

УДК 515.12

О СЧЕТНОКОМПАКТИФИЦИРУЕМОСТИ В СМЫСЛЕ МОРИТА

Г. О. КУКРАК¹⁾, В. Л. ТИМОХОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается расширение Y топологического пространства X , которое канонически вкладывается в вольтмановское расширение ωX , при этом в нем замкнуто любое счетно-компактно замкнутое в X множество и имеет предельную точку любое лежащее в X бесконечное множество. Такое расширение названо насыщением пространства X . Находится необходимое и достаточное условие счетнокомпактности пространства Y . Тем самым решается проблема существования счетнокомпактификации в смысле Морита определенного типа.

Ключевые слова: счетнокомпактификация в смысле Морита; компактификация Волмэна; насыщение топологического пространства.

ON THE COUNTABLY-COMPACTIFIABILITY IN THE SENSE OF MORITA

H. O. KUKRAK^a, V. L. TIMOKHOVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: H. O. Kukrak (kukrak@bsu.by)

We consider an extension Y of a topological space X that is canonically embedded in the Wallman extension ωX , in which any countably compact set closed in X is closed and such that any infinite set contained in X has a limit point in it.

Образец цитирования:

Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Морита. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:46–53.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-46-53>

For citation:

Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:46–53. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-46-53>

Авторы:

Глеб Олегович Кукрак – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:

Hleb O. Kukrak, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
kukrak@bsu.by

Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
timvlaleo@gmail.com

This extension is called saturation of the space X . We find a necessary and sufficient condition for the countable compactness of the space Y . Thus the problem of existence of countably-compactification in the sense of Morita of certain type is solved.

Keywords: countably-compactification in the sense of Morita; Wallman compactification; saturation of topological space.

Введение

Понятия перистого паракомпакта (А. В. Архангельский [1]) и M -пространства (К. Морита [2]) появились почти одновременно. Сразу же обращает на себя внимание схожесть их внешних характеристик. В классе хаусдорфовых пространств перистые паракомпакты и только они допускают метризуемый образ при совершенном отображении. И аналогично, M -пространства и только они допускают метризуемый образ при квазисовершенном отображении. Когда перистые паракомпакты были охарактеризованы как замкнутые подпространства произведений метризуемых пространств на компакты (Дж. Нагата [3]), возник вопрос о возможности аналогичной характеристики M -пространств. Вскоре было доказано (К. Морита [4]), что представимость M -пространства X в виде замкнутого подпространства произведения метризуемого пространства на вполне регулярное счетно-компактное (аналог полученной в [3] характеристики перистого паракомпакта) равносильна его счетнокомпактифицируемости, т. е. существованию для X вполне регулярного счетно-компактного расширения, в котором замкнуто любое замкнутое в X счетно-компактное множество. Как оказалось, даже не все нормальные локально компактные M -пространства счетно-компактифицируемы [5]. Но и при наличии полученных контрпримеров задача нахождения необходимых и достаточных условий счетнокомпактифицируемости (не обязательно M -пространства) представляет определенный интерес (см., например, [6–8]).

В предлагаемой работе для произвольного T_1 -пространства X строится расширение, в котором X относительно счетно-компактно (т. е. любое лежащее в X бесконечное множество имеет в этом расширении предельную точку) и в котором замкнуто любое счетно-компактное замкнутое в X множество (в [7] такое расширение названо насыщением). Для этого расширения (в случае регулярности пространства X) находится необходимое и достаточное условие его счетнокомпактности (см. теорему 5). В классе вполне регулярных δ -хаусдорфовых пространств (см. определение 5) это позволяет решить вопрос о существовании счетнокомпактификации определенного типа (см. теорему 7), что отчасти дополняет работу [6]. В плане использования в качестве отправной точки некоторых построений волмэновского расширения ωX настоящая статья примыкает к работам [7; 8].

