
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 513.6

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ С БИНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

А. А. БОНДАРЕНКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы размерностей m и n соответственно над полем K , $\text{char} K \neq 2$. Рассматривается проблема бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$: когда произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$? Основным результатом статьи – полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K при $m=2$. Получены необходимые и достаточные условия существования бирациональной композиции $h(Z)$ для квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K при $m=2$. Описано множество квадратичных форм, которые подходят в качестве $h(Z)$ в этом случае.

Ключевые слова: квадратичная форма; бирациональная эквивалентность; бирациональная композиция.

Образец цитирования:

Бондаренко АА. Бирациональная композиция произвольной квадратичной формы с бинарной квадратичной формой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:14–20.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-14-20>

For citation:

Bondarenko AA. The birational composition of arbitrary quadratic form with binary quadratic form. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:14–20. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-14-20>

Автор:

Александр Адамович Бондаренко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

Author:

Alexandr A. Bondarenko, PhD (physics and mathematics), doцент; associate professor at the department of higher algebra and information security, faculty of mechanics and mathematics.
bondarenko@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-9264-9397>

THE BIRATIONAL COMPOSITION OF ARBITRARY QUADRATIC FORM WITH BINARY QUADRATIC FORM

A. A. BONDARENKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be non-degenerate quadratic forms of dimensions m and n respectively over a field K , $\text{char} K \neq 2$. Herein, the problem of the birational composition of $f(X)$ and $g(Y)$ is considered, namely, the condition is established when the product $f(X)g(Y)$ is birationally equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ over K of dimension $m+n$. The main result of this paper is the complete solution of the problem of the birational composition for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a field K when $m=2$. The sufficient and necessary conditions for the existence of birational composition $h(Z)$ for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a field K for $m=2$ are obtained. The set of quadratic forms is described which can be considered as $h(Z)$ in this case.

Keywords: quadratic form; birational equivalence; birational composition.

Введение

Пусть K – поле характеристики, не равной двум, $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и $Z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K , $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над K .

Определение. Если произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K , т. е. $f(X)g(Y)$ представляется квадратичной формой $h(Z)$ над K и $x_i, y_i \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K .

Первые общие результаты по проблеме композиции восходят к А. Гурвицу, который изучил задачу о сумме квадратов: найти наименьшее t при заданных m и n , чтобы выполнялось тождество

$$(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \dots + \Phi_t^2,$$

где Φ_i – билинейные функции от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ над K . Классические результаты А. Гурвица и И. Радона, связанные с этой задачей, хорошо известны (см. [1; 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам изучения такой композиции квадратичных форм. А. Пфистер продолжил рассматривать подобные тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4].

Первые общие теоремы о бирациональной композиции над произвольным полем K получены в [5]. Естественно возникла задача изучения бирациональной композиции квадратичных форм над классами полей. Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [6], над конечным полем – в [7], над полем функций – в [8]. Что касается проблемы бирациональной композиции над произвольным полем, то ее решение для тернарных квадратичных форм над произвольным полем K получено автором в [9], для бинарных квадратичных форм – в [6].

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм, одна из которых является бинарной, над произвольным полем K .

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда бинарная квадратичная форма $f(X)$ и произвольная квадратичная форма $g(Y)$ анизотропны над K , дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные над K квадратичные формы размерностей $m=2$ и n . Бирациональная композиция $h(Z)$ над K квадратичных форм $f(X) = ax_1^2 + bx_2^2 = a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, где $\alpha = \frac{b}{a}$, и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $g(Y)$ K -эквивалентна

$$\begin{cases} \beta_1(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_k(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2), & n = 2k, \\ \beta_1(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_{k-1}(y_{n-2}^2 + \alpha y_{n-1}^2) + \beta_k y_n^2, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

При этом с точностью до эквивалентности над K

$$h(z_1, \dots, z_{n+2}) = a(\beta_1(z_1^2 + \alpha z_2^2) + \dots + \beta_k(z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2)).$$

Решение проблемы бирациональной композиции, когда бинарная форма $f(X)$ либо квадратичная форма $g(Y)$ изотропна над K , следует из теоремы 1 работы [5].

Предварительно в статье доказаны любопытные утверждения о бирациональной композиции квадратичных форм над произвольным полем. Основные понятия и обозначения традиционны (см. [10; 11]).

Вспомогательные результаты

Докажем утверждения о квадратичных формах над произвольным полем, которые будем использовать при доказательстве теоремы. Они представляют и самостоятельный интерес.

Предложение 1. Пусть анизотропные квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ размерностей m и n над полем K образуют бирациональную композицию $h(Z)$, $m \leq n$, $f(X)$ – пфистерова квадратичная форма, h_1 – невырожденная часть h . Тогда $h_1 \sim \beta_1 f + \dots + \beta_k f$.

