О СВОЙСТВАХ h -ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. ПАВЛОВСКИЙ¹⁾, И. Л. ВАСИЛЬЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследования в области теории функций h -комплексной переменной представляют интерес в связи с имеющимися приложениями в неевклидовой геометрии, теоретической механике и т. д. Изучены свойства h -дифференцируемых функций. Найдены критерии h -дифференцируемости и h -голоморфности, сформулирована и доказана теорема о конечных приращениях для h -голоморфной функции. Приведены достаточные условия h -аналитичности, сформулирована и доказана теорема единственности для h -аналитических функций.

Ключевые слова: кольцо h -комплексных чисел; делители нуля; h -дифференцируемость; h -голоморфность; h -аналитичность; конечные приращения функции; нули функции; ряд Тейлора.

ON PROPERTIES OF h -DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

V. A. PAVLOVSKY^a, I. L. VASILIEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. A. Pavlovsky (pavlad95@gmail.com)

Research in the theory of functions of an h -complex variable is of interest in connection with existing applications in non-Euclidean geometry, theoretical mechanics, etc. This article is devoted to the study of the properties of h -differentiable functions. Criteria for h -differentiability and h -holomorphy are found, formulated and proved a theorem on finite increments for an h -holomorphic function. Sufficient conditions for h -analyticity are given, formulated and proved a uniqueness theorem for h -analytic functions.

Keywords: ring of h -complex numbers; zero divisors; h -differentiability; h -holomorphy; h -analyticity; finite increments of a function; zeros of a function; Taylor series.

Множество h -комплексных чисел

Пусть $\mathbb{C}_h$ – множество всех h -комплексных (двойных) чисел [1–7], т. е. множество упорядоченных пар вещественных чисел, на котором заданы операции сложения и умножения $\forall z_1 = (a; b), z_2 = (c; d) \in \mathbb{C}_h$ по правилам:

- 1) $z_1 + z_2 = (a + c; b + d)$;
- 2) $z_1 \cdot z_2 = (ac + bd; ad + bc)$.

Образец цитирования:

Павловский ВА, Васильев ИЛ. О свойствах h -дифференцируемых функций. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021;2:29–37. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-29-37>

For citation:

Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On properties of h -differentiable functions. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021;2:29–37. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-29-37>

Авторы:

Владислав Андреевич Павловский – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – И. Л. Васильев.

Игорь Леонидович Васильев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Authors:

Vladislav A. Pavlovsky, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics. pavlad95@gmail.com

Igor L. Vasiliev, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics. vassilyevi@bsu.by

Вещественную единицу отождествим с h -комплексным числом $(1; 0)$. Гиперболической единицей назовем h -комплексное число $j = (0; 1)$. Тогда любое число из $\mathbb{C}_h$ может быть представлено в алгебраической форме:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1) = a + jb = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Hyp} z,$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа z , а $b = \operatorname{Hyp} z$ – гиперболическая часть числа z .

Как показано в работе [6], множество h -комплексных чисел $\mathbb{C}_h$ есть кольцо с делителями нуля, каковыми являются числа вида $a \pm aj$. Особо стоит отметить случай, когда $a = \frac{1}{2}$. Тогда делители нуля обладают следующими свойствами:

$$\bullet \left(\frac{1 \pm j}{2} \right)^n = \frac{1 \pm j}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

• числа $\frac{1 \pm j}{2}$ образуют базис в $\mathbb{C}_h$, т. е. любое h -комплексное число $a + jb$ можно однозначно представить в виде

$$a + jb = (a + b) \frac{1 + j}{2} + (a - b) \frac{1 - j}{2}.$$

Норму элемента $z = a + jb$ в кольце $\mathbb{C}_h$ определим следующим образом: $\|z\| = |a| + |b|$, а модулем h -комплексного числа назовем, как обычно, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Приведем свойства нормы:

- 1) $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- 2) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| = \|z\| \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} |z|$;
- 3) $\|\alpha z\| = |\alpha| \cdot \|z\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- 4) $\|z_1 \cdot z_2\| \leq \|z_1\| \cdot \|z_2\| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_h$;
- 5) $\|z^n\| = \|z\|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- 6) $\frac{1}{\|z\|} \leq \left\| \frac{1}{z} \right\|$.