Кратко об обозначениях. Под пространством понимаем произвольное топологическое T_1 -пространство (если иное не оговорено). Пусть X – пространство, $A \subset X$, α – семейство некоторых множеств в X . Обозначим $[A]_X$ и $|A|$ замыкание и мощность множества A соответственно; $St_\alpha(A) = \cup\{U \in \alpha \mid U \cap A \neq \emptyset\}$; $ST_\alpha(A) = \{U \in \alpha \mid U \cap A \neq \emptyset\}$; $Cov(X)$ – семейство всех открытых покрытий пространства X ; $C(X, I)$ – множество всех непрерывных отображений пространства X в отрезок $I = [0; 1]$; \mathbb{N} – натуральный ряд. Будем использовать запись вида $A \underset{op}{\subset} X$ ($A \underset{cl}{\subset} X$), если A открыто (замкнуто соответственно) в X ; $A \underset{dense}{\subset} X$, если $[A]_X = X$; $A \underset{\omega-dense}{\subset} X$, если для любой точки $x \in X$ найдется не более чем счетное множество $B \subset A$ такое, что $x \in [B]_X$. Наконец, множество A назовем дискретом в X , если A счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в X .

Предварительные рассуждения

Пусть X и Y – произвольные пространства и $X \subset Y$ (т. е. X – подпространство в Y).

Определение 1 [9]. Пространство Y называют звезднокомпактным (X -звезднокомпактным), если для любого покрытия $\alpha \in Cov(Y)$ найдется конечное множество $A \subset Y$ ($A \subset X$ соответственно) такое, что $ST_\alpha(A) \in Cov(Y)$ (т. е. $St_\alpha(A) = Y$).

Понятия звезднокомпактности и счетнокомпактности тесно связаны.

Теорема 1 [9]. Если пространство Y счетно-компактно, то оно и звезднокомпактно.

Теорема 2 [10]. Если пространство Y является хаусдорфовым и звезднокомпактным, то оно и счетно-компактно.

Теорему 1 можно дополнить следующим образом.

Теорема 3. Пусть $X \underset{\omega-dense}{\subset} Y$. Тогда если Y счетно-компактно, то оно и X -звезднокомпактно.

Доказательство. Допустим от противного, что существует покрытие $\alpha \in \text{Cov}(Y)$ такое, что $St_\alpha(A) \neq Y$ для любого конечного $A \subset X$. Покажем, что тогда $St_\alpha(A) \neq Y$ и для любого счетного $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Действительно, так как $St_\alpha(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} St_\alpha(\{a_1, \dots, a_n\})$, то из равенства $St_\alpha(A) = Y$ и счетнокомпактности пространства Y следовало бы, что $St_\alpha(\{a_1, \dots, a_n\}) = Y$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит допущению. Выберем далее множество $B = \{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ так, чтобы $St_\alpha(B) = Y$ (см. теорему 1). Согласно условию для каждой точки y_i подберем не более чем счетное множество $K_i \subset X$ такое, что $y_i \in [K_i]_Y$, и обозначим $A = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Поскольку $St_\alpha(A) = St_\alpha([A]_Y)$ и $St_\alpha([A]_Y) \supset St_\alpha(B)$, то $St_\alpha(A) = Y$. Но $A \subset X$ и A не более чем счетно. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следующая теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3, вытекает очевидным образом из теоремы 2.

Теорема 4. Пусть пространство Y хаусдорфово. Если Y X -звезднокомпактно, то оно и счетнокомпактно.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Для произвольных $U \subset X$ и $\alpha \in \text{Cov}(X)$ обозначим $\hat{U} = \bigcup_{op} \{G \subset Y | G \cap X = U\}$ (т. е. \hat{U} – максимальное открытое раздутье U в Y , или, другими словами, $\hat{U} = Y \setminus [X \setminus U]_Y$), $\hat{\alpha} = \{\hat{U} | U \in \alpha\}$ и далее $\text{COV}_Y(X) = \{\alpha \in \text{Cov}(X) | \hat{\alpha} \in \text{Cov}(Y)\}$.

Следующие предложения 1 и 2 очевидны.

Предложение 1. Если пространство Y X -звезднокомпактно, то для любого покрытия $\alpha \in \text{COV}_Y(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$, для которого $ST_\alpha(A) \in \text{COV}_Y(X)$.

Предложение 2. Пусть $X \subset Y$, множества вида \hat{U} , где $U \subset X$, составляют базу топологии в пространстве Y , а для любого покрытия $\alpha \in \text{COV}_Y(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$ так, что $ST_\alpha(A) \in \text{COV}_Y(X)$. Тогда пространство Y X -звезднокомпактно.

Непосредственно из теорем 3, 4 и предложений 1, 2 вытекает приведенное ниже следствие.

