторон (рис. 7). Размеры балки  $1 \times 4$ ,  $E = 10^5$ ,  $\nu = 0,2$ , объемная сила гравитации  $F = -1$ .

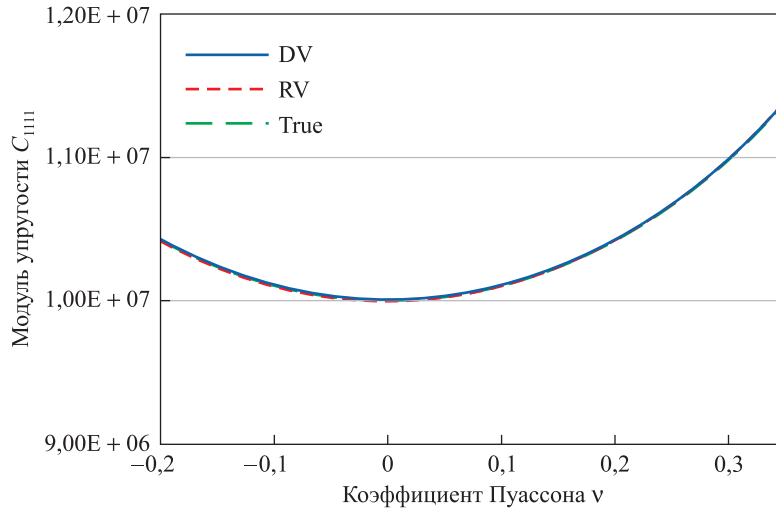


Рис. 5. Восстановление модуля упругости  $C_{1111}$  при различных коэффициентах Пуассона

Fig. 5. Recovery of modulus of elasticity  $C_{1111}$  at various Poisson's ratios

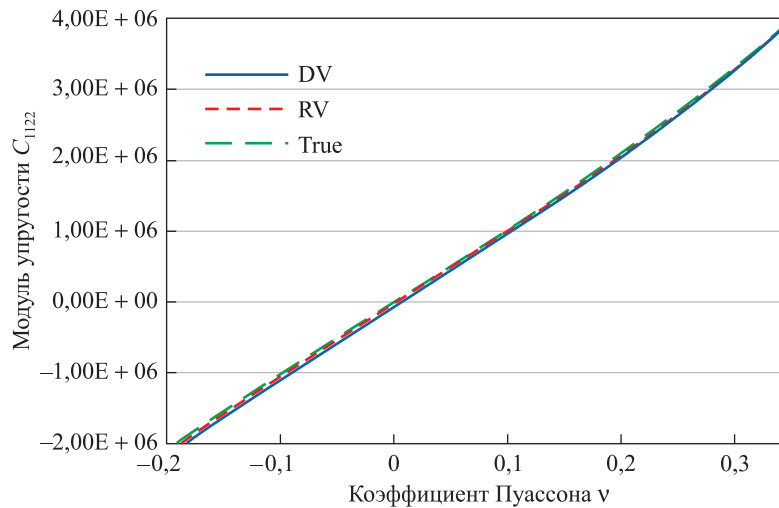


Рис. 6. Восстановление модуля упругости  $C_{1122}$  при различных коэффициентах Пуассона

Fig. 6. Recovery of modulus of elasticity  $C_{1122}$  at various Poisson's ratios

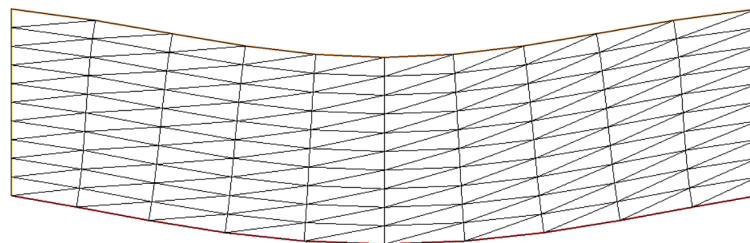


Рис. 7. Изгиб балки под действием собственного веса

Fig. 7. Beam bending under its own weight



Решение для DV и RV получено аналогичным RMIB итерационным методом, описанным в [4]. На рис. 8 и 9 показано распределение перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  по длине балки, полученное конечно-элементным методом и с помощью моделей DV и RV. Из результатов этого эксперимента можно сделать вывод, что метод позволяет решать достаточно сложные задачи, получая правдоподобное поведение модели.