На множестве $\mathbb{C}_h$ топология вводится с помощью вышеуказанной нормы.

h -Дифференцируемость функций

Пусть D – область в $\mathbb{C}_h$, а $f: D \rightarrow \mathbb{C}_h$.

Определение 1. Функция f называется h -дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует такое число $k \in \mathbb{C}_h$, что

$$f(z + h) - f(z) = kh + \alpha(h)h, \quad (1)$$

где $h \in D$ не является делителем нуля, причем $z + h \in D$, а $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$, k не зависит от h .

Определение 2. Производной функции f h -комплексного аргумента $z \in D$ называется выражение вида

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}, \quad (2)$$

где $h \in \mathbb{C}_h$ не является делителем нуля. Предел берется по норме из $\mathbb{C}_h$.

Производные суммы, разности, произведения, частного от деления и композиции функций вычисляются по тем же формулам, что и в классическом анализе, при условии, что они определены.

Теорема 1. Функция $f(z)$ h -дифференцируема в точке $z \in D$ тогда и только тогда, когда выполняется (2).

Доказательство проводится так же, как и в случае аналитической функции комплексного переменного, при этом $f'(z) = k$ из (1).

Любая h -комплексная функция $f(z) = f(x + jy)$ представима в алгебраической форме:

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Теорема 2. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ определена в окрестности точки $z = x + jy$, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) функция $f(z)$ h -дифференцируема в точке z ;
- 2) в точке (x, y) верны равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Доказательство. Покажем, что из первого утверждения следует второе. Пусть $h = s + jt$,

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Положим $t = 0$. В этом случае

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + j \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть $s = 0$, тогда

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{jt} + j \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{jt} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial u}{\partial y},$$

следовательно, верны равенства (3).

Теперь покажем, что из второго утверждения следует первое. Пусть верны равенства (3), тогда

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= [u(x+s, y+t) - u(x, y)] + j[v(x+s, y+t) - v(x, y)] = \\ &= (u'_x s + u'_y t + \alpha(h)h) + j(v'_x s + v'_y t + \beta(h)h) = u'_x(s+jt) + \\ &+ jv'_x(s+jt) + (\alpha(h) + j\beta(h))h = (u'_x + jv'_x)h + \gamma(h)h, \end{aligned}$$

где $\gamma(h) = \alpha(h) + j\beta(h)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = 0$, следовательно, функция $f(z)$ h -дифференцируема,

$$f'(z) = u'_x + jv'_x = v'_y + ju'_y.$$

Теорема доказана.

Замечание. Равенства (3) являются аналогом условий Коши – Римана.

h -Голоморфность функций

Определение 3. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется h -голоморфной в точке $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$, если в некоторой окрестности этой точки функции u и v имеют непрерывные вторые частные производные и выполнены условия (3).

Введем обозначение $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + jy \in D\}$ и далее будем считать, что функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в D^* .

Теорема 3. Функция f является h -голоморфной в точке $z \in D$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} f(x-y). \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Пусть выполнены условия (3), тогда функции u и v удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Положим $\xi = \frac{1}{2}(x + y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x - y)$. В этом случае

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} x'_\xi + \frac{\partial u}{\partial y} y'_\xi = u'_x + u'_y, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} x'_\eta + \frac{\partial u}{\partial y} y'_\eta = u'_x - u'_y. \end{cases}$$

Смешанные производные функций u и v равны нулю:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Таким образом, уравнения (5) равносильны следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (5a)$$

Аналогично получаем уравнения для функции v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (5b)$$

Найдем общее решение уравнений (5a) и (5b):

$$\begin{aligned} u'_\xi &= \mu^*(\xi), \\ u(\xi, \eta) &= \int \mu^*(\xi) d\xi = \tilde{\mu}(\xi) + \tilde{\psi}(\eta) = \\ &= \tilde{\mu}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tilde{\psi}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\mu(x+y) + \psi(x-y)\}, \\ v'_\xi &= \varphi^*(\xi), \\ v(\xi, \eta) &= \int \varphi^*(\xi) d\xi = \tilde{\varphi}(\xi) + \tilde{v}(\eta) = \\ &= \tilde{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tilde{v}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+y) + v(x-y)\}. \end{aligned}$$