Доказательство этого предложения приведено в статье [8].

В дальнейшем будет полезна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $h = a_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + a_k \langle 1, \alpha \rangle$ – невырожденная анизотропная квадратичная форма размерности $2k$. Любая подформа h размерности $2k - 1$ эквивалентна квадратичной форме

$$\beta_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_{k-1} \langle 1, \alpha \rangle + \langle \beta_k \rangle,$$

а любая подформа h размерности $2k - 2$ эквивалентна квадратичной форме $\gamma_1 \langle 1, \alpha_1 \rangle + \gamma_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \gamma_{k-1} \langle 1, \alpha \rangle$, где α_1 может как совпадать, так и не совпадать с α .

Доказательство. Если g – подформа h размерности $2k - 1$, то $h \sim g + \langle a \rangle$. Следовательно, $a^{-1}h \sim a^{-1}g + \langle 1 \rangle$, $1 \in D_K(a^{-1}h)$. Пфистерова форма $\langle 1, \alpha \rangle = x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h)$, так как

$$\begin{aligned} (x_1^2 + \alpha x_2^2) a^{-1}h &= a^{-1} (a_1 (x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle + \dots + a_k (x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle) \sim \\ &\sim a^{-1} (a_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + a_k \langle 1, \alpha \rangle) = a^{-1}h, \end{aligned}$$

поскольку $(x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle \sim \langle 1, \alpha \rangle$ над $K(x_1, x_2)$ по теореме 4.1 работы [11].

Группа подобий $G_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h) \subset D_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h)$, так как форма $a^{-1}h$ представляет единицу (см. замечание 3.2 публикации [11]), поэтому по теореме 2.1 работы [11]

$$a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha \rangle + h_1. \quad (1)$$

Если h_1 – нулевая квадратичная форма, то $a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha \rangle$. В противном случае работаем с h_1 как с h , а именно: пусть $s_2 \in D_K(h_1)$, тогда $s_2^{-1}h_1$ представляет единицу над K и $x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(s_2^{-1}h_1)$. В силу (1) имеем

$$(x_1^2 + \alpha x_2^2) a^{-1}h \sim (x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle + (x_1^2 + \alpha x_2^2) h_1. \quad (2)$$

Однако, как показано выше, $(x_1^2 + \alpha x_2^2) a^{-1}h \sim a^{-1}h$ и $(x_1^2 + \alpha x_2^2) \langle 1, \alpha \rangle \sim \langle 1, \alpha \rangle$ над $K(x_1, x_2)$. Следовательно, по теореме 4 работы [10, гл. 4] в силу (1) и (2) получаем, что $(x_1^2 + \alpha x_2^2) h_1 \sim h_1$ над $K(x_1, x_2)$, а значит, $x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(s_2^{-1}h_1)$ и $s_2^{-1}h_1 \sim \langle 1, \alpha \rangle + h_2$, т. е. $h_1 \sim s_2 \langle 1, \alpha \rangle + s_2 h_2$. Размерность квадратичных форм h_k все время уменьшается на два, и на некотором шаге h_{k+1} будет нулевой квадратичной формой. В итоге имеем

$$a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha \rangle + s_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_k \langle 1, \alpha \rangle,$$

т. е.

$$a^{-1}h \sim \langle 1 \rangle + \langle \alpha \rangle + s_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_k \langle 1, \alpha \rangle.$$

Но выше было установлено, что $a^{-1}h \sim a^{-1}g + \langle 1 \rangle$. По теореме сокращения (см. [10, гл. 4]) $a^{-1}g \sim \langle \alpha \rangle + s_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_k \langle 1, \alpha \rangle$. Значит,

$$g \sim \beta_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_{k-1} \langle 1, \alpha \rangle + \langle \beta_k \rangle.$$

Если $n = 2k - 1$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2, \\ z_2 = x_2 y_1 - x_1 y_2, \\ \\ z_{n-2} = x_1 y_{n-2} + \alpha x_2 y_{n-1}, \\ z_{n-1} = x_2 y_{n-2} - x_1 y_{n-1}, \\ z_n = x_1 y_n, \\ z_{n+1} = x_2 y_n, \\ z_{n+2} = y_n. \end{array} \right. \quad (6)$$

В силу (5) и (6) очевидно, что x_1, x_2 и $y_1, \dots, y_n$ выражаются рационально через $z_1, \dots, z_{n+2}$. Это и доказывает, что произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$. Значит, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K существует и с точностью до K -эквивалентности равна

$$h(Z) = a \left[\beta_1 (z_1^2 + \alpha z_2^2) + \dots + \beta_k (z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2) \right].$$

Докажем предложение, которое используется в доказательстве условия необходимости основной теоремы.