Следствие 1. Пусть $X \subset_{\omega\text{-dense}} Y$, Y хаусдорфово и множества вида \hat{U} , где $U \subset X$, составляют базу топологии в Y . Пространство Y тогда и только тогда счетно-компактно, когда для любого покрытия $\alpha \in \text{COV}_Y(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$ таким образом, что $ST_\alpha(A) \in \text{COV}_Y(X)$.

Насыщение и его счетнокомпактность

Рассматриваем те же пространства X и Y , $X \subset Y$.

Определение 2 [11]. Скажем, что пространство X относительно счетно-компактно в Y , если любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет в Y предельную точку.

Определение 3 [7]. Пространство Y назовем насыщением пространства X , если $X \subset_{dense} Y$, X относительно счетно-компактно в Y и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто и в Y .

Отметим, что если Y – насыщение для X и $A \subset X$, то $[A]_Y$ – насыщение для A .

Рассмотрим далее волмэновское компактное расширение ωX пространства X . Напомним, что на рост $X^* = \omega X \setminus X$ составляют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых в X множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры и базу топологии в ωX образуют множества вида $W(U) = U \cup \{\xi \in X^* | U \supset F \text{ для некоторого } F \in \xi\}$, где $U \subset X$ (подробнее см. [12, с. 272]). Отметим, что $W(U) = \bigcup_{op} \{G \subset \omega X | G \cap X = U\}$, и если $F \subset X$ и $F \subset_{cl} U \subset X$, то $[F]_{\omega X} = F \cup \{\xi \in X^* | F \in \xi\}$ и $[F]_{\omega X} \subset W(U)$. Также отметим выполнение соотношений $W(U_1 \cup \dots \cup U_n) = W(U_1) \cup \dots \cup W(U_n)$ и $[F_1 \cap \dots \cap F_n]_{\omega X} = [F_1]_{\omega X} \cap \dots \cap [F_n]_{\omega X}$, где $U_i \subset X$, $F_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$ (см. там же). И наконец, для $F \subset X$ обозначим $F^* = [F]_{\omega X} \setminus F = \{\xi \in X^* | F \in \xi\}$.

Далее через Δ обозначим семейство всех дискретов в X , т. е. счетных дискретных (как подпространство) замкнутых в X множеств. Подсемейство $\beta \subset \Delta$ назовем Δ -базой (семейства Δ), если для любого $A \in \Delta$ можно выбрать $B \in \beta$ такое, что $B \subset A$. Зафиксируем некоторую Δ -базу β и положим $Y_\beta = X \cup$

$\cup \{ \xi \in X^* \mid \xi \cap \beta \neq \emptyset \}$. Ясно, что $X \subset Y_\beta \subset \omega X$, $Y_\beta = X \cup \left(\cup \{ A^* \mid A \in \beta \} \right)$ и $W(U) \cap Y_\beta = \hat{U}$ для любого $U \subset X$ (здесь, как и выше, $\hat{U} = \cup \left\{ G \subset Y_\beta \mid G \cap X = U \right\}$). Отметим также, что если β_1 и β_2 – Δ -базы и $\beta_1 \subset \beta_2$, то $Y_{\beta_1} \subset Y_{\beta_2} \subset Y_\Delta$.

Предложение 3. *Пространство Y_β – насыщение для пространства X , причем выполняются условия:*

- 1) $X \underset{\omega\text{-dense}}{\subset} Y_\beta$;
- 2) множества \hat{U} , где $U \subset X$, образуют базу топологии в Y_β ;
- 3) если $A \in \beta$, то $[A]_{Y_\beta} = [A]_{\omega X}$ и $[A]_{Y_\beta}$ компактно;
- 4) если $F \subset X$ и $F \subset U \subset X$, то $[F]_{Y_\beta} \subset \hat{U}$;
- 5) если $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, то $\hat{U} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$, если $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$, то $[F]_{Y_\beta} = [F_1]_{Y_\beta} \cap \dots \cap [F_n]_{Y_\beta}$, где $U_i \subset X$, $F_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$;
- б) если X регулярно, то Y_β хаусдорфово.