Из уравнений

$$u'_x = v'_y, \quad v'_x = u'_y$$

вытекает

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\{\mu'(x+y) + \psi'(x-y)\} = \frac{1}{2}\{\varphi'(x+y) - v'(x-y)\}, \\ \frac{1}{2}\{\mu'(x+y) - \psi'(x-y)\} = \frac{1}{2}\{\varphi'(x+y) + v'(x-y)\}, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{cases} \mu'(x+y) = \varphi'(x+y), & \mu(x+y) = \varphi(x+y) + \alpha, \\ \psi'(x-y) = v'(x-y), & \psi(x-y) = v(x-y) + \beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \psi(x-y) + \alpha\}, \\ v(x, y) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+y) - \psi(x-y) + \beta\}. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y), & f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0), \\ \bar{f}(z) = \bar{f}(x + jy) = u(x, y) - jv(x, y), & \bar{f}(x) = u(x, 0) - jv(x, 0), \end{cases}$$

из этого следует, что

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{2}\{f(x) + \bar{f}(x)\}, & u(x, 0) = \frac{1}{2}\{\varphi(x) + \psi(x) + \alpha\}, \\ v(x, 0) = \frac{1}{2}\{f(x) - \bar{f}(x)\}, & v(x, 0) = \frac{1}{2}\{\varphi(x) - \psi(x) + \beta\}, \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} \varphi(x) = u(x, 0) + v(x, 0) - \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \psi(x) = u(x, 0) - v(x, 0) - \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \bar{f}(x)) + \frac{j}{2}(f(x) - \bar{f}(x)) - \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \bar{f}(x)) - \frac{j}{2}(f(x) - \bar{f}(x)) - \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \varphi(x) = \frac{1+j}{2}f(x) + \frac{1-j}{2}\bar{f}(x) - \frac{\alpha + \beta}{2}, \\ \psi(x) = \frac{1-j}{2}f(x) + \frac{1+j}{2}\bar{f}(x) - \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \psi(x-y) + \alpha\} + \frac{j}{2}\{\varphi(x+y) - \psi(x-y) + \beta\}, \\ f(z) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1+j}{2}f(x+y) + \frac{1-j}{2}\bar{f}(x+y) - \frac{\alpha + \beta}{2} + \alpha + \frac{1+j}{2}f(x-y) + \frac{1-j}{2}\bar{f}(x-y) - \frac{\alpha - \beta}{2}\right\} + \\ &+ \frac{j}{2}\left\{\frac{1+j}{2}f(x+y) + \frac{1-j}{2}\bar{f}(x+y) - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1+j}{2}f(x-y) - \frac{1-j}{2}\bar{f}(x-y) + \frac{\alpha - \beta}{2} + \beta\right\} = \\ &= \frac{1+j}{4}f(x+y) + \frac{1-j}{4}\bar{f}(x+y) + \frac{1-j}{4}f(x-y) + \frac{1+j}{4}\bar{f}(x-y) + \frac{1+j}{4}f(x+y) - \\ &- \frac{1-j}{4}\bar{f}(x+y) + \frac{1-j}{4}f(x-y) - \frac{1+j}{4}\bar{f}(x-y) = \frac{1+j}{2}f(x+y) + \frac{1-j}{2}f(x-y). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство (4).

Обратно, пусть верно (4), тогда для функции $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ положим $y = 0$:

$$f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0),$$

тогда

$$\begin{cases} f(x+y) = u(x+y, 0) + jv(x+y, 0), \\ f(x-y) = u(x-y, 0) + jv(x-y, 0). \end{cases}$$

Используя равенство (4), представим функцию $f(z)$ в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+j}{2}[u(x+y, 0) + jv(x+y, 0)] + \frac{1-j}{2}[u(x-y, 0) + jv(x-y, 0)] = \\ &= \frac{1}{2}[u(x+y, 0) + v(x+y, 0) + u(x-y, 0) - v(x-y, 0)] + \\ &+ \frac{j}{2}[u(x+y, 0) + v(x+y, 0) - u(x-y, 0) + v(x-y, 0)] = u(x, y) + jv(x, y). \end{aligned}$$

В силу

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

получаем, что теорема доказана.