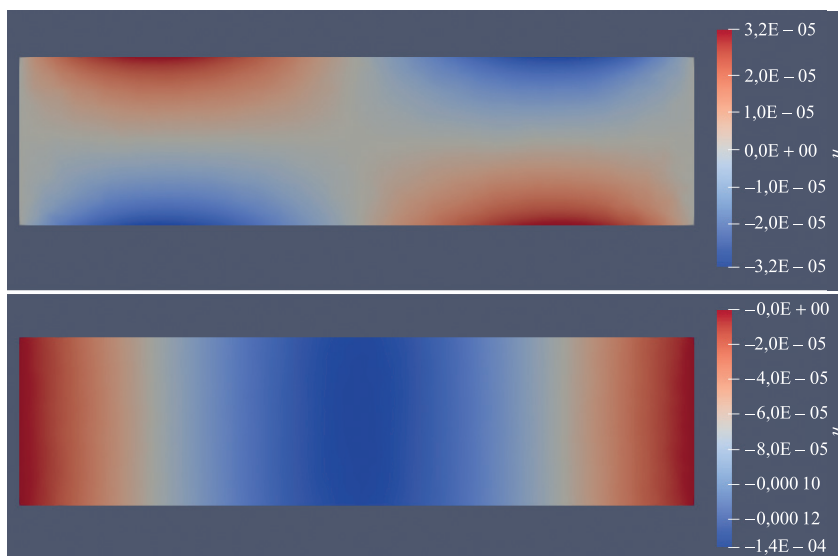


Рис. 8. Эксперимент 2. Визуализация решения модели DV  
 Fig. 8. Test 2. Visualisation of the DV model solution

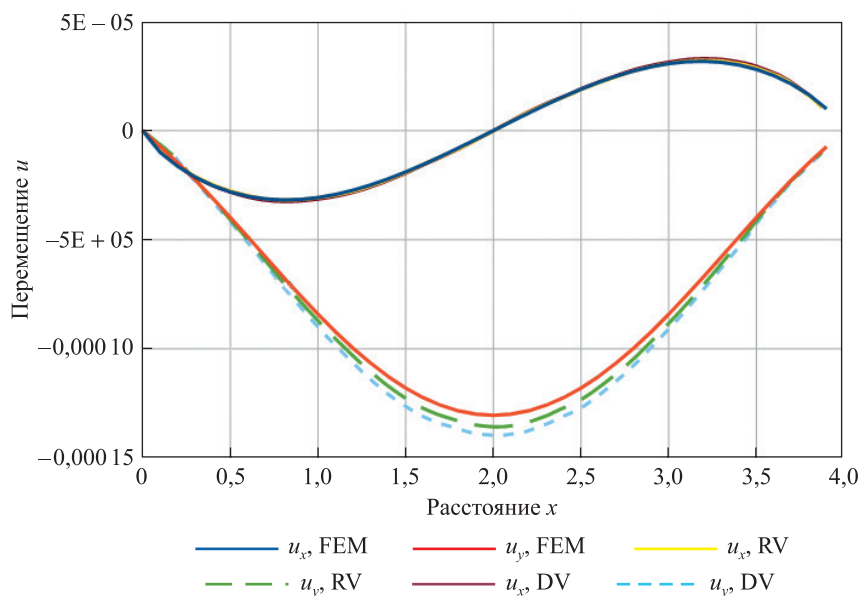


Рис. 9. Результаты эксперимента 2. Сравнение решений  
 Fig. 9. Test 2. Comparison of solutions

**Эксперимент 3:** одноосное сжатие квадратного элемента размером  $1 \times 1$  со свойствами материала из эксперимента 2 (напряжение  $\sigma_{xx} = 1$ ). При этом исследуется отклонение решения моделей DV и RV от аналитического решения на сетках с различным распределением длин ребер. На рис. 9 показано изменение ошибки при различных величинах  $\sigma_L = \frac{\sigma_0}{L_{avr}}$ , где  $\sigma_0$  – среднеквадратичное отклонение длин ребер;  $L_{avr}$  – средняя длина ребра. Сетка со свойством  $\sigma'_L$  получается случайной модификацией (каждая вершина перемещается на небольшую случайную величину) имеющейся сетки с  $\sigma_L < \sigma'_L$ . Результат эксперимента показывает значительное влияние величины среднеквадратичного отклонения длины связи на точность вычислений.