Доказательство следует непосредственно из построения. Остановимся кратко лишь на п. 6. Достаточно рассмотреть ультрафильтры $\xi, \psi \in Y_\beta \setminus X$, $\xi \neq \psi$. Свойства ультрафильтров (см. [12, с. 271]) позволяют выбрать дизъюнктные множества $F_1 \in \xi$ и $F_2 \in \psi$. Пусть $A \in \xi \cap \beta$ и $B \in \psi \cap \beta$. Обозначим $A' = A \cap F_1$, $B' = B \cap F_2$. Очевидно, что A' и B' дизъюнктны, $A' \in \xi$, $B' \in \psi$ и $A' \cup B' \in \Delta$. Если пространство X регулярно, то любой дискрет из Δ (в частности, $A' \cup B'$) можно раздуть до дизъюнктного семейства окрестностей его точек. Таким образом, для A' и B' найдутся дизъюнктные окрестности U и V , $A' \subset U \subset X$ и $B' \subset V \subset X$. Имеем далее $\xi \in [A']_{Y_\beta} \subset \hat{U}$, $\psi \in [B']_{Y_\beta} \subset \hat{V}$ (см. п. 4) и $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$. Предложение доказано.

Перейдем к вопросу о счетнокомпактности насыщения Y_β .

Определение 4. Покрытие $\alpha \in \text{Cov}(X)$ назовем β -крупным, если любой дискрет $A \in \beta$ покрывается конечным числом элементов α . Семейство всех β -крупных покрытий обозначим $BCov_\beta(X)$.

Лемма. *Покрытие $\alpha \in \text{Cov}(X)$ является β -крупным тогда и только тогда, когда $\alpha \in COV_{Y_\beta}(X)$ (т. е. $BCov_\beta(X) = COV_{Y_\beta}(X)$).*

Доказательство. Сначала докажем *необходимость*. Пусть $\alpha \in BCov_\beta(X)$ и $\xi \in Y_\beta \setminus X$. Выберем дискрет $A \in \xi \cap \beta$, затем множества $U_1, \dots, U_n \in \alpha$, покрывающие A . Имеем $A \subset U$, где $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, откуда $\xi \in [A]_{Y_\beta} \subset \hat{U}$ (см. предложение 3, п. 4). Но $\hat{U} = \hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n$ (см. предложение 3, п. 5), а следовательно, $\xi \in \hat{U}_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$. Итак, $\alpha \in COV_{Y_\beta}(X)$.

Докажем *достаточность*. Пусть $\alpha \in COV_{Y_\beta}(X)$ и $A \in \beta$. Поскольку множество $[A]_{Y_\beta}$ компактно (см. предложение 3, п. 3), то можно выбрать множества $U_1, \dots, U_n \in \alpha$ такие, что $\hat{U}_1 \cup \dots \cup \hat{U}_n \supset [A]_{Y_\beta}$. Но тогда $U_1 \cup \dots \cup U_n \supset A$. Таким образом, $\alpha \in BCov_\beta(X)$. Лемма доказана.

Из следствия 1, предложения 3 и леммы вытекает приведенная ниже теорема.

Теорема 5. *Пусть пространство X регулярно. Насыщение Y_β счетно-компактно тогда и только тогда, когда для любого покрытия $\alpha \in BCov_\beta(X)$ можно выбрать конечное множество $A \subset X$ так, что $ST_\alpha(A) \in BCov_\beta(X)$.*

Остановимся более подробно на отделимости пространства Y_β .

Определение 5 [13]. Пространство X называют δ -хаусдорфовым, если оно хаусдорфово и из любого множества $A \in \Delta$ можно выделить бесконечное подмножество $B \subset A$, допускающее раздутие до дискретного семейства $\{U_b \mid b \in B\}$, где $b \in U_b \subset X$, $b \in B$.

Напомним некоторые схожие определения. В [14] пространство X названо хорошо отделимым (*well separated*), если любое множество $A \in \Delta$ допускает раздутие до локально конечного семейства $\{U_a \mid a \in A\}$, где $a \in U_a \subset X$, $a \in A$. Чуть позже в [6] появилось определение свойства *ss-дискретности* (*ss-discrete property*), а именно: пространство X имеет это свойство, если из любого множества $A \in \Delta$ можно выбрать бесконечное подмножество $B \subset A$, допускающее раздутие до локально конечного семейства $\{U_b \mid b \in B\}$, где $b \in U_b \subset X$, $b \in B$. Очевидно, что все хорошо отделимые, а также все δ -хаусдорфовы пространства обладают свойством *ss-дискретности*. В [6] приведен пример вполне регулярного пространства

со свойством ss -дискретности, которое не является хорошо отделимым. Несложно проверить, что в классе регулярных пространств свойства ss -дискретности и δ -хаусдорфовости равносильны.