Теорема 4. Пусть функция f h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$ с кусочно-гладким краем ∂D и непрерывна в замыкании $\bar{D} = D \cup \partial D$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z) dz &= \int_{\partial D} [u(x, y) + jv(x, y)](dx + jdy) = \\ &= \int_{\partial D} u(x, y) dx + v(x, y) dy + j \int_{\partial D} u(x, y) dy + v(x, y) dx, \end{aligned}$$

используя формулу Грина, получаем

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + j \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Теорема доказана.

Далее нам понадобится следующая теорема вещественного анализа, которая выводится из второй теоремы о конечных приращениях [8].

Теорема 5 (о конечных приращениях для отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$). Пусть функция $F: \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ h -дифференцируема в точке $(a, b) \in \tilde{D}$. Тогда

$$\left| F(a + s, b + t) - F(a, b) \right| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} \left| F'(a + \xi s, b + \xi t) \right| \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$g(\tau) = F(a + \tau s, b + \tau t), \quad \tau \in [0, 1].$$

Имеем

$$\begin{aligned} g: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(0) = F(a, b), \quad g(1) = F(a + s, b + t), \\ g' &= F'(a + \tau s, b + \tau t) \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \langle g(\tau) | g(1) - g(0) \rangle, \\ G: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \quad G'(\tau) = \langle g'(\tau) | g(1) - g(0) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме Лагранжа следует, что

$$G(1) - G(0) = G'(\xi) \cdot 1, \quad \text{где } \xi \in [0, 1].$$

Используя неравенство Коши для скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} G(1) - G(0) &= \langle g(1) | g(1) - g(0) \rangle - \langle g(0) | g(1) - g(0) \rangle = \langle g(1) - g(0) | g(1) - g(0) \rangle = \\ &= |g(1) - g(0)|^2 = \langle g'(\xi) | g(1) - g(0) \rangle \leq \langle |g'(\xi)| | g(1) - g(0) \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|g(1) - g(0)| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} |g'(\xi)|.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству (6). Теорема доказана.

Представим функцию $F(x, y)$ в векторном виде: $F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$, тогда

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} u'_x(x, y) & u'_y(x, y) \\ v'_x(x, y) & v'_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Теперь из неравенства (6) и неравенства Коши – Буняковского получаем

$$\begin{aligned} |F(a+s, b+t) - F(a, b)| &= \left| \frac{u(a+s, b+t) - u(a, b)}{v(a+s, b+t) - v(a, b)} \right| = \left| \frac{\Delta u}{\Delta v} \right| = \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2} \leq \\ &\leq \max_{\xi \in [0,1]} \sqrt{(u'_x s + u'_y t)^2 + (v'_x s + v'_y t)^2} \leq \max_{\xi \in [0,1]} \sqrt{(|u'_x|^2 + |u'_y|^2 + |v'_x|^2 + |v'_y|^2)(s^2 + t^2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где все частные производные вычислены в точке $(a + \xi s, b + \xi t)$.

Пусть $f(z) = u(x, y) + jv(x, y) - h$ -голоморфная функция, тогда $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, следовательно,

$$f'(z) = u'_x + jv'_x = u'_x + ju'_y = v'_y + jv'_x = v'_y + ju'_y,$$

$$|f'(z)| = \sqrt{|u'_x|^2 + |v'_x|^2} \leq |u'_x| + |u'_y| = \|f'(z)\|,$$

$$\|f(z+h) - f(z)\| = \|\Delta u + j\Delta v\| = |\Delta u| + |\Delta v| \leq \sqrt{2} \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2}, \quad (8)$$

где $|h| = |s + jt| = \sqrt{s^2 + t^2} \leq |s| + |t| = \|h\|$.