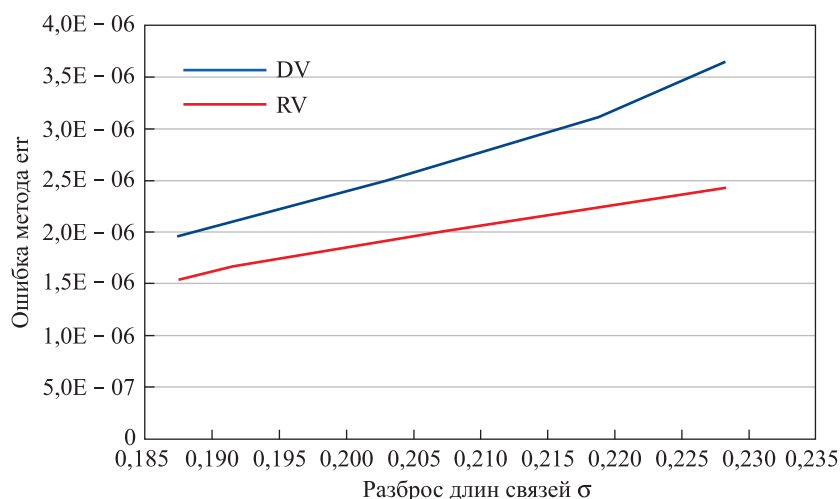


Рис. 10. Результаты эксперимента 3

Fig. 10. Results of test 3

### Заключение

В работе были рассмотрены двумерные модификации моделей деформируемой и перестраиваемой диаграмм Вороного. Получено соотношение микроструктурных параметров и свойств сплошной среды (макропараметров).

Как и в RMIB [5], при выводе соотношений микро- и макропараметров мы предположили, что при использовании определенной деформации, примененной к REV, к связям, заполняющим элемент, будет применена схожая деформация и их отличие не повлияет на оценку энергии. На практике это выполнимо только при условии, что длины связей не различаются значительно. Это можно легко организовать при генерации упаковки RMIB, используя близкие по размеру частицы, в то же время алгоритмы триангуляции не обладают такой возможностью. Эксперимент 1 построен так, что деформация устанавливается фиксированной во всей сетке, и при достаточно малых величинах  $\varepsilon_{11}$  поведение полученных моделей практически совпадает с теоретическим. При достижении равновесного состояния системы (что использовалось в последующих экспериментах) локальная деформация существенно варьировалась в разных областях сетки. В эксперименте 2 также получены решения с достаточно близким к теории поведением. В то же время в эксперименте 3 для материала с такими же свойствами обнаружены значительные погрешности и подтвержден факт существенного влияния разброса длин связей на качество получаемого решения.

В дальнейшем планируется расширить исследуемые модели с учетом разброса длин связей, свойственного получаемым триангуляциям, а также обобщить для трехмерного случая.

### Библиографические ссылки

1. Краснопрошин ВВ, Коновалов ОЛ, Чайко ВВ. Алгоритм расчета геометрических параметров плоских гидравлических трещин. *Вестник Брестского государственного технического университета. Физика, математика, информатика*. 2017;5: 23–26.
2. Chaiko VV, Konovalov OL, Zhuravkov MA. DEM-FVM conjugated parallel solver for hydraulic fracturing. In: *2<sup>nd</sup> International discrete fracture network engineering conference; 2018 June 20–22; Seattle, Washington, USA*. Alexandria: American Rock Mechanics Association; 2018. p. 1429.
3. Gao H, Klein P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998;46(2):187–218. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00047-1.
4. Zhang Z, Ge X. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2005;24(2):243–252. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.11.007.
5. Zhao G. *Development of micro-macro continuum-discontinuum coupled numerical method* [dissertation]. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne; 2010. 224 p.
6. Konovalov O, Ji S, Zhuravkov M. Modified virtual internal bond model based on deformable Voronoi particles. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020;10(2):87–91. DOI: 10.1016/j.taml.2020.01.008.

### References

1. Krasnoprosin VV, Konovalov OL, Chaiko VV. Algorithm for calculating the geometric parameters of flat hydraulically induced fractures. *Vestnik of Brest State Technical University. Physics, mathematics, informatics*. 2017;5:23–26. Russian.

2. Chaiko VV, Konovalov OL, Zhuravkov MA. DEM-FVM conjugated parallel solver for hydraulic fracturing. In: *2<sup>nd</sup> International discrete fracture network engineering conference; 2018 June 20–22; Seattle, Washington, USA*. Alexandria: American Rock Mechanics Association; 2018. p. 1429.
3. Gao H, Klein P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998;46(2):187–218. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00047-1.
4. Zhang Z, Ge X. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2005;24(2):243–252. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.11.007.
5. Zhao G. *Development of micro-macro continuum-discontinuum coupled numerical method* [dissertation]. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne; 2010. 224 p.
6. Konovalov O, Ji S, Zhuravkov M. Modified virtual internal bond model based on deformable Voronoi particles. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020;10(2):87–91. DOI: 10.1016/j.taml.2020.01.008.

Статья поступила в редакцию 03.02.2021.  
Received by editorial board 03.02.2021.