Через δ обозначим семейство всех дискретов $A \in \Delta$, допускающих раздутие до дискретного семейства окрестностей своих точек, Δ -базу β назовем δ -базой, если $\beta \subset \delta$. Отметим, что если пространство X δ -хаусдорфово, то из любой Δ -базы можно выбрать δ -базу и само семейство δ является одной из Δ -баз. И обратно, если X хаусдорфово и хотя бы одна Δ -база является δ -базой, то X δ -хаусдорфово.

Следующее предложение дополняет п. 6 из предложения 3.

Предложение 4. Если насыщение Y_β регулярно (для некоторой Δ -базы β), то X δ -хаусдорфово и $\beta \subset \delta$ (т. е. β является δ -базой). Обратно, если X регулярно и δ -хаусдорфово, то Y_β регулярно для любой δ -базы β .

Доказательство фактически содержится в [15, лемма 2, теорема 5].

Предложение 5. Пусть X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Тогда и Y_β вполне регулярно для любой δ -базы β .

Доказательство. Ограничимся рассмотрением точки $\xi \in Y_\beta \setminus X$. Пусть $\xi \in \hat{U}$, где $U \subset X$. Покажем, что существует функция $\varphi \in C(Y_\beta, I)$ такая, что $\varphi(\xi) = 1$ и $\varphi(y) = 0$ при $y \in Y_\beta \setminus \hat{U}$. В силу op -устройства Y_β можно выбрать дискрет $A \in \xi \cap \delta$ такой, что $A \subset U$. Раздуем A до дискретного семейства окрестностей $U_a, a \in U_a \subset X, a \in A$. Можно считать, что $U_a \subset U$ для всех $a \in A$. Далее для каждой точки $a \in A$ зафиксируем функцию $f_a \in C(X, I), f_a(a) = 1, f_a(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_a$, и положим $f(x) = \max \{f_a(x) | a \in A\}$. Легко проверить, что $f \in C(X, I), f(A) = \{1\}$ и $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus U$. Функция f однозначно продолжается до функции $F \in C(\omega X, I)$ (см. [12, с. 272]), для которой имеем $F(\xi) \in F([A]_{\omega X}) = \{1\}, F(z) = 0$ при $z \in \omega X \setminus W(U)$. Осталось положить $\varphi = F|_{Y_\beta}$. Предложение доказано.

ω-Насыщение пространства X

Возвращаемся к пространствам X и $Y, X \subset Y$.

Определение 6. Пусть β – Δ -база и выполняются условия:

а) для любой точки $z \in Y \setminus X$ найдется дискрет $A \in \beta$ такой, что $z \in [A]_Y$, и обратно, $[A]_Y \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$ для любого $A \in \beta$;

б) если $B \subset A \in \beta$ и $B \subset U \subset X$, то $[B]_Y \subset \hat{U}$ (или, другими словами, если $A \in \beta$ и $F \subset_{cl} X$, то $[F]_Y \cap [A \setminus F]_Y = \emptyset$);

в) множества вида \hat{U} , где $U \subset X$, образуют базу топологии пространства Y .

Тогда пространство Y назовем ω -насыщением (или насыщением типа ω) для пространства X , а Δ -базу β – ω -допустимой для Y . Если Y является ω -насыщением и для некоторой ω -допустимой Δ -базы β компактны все множества $[A]_Y$, где $A \in \beta$, то Y назовем Ω -насыщением (или насыщением типа Ω) для X , а Δ -базу β – Ω -допустимой.

Замечание. Любое ω -насыщение является насыщением. Действительно, в силу условия а пространство X относительно счетно-компактно в Y , а в силу условия б любое замкнутое в X счетно-компактное множество замкнуто и в Y . Отметим также, что при регулярности пространства Y условие в выполняется автоматически.