Теорема 6 (о конечных приращениях для h -голоморфной функции). Пусть функция f h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$. Тогда

$$\|f(z+h) - f(z)\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \|f'(\zeta)\| \cdot \|h\|. \quad (9)$$

Доказательство. В силу неравенств (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} \|f(z+h) - f(z)\| &\leq \sqrt{2} \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2} \leq \\ &\leq \max_{\xi \in [0,1]} \sqrt{2 \left\{ |u'_x|^2 + |u'_y|^2 \right\} \{s^2 + t^2\}} \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f'(\zeta)| \cdot \|h\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \|f'(\zeta)\| \cdot \|h\|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

h -Аналитичность функций

Определение 4. Функция f называется h -аналитической в точке $z_0 \in D$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой f разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k \in \mathbb{C}_h. \quad (10)$$

Из определения вытекает, что h -аналитическая функция f бесконечно h -дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 , а ряд (10) есть ряд Тейлора функции f , т. е. $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Областью сходимости ряда (10) является открытый h -круг

$$G = \{ \|z - z_0\| < r \},$$

где $r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|c_k\|}}$.

Теорема 7. Пусть функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}_h$ является бесконечное число раз h -дифференцируемой в области $D \subset \mathbb{C}_h$,

$$\|f^{(n)}(z)\| \leq M e^{AR^m} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \{ \|z - z_0\| \leq R \} \subset D, \quad (11)$$

M, A, m – некоторые положительные константы. Тогда f разлагается в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad z_0 \in D,$$

равномерно сходящийся в круге $\|z - z_0\| \leq R$.

Доказательство. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = T_n(z, z_0) + r_n(z),$$

где $T_n(z, z_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$; $r_n(z)$ – остаточный член. Составим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(z) - T_n(z, t) = f(z) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (z - t)^k,$$

для нее имеем $F(z) = 0$, $F(z_0) = r_n(z)$. Продифференцируем $F(t)$ по переменной t :

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (z - t)^n.$$

В силу неравенства (9) и условия (11) получаем

$$\begin{aligned} \|r_n(z)\| &= \|F(z_0) - F(z)\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \|F'(\zeta)\| \cdot \|z_0 - z\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \left\| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (z - t)^n \right\| \cdot \|z_0 - z\| \leq \\ &\leq 2 \sup_{\zeta \in [z, z+h]} \frac{1}{n!} \|f^{(n+1)}(\zeta)\| \cdot \|(z - t)^n\| \cdot \|z_0 - z\| \leq \frac{2}{n!} Me^{AR^m} R^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

при условии $\|z - t\| \leq R$ и $\|z - z_0\| \leq R$. Отсюда выводим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k,$$

где ряд сходится равномерно в круге $\|z - z_0\| \leq R$. Теорема доказана.

Следствие. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано имеет вид

$$r_n(z) = o(\|z - z_0\|^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Определение 5. Функция f h -аналитична в области $D \in \mathbb{C}_h$, если она h -аналитична во всех точках этой области.

Пусть f h -аналитична в точке z_0 , следовательно, в окрестности точки z_0 имеем

$$f(z) = c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad (12)$$

где $c_k \neq 0$, $k \geq 0$.

Определение 6. Точка z_0 называется нулем порядка k функции f , если $k \geq 1$ в (12).

Из (12) вытекает представление

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \dots$, $\varphi(z)$ h -аналитична в окрестности точки z_0 , $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$. В силу непрерывности функции $\varphi(z)$ существует окрестность $U(z_0): \varphi(z) \neq 0 \forall z \in U(z_0)$. Если c_k не является делителем нуля, то существует окрестность $V(z_0)$ такая, что в этой окрестности $f(z)$ не имеет других нулей, кроме точки z_0 . Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 8 (теорема единственности для h -аналитических функций). Пусть f_1 и f_2 h -аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}_h$, $f_1(z_k) \equiv f_2(z_k)$, где $z_k \in D$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 \in D$, $(1 \pm j)(z_k - z_0) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $f_1(z) \equiv f_2(z)$ всюду в D .

Доказательство. Пусть $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. В некоторой окрестности $U(z_0)$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Имеем $f(z_k) = 0$, следовательно,

$$f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0,$$

тогда $c_0 = 0$. Отсюда получаем

$$f(z) = (z - z_0)(c_1 + c_2(z - z_0) + \dots) = (z - z_0)\varphi_1(z),$$

где $\varphi_1(z) = c_1 + c_2(z - z_0) + \dots$

Теперь

$$f(z_k) = (z_k - z_0)\varphi_1(z_k) = 0,$$

тогда $\varphi_1(z_k) = 0$ и $\varphi_1(z_0) = 0$, значит, $c_1 = 0$, следовательно,

$$\varphi_1(z) = c_2(z - z_0) + c_3(z - z_0)^2 + \dots = (z - z_0)(c_2 + c_3(z - z_0) + \dots) = (z - z_0)\varphi_2(z).$$