Очевидно, что все рассмотренные в предыдущем разделе насыщения вида Y_β являются Ω -насыщениями и любая Δ -база β Ω -допустима для Y_β . Докажем, что в определенном смысле верно и обратное. Для этого зафиксируем произвольное ω -насыщение Y (для X), ω -допустимую (для Y) Δ -базу β и определим каноническое (т. е. тождественное на X) вложение $j: Y \rightarrow \omega X$ (т. е. $Y \rightarrow j(Y)$ – гомеоморфизм) следующим образом. Положим $j(x) = x$ при $x \in X$. Для $z \in Y \setminus X$ зафиксируем $A \in \beta$ такое, что $z \in [A]_Y$, и рассмотрим множество $\kappa(z, A) = \bigcap \left\{ [A \cap O]_{\omega X} \mid z \in O \subset_{op} Y \right\}$. Ясно, что $\emptyset \neq \kappa(z, A) \subset X^*$.

Пусть $\xi \in \kappa(z, A)$. Допустим, что $\xi' \in \kappa(z, A)$ и $\xi' \neq \xi$. Выберем $F \in \xi$ и $F' \in \xi'$ так, чтобы $F \cap F' = \emptyset$ (свойства ультрафильтров см. в [12, с. 271]). Поскольку $F \cap A \cap O \neq \emptyset$ и $F' \cap A \cap O \neq \emptyset$ для любой окрестности O точки z , то $z \in [F \cap A]_Y$ и $z \in [F' \cap A]_Y$, что невозможно (см. условие б в определении б).

Таким образом, $\kappa(z, A) = \{\xi\}$. Если $z \in [B]_Y$, где $B \in \beta$, и $\kappa(z, B) = \{\xi'\}$, то, рассуждая аналогичным образом, получаем $\xi = \xi'$. Итак, множество $\kappa(z, A)$ одноточечно и не зависит от выбора A . Полагаем $j(z) = \xi$. Отображение $j: Y \rightarrow \omega X$ определено. Проверим инъективность. Пусть $z, z' \in Y \setminus X, z \neq z'$,

$z \in [A]_Y$, $z' \in [B]_Y$, где $A, B \in \beta$, $j(z) = \xi$, $j(z') = \xi'$, и допустим, что $\xi = \xi'$. Но тогда, как несложно заметить, $z \in [A \cap B \cap O \cap O']_Y$ и $z' \in [A \cap B \cap O \cap O']_Y$ для любых окрестностей O точки z и O' точки z' . Выберем окрестность \hat{U} точки z , где $U \subset X$, так, чтобы $z' \notin \hat{U}$ (см. условие ϵ в определении б), и обозначим $C = A \cap U$. Имеем $z' \in [C]_Y$ (см. выше). С другой стороны, $C \subset U$, а следовательно, $[C]_Y \subset \hat{U}$ (см. условие б в определении б), что противоречит соотношению $z' \notin \hat{U}$. Инъективность проверена. Для доказательства непрерывности j и $j^{-1}: j(Y) \rightarrow Y$ достаточно показать, что если $z \in Y \setminus X$ и $j(z) = \xi$, то соотношения $z \in \hat{U}$ и $\xi \in W(U)$ равносильны для произвольного $U \subset X$. Зафиксируем дискрет $A \in \beta$, для которого $z \in [A]_Y$. Пусть $\xi \in W(U)$. Тогда $F \cap A \cap O \subset U$ для некоторых $F \in \xi$ и окрестности O точки z , а следовательно, $z \in [F \cap A \cap O]_Y \subset \hat{U}$. И обратно, пусть $z \in \hat{U}$. Тогда $\hat{U} \cap A = U \cap A \in \xi$, откуда $\xi \in W(U)$. Итак, отображение $j: Y \rightarrow j(Y)$ – гомеоморфизм, причем, как легко заметить, $j(Y) \subset Y_\beta$. Если же Y – Ω -насыщение и Δ -база β Ω -допустима, то $j(Y) = Y_\beta$, поскольку $j([A]_Y) = [A]_{\omega X}$ при $A \in \beta$, что вытекает из непрерывности j и того факта, что $[F]_{\omega X}$ и ωF канонически гомеоморфны для любого $F \subset X$ [11, с. 70]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Для любого ω -насыщения Y пространства X с ω -допустимой Δ -базой β существует каноническое вложение пространства Y в Y_β , причем если Y – Ω -насыщение, а Δ -база β Ω -допустима, то Y и Y_β канонически гомеоморфны.

Учитывая предложение 4, получаем приведенное ниже следствие.

Следствие 2. Любое пространство, допускающее регулярное насыщение типа Ω , является δ -хаусдорфовым.

Счетнокомпактификация типа Ω

По-прежнему рассматриваем пространства X и Y , $X \subset Y$. Напомним следующее определение.

Определение 7 [4]. Пространство Y называют счетнокомпактификацией пространства X , если $X \subset_{dense} Y$, Y вполне регулярно и счетно-компактно и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто в Y .

Проведенные нами рассуждения служат достаточной мотивацией выделения в отдельный тип счетнокомпактификаций, являющихся Ω -насыщениями.

Определение 8. Пространство Y назовем счетнокомпактификацией типа Ω для пространства X , если Y – вполне регулярное счетно-компактное Ω -насыщение пространства X .

Отметим, что если описанное в определении 8 пространство Y существует, то в силу теоремы 6 и предложения 4 можно считать, что $Y = Y_\beta$, где β – некоторая Δ -база, пространство X δ -хаусдорфово и β является δ -базой. С другой стороны, если X вполне регулярно и δ -хаусдорфово, а β – δ -база, то Y_β вполне регулярно (см. предложение 5).

Итак, вопрос о существовании счетнокомпактификации типа Ω свелся к вопросу о счетнокомпактности Y_β , где β – некоторая δ -база, а пространство X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Теорема 5 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 7. Пусть пространство X вполне регулярно и δ -хаусдорфово. Пространство X допускает счетнокомпактификацию типа Ω тогда и только тогда, когда для некоторой δ -базы β выполняется условие: для любого покрытия $\alpha \in BCov_\beta(X)$ существует конечное множество $A \subset X$ такое, что $ST_\alpha(A) \in BCov_\beta(X)$.

В завершение приведем сравнительно простой, но достаточно интересный пример, использующий стоун-чеховскую (она же волмэновская) компактификацию натурального ряда \mathbb{N} .

Пример. Положим $X = \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторый ультрафильтр $\xi_0 \in \mathbb{N}^*$ и рассмотрим Δ -базы $\beta = \Delta \setminus \xi_0$ (здесь ξ_0 понимается как семейство множеств в \mathbb{N}) и Δ , а также соответствующие Ω -насыщения $Y_\beta = \omega\mathbb{N} \setminus \{\xi_0\}$ и $Y_\Delta = \omega\mathbb{N}$. Имеем: Y_Δ компактно, в то время как Y_β счетно-компактно, но не компактно (см. [12, с. 309]). Далее зафиксируем счетные множества $S_i \subset \mathbb{N}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \mathbb{N}$ и $S_i \cap S_j = \emptyset$ при

$i \neq j$, и обозначим $\gamma_0 = \{A \in \Delta \mid A \subset S_i \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N}\}$, $\gamma_1 = \{A \in \Delta \mid |A \cap S_i| \leq 1 \text{ для любого } i \in \mathbb{N}\}$, $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, $K_0 = \{\xi \in \mathbb{N}^* \mid \xi \cap \gamma_0 \neq \emptyset\}$ и $K_1 = \{\xi \in \mathbb{N}^* \mid \xi \cap \gamma_1 \neq \emptyset\}$. Простая проверка показывает, что

γ - Δ -база, $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $Y_\gamma = \mathbb{N} \cup K_0 \cup K_1$. Докажем, что Ω -насыщение Y_γ не счетно-компактно. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ зафиксируем ультрафильтр $\xi_i \in S_i^*$. Множество $D = \{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ замкнуто в $\mathbb{N} \cup K_0$ и дискретно. Пусть $\xi \in K_1$ и $A \in \xi \cap \gamma_1$. Рассмотрим окрестность $W(A)$ ультрафильтра ξ . Допустим, что $\xi_i \in W(A)$. Но тогда $A \in \xi_i$ и в то же время $S_i \in \xi_i$, откуда $A \cap S_i \in \xi_i$, что невозможно, поскольку $|A \cap S_i| \leq 1$. Таким образом, D бесконечно и не имеет в Y_γ предельной точки, откуда следует, что Y_γ не счетно-компактно. Итак, уже при $X = \mathbb{N}$ для Ω -насыщения реализуются три возможности: быть компактификацией, являться не компактной счетнокомпактификацией типа Ω , не быть счетно-компактным. И наконец, построим для \mathbb{N} счетно-компактное ω -насыщение Y , которое не является Ω -насыщением. Для каждого дискрета $A \in \Delta$ зафиксируем некоторый ультрафильтр $\xi_A \in A^*$ и обозначим $D = \{\xi_A \mid A \in \Delta\}$. Поскольку $|D| \leq |\Delta| = \mathfrak{c}$ (\mathfrak{c} – мощность континуума), а для любого дискрета A мощность $|A^*| = |[A]_{\omega\mathbb{N}}| = |\omega\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$ (см. [12, с. 268]), то $\emptyset \neq A^* \setminus D \neq A^*$. Полагая $Y = \omega\mathbb{N} \setminus D$, получаем ω -насыщение (для \mathbb{N}), для которого никакой Ω -допустимой Δ -базы не существует. В качестве ω -допустимой Δ -базы, очевидно, подходит само семейство Δ . Проверим счетнокомпактность пространства Y . Пусть $M \subset Y$ и M счетно. Ясно, что $[M]_Y = [M]_{\omega\mathbb{N}} \setminus D$. А поскольку $[M]_{\omega\mathbb{N}} = 2^{\mathfrak{c}}$ (см. [12, с. 269]), то $[M]_Y \neq M$, что показывает существование в Y предельных точек для M .