Поскольку

$$\varphi_1(z) = (z_k - z_0)\varphi_2(z) = 0,$$

то $\varphi_2(z_k) = 0$ и $\varphi_2(z_0) = 0$, а значит, $c_2 = 0$ и т. д., следовательно, $c_n = 0 \forall n$. Таким образом, $f(z) \equiv 0 \forall z \in U(z_0)$. Пусть $M \subset D$ – множество нулей функции f , $\overset{\circ}{M}$ – его внутренность, причем $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. Если $\overset{\circ}{M} = D$, то теорема доказана. В случае если $\overset{\circ}{M} \subsetneq D$, существует граничная точка d множества $\overset{\circ}{M}$, являющаяся внутренней точкой множества D . Также существует последовательность $d_n \in \overset{\circ}{M}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d,$$

причем $(1 \pm j)(d_n - d) \neq 0$,

$$f(d) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0,$$

следовательно, существует окрестность $V(d)$ такая, что $f(z) \equiv 0 \forall z \in V(d)$. Это противоречит тому, что d – граничная точка $\overset{\circ}{M}$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Antonuccio F. Semi-complex analysis and mathematical physics [Internet]. 2008 [cited 2021 January 23]. 56 p. Available from: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311032>.
2. Розенфельд БА. Неевклидовы геометрии. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1955. 744 с.
3. Ивлев ДД. О двойных числах и их функциях. В: Бронштейн ИН, Лопшиц АМ, Ляпунов АА, Маркушевич АИ, Яглом ИМ, редакторы. Математика, ее преподавание, приложения и история. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1961. с. 197–203. (Математическое просвещение; выпуск 6).
4. Deckelman S, Robson B. Split-complex numbers and Dirac brackets. *Communications in Information and Systems*. 2014;14(3): 135–159. DOI: 10.4310/CIS.2014.v14.n3.a1.
5. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.
6. Зверович ЭИ, Павловский ВА. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h -комплексного переменного. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2020;56(2):189–193. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.
7. Павловский ВА. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h -комплексных чисел. *Весті БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія*. 2020;4:25–31.
8. Зверович ЭИ. Вещественный и комплексный анализ. Часть 3. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента. Минск: Вышэйшая школа; 2006. 129 с.

References

1. Antonuccio F. Semi-complex analysis and mathematical physics [Internet]. 2008 [cited 2021 January 23]. 56 p. Available from: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311032>.
2. Rosenfeld BA. *Neevklidovy geometrii* [Non-Euclidean geometries]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1955. 744 p. Russian.
3. Ivlev DD. [On double numbers and their functions]. In: Bronshtein IN, Lopshits AM, Lyapunov AA, Markushevich AI, Yaglom IM, editors. *Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya* [Mathematics, its teaching, applications and history]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1961. p. 197–203. (Matematicheskoe prosveshchenie; issue 6). Russian.
4. Deckelman S, Robson B. Split-complex numbers and Dirac brackets. *Communications in Information and Systems*. 2014;14(3): 135–159. DOI: 10.4310/CIS.2014.v14.n3.a1.
5. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.
6. Zverovich EI, Pavlovsky VA. Finding the areas of convergence and calculating sums of power series from an h -complex variable. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2020;56(2):189–193. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.
7. Pavlovsky VA. Algebraic equations with material coefficients in the ring of h -complex numbers. *Vesci BDPU. Seriya 3. Fizika. Matjematyka. Infarmatyka. Bijalogija. Geografija*. 2020;4:25–31. Russian.
8. Zverovich EI. *Veshchestvennyi i kompleksnyi analiz. Chast' 3. Differentsial'noe ischislenie funktsii vektornogo argumenta* [Real and complex analysis. Part 3. Differential calculus of vector argument functions]. Minsk: Vyshhejschaja shkola; 2006. 129 p. Russian.

Получена 23.03.2021 / исправлена 04.06.2021 / принята 04.06.2021.
Received 23.03.2021 / revised 04.06.2021 / accepted 04.06.2021.