Библиографические ссылки

1. Архангельский АВ. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. *Математический сборник*. 1965;67(1):55–88.
2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382.
3. Nagata Jun-iti. A note on M-spaces and topologically complete spaces. *Proceedings of the Japan Academy*. 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
4. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
5. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. *Set-Theoretic Topology*. 1977:81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
6. Isiwata T. On closed countably-compactifications. *General Topology and its Applications*. 1974;4(2):143–167. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90017-8.
7. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Морита. *Доклады Академии наук БССР*. 1977;21(9):777–780.
8. Левин МА, Тимохович ВЛ. М-пространства и сильная счетнокомпактифицируемость. *Доклады Академии наук БССР*. 1979;23(3):213–216.
9. Fleischman WM. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae*. 1970;67(1):1–9.
10. van Douwen EK, Reed GM, Roscoe AW, Tree IJ. Star covering properties. *Topology and its Applications*. 1991;39(1):71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y.
11. Архангельский АВ. Компактность. В: *Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 50*. Москва: ВИНТИ; 1989. с. 5–128.
12. Энгелькинг Р. *Общая топология*. Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.
13. Куркак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2001;1:51–55.
14. Hansard JD. Function space topologies. *Pacific Journal of Mathematics*. 1970;35(2):381–388.
15. Фролова ДС. О секвенциально собственных топологиях пространства отображений. *Труды Института математики*. 2013;21(1):102–108.

References

1. Arkhangel'skii AV. [One class of spaces containing all metric and all locally compact spaces]. *Matematicheskii sbornik*. 1965; 67(1):55–88. Russian.
2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen*. 1964;154(4):365–382.
3. Nagata Jun-iti. A note on M-spaces and topologically complete spaces. *Proceedings of the Japan Academy*. 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
4. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A*. 1973;12(313/328):7–15.
5. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. *Set-Theoretic Topology*. 1977:81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
6. Isiwata T. On closed countably-compactifications. *General Topology and its Applications*. 1974;4(2):143–167. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90017-8.
7. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturation of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 1977; 21(9):777–780. Russian.
8. Levin MA, Timokhovich VL. [M-spaces and the strong countably-compactifiability]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 1979; 23(3):213–216. Russian.

9. Fleischman WM. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae*. 1970;67(1):1–9.
10. van Douwen EK, Reed GM, Roscoe AW, Tree IJ. Star covering properties. *Topology and its Applications*. 1991;39(1):71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y.
11. Arkhangel'skii AV. [Compactness]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. Tom 50* [Results of science and technology. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental directions. Volume 50]. Moscow: VINITI; 1989. p. 5–128. Russian.
12. Engelking R. *General topology*. Warszawa: Polish Scientific Publishers; 1977. 626 p.
Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.
13. Kukrak GO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2001;1:51–55. Russian.
14. Hansard JD. Function space topologies. *Pacific Journal of Mathematics*. 1970;35(2):381–388.
15. Frolova DS. On the family of sequentially proper topologies on the space of maps. *Trudy Instituta matematiki*. 2013;21(1):102–108. Russian.

Статья поступила в редколлегию 12.02.2021.
Received by editorial board 12.02.2021.