Предложение 2. Пусть $f(X) = x_1^2 + \alpha x_2^2$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы размерностей 2 и $2k$ над K , бирациональная композиция которых равна $h(Z)$. Тогда $\text{rang } h(Z) = 2k$.

Доказательство. Согласно определению бирациональной композиции квадратичных форм $\dim h(Z) = 2k + 2$. По лемме 1 статьи [5] $g(Y) \in D_{K(Y)}(h)$, так как $1 \in D_K(f)$. Значит,

$$2k = \text{rang } g \leq \text{rang } h \leq \dim h = 2k + 2$$

и, исходя из предложения 1, $\text{rang } h$ – четное число. Следовательно, $\text{rang } h = 2k$ либо $\text{rang } h = 2k + 2$.

Предположим, $\text{rang } h = 2k + 2$. Тогда согласно предложению 1

$$h_1 = h \sim s_1 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + s_{k+1} \langle 1, \alpha \rangle.$$

Как уже отмечалось, $g(Y) \in D_{K(Y)}h$ и $g(Y)$ – подформа $h(Z)$ размерности $2k$. Согласно лемме 1

$$g \sim \gamma_1 \langle 1, \alpha_1 \rangle + \dots + \gamma_k \langle 1, \alpha \rangle.$$

Можем считать, что

$$g \sim \langle 1, \alpha_1 \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$$

(этого можно достичь, заменив g на $\gamma_1^{-1}g$).

Положив $y_2 = 0$ в g , получим квадратичную форму

$$g_1 \sim y_1^2 + \beta_2(y_3^2 + \alpha y_4^2) + \dots + \beta_k(y_{2k-1}^2 + \alpha y_{2k}^2).$$

Согласно достаточному условию основной теоремы статьи, доказанному выше, бирациональная композиция $f(X)$ и $g_1(Y)$ равна

$$h_2 \sim \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle,$$

$fg_1 \in D_{K(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{2k})}(h)$ и, следовательно, h_2 – подформа h .

Обозначим через V_1 , V_2 и V квадратичные пространства, соответствующие квадратичным формам g , h_2 и h .

Рассмотрим $V_1 \cap V_2$. Очевидно, что $\dim V_1 \cap V_2 = 2k$ либо $\dim V_1 \cap V_2 = 2k - 1$. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2k$, то $V_1 = V_2$ и квадратичные формы g и h_2 эквивалентны над K . Тогда согласно достаточному условию основной теоремы бирациональная композиция f и g эквивалентна $\langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$, т. е. $\text{rang } h = 2k$. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2k - 1$, $g = \langle 1, \alpha_1 \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$ в базисе $e_1, u_2, e_3, \dots, e_{2k}$ пространства V_1 и $h_2 = \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$ в базисе $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2k}$ пространства V_2 , то в базисе $u_2, e_1, e_2, \dots, e_{2k}$ пространства $V_1 + V_2$ квадратичная форма этого квадратичного пространства $h_3 = \langle a_1 \rangle + \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$ анизотропна, так как $V_1 + V_2 \subset V$ и h_3 – подформа h .

Рассмотрим квадратичную форму

$$q(U) = \langle 1, \alpha \rangle + \alpha_1 \langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$$

ранга $2k + 2$. Тогда $f(X)g(Y)$ очевидно представляется этой формой. Достаточно положить

$$\begin{cases} u_1 = x_1 y_1, \\ u_2 = x_2 y_1, \\ u_3 = x_1 y_2, \\ u_4 = x_2 y_2, \\ u_5 = x_1 y_3 + \alpha x_2 y_4, \\ u_6 = x_1 y_4 - x_2 y_3, \\ \dots \\ u_{2k+1} = x_1 y_{2k-1} + \alpha x_2 y_{2k}, \\ u_{2k+2} = x_1 y_{2k} - x_2 y_{2k-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Покажем, что квадратичная форма $q(U)$ анизотропна над K . Предположим обратное. Тогда $a_1 + \alpha_1 a_2 + \beta_2 a_3 + \dots + \beta_k a_{k+1} = 0$, где $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in D_K \langle 1, \alpha \rangle \cup \{0\}$, причем $a_2 \neq 0$, так как в противном случае h_2 изотропна. Поскольку $D_K \langle 1, \alpha \rangle$ – подгруппа K^* (см. теорему 4.1 работы [11]), то $-\alpha_1 = a_1 a_2^{-1} + \beta_2 a_3 a_2^{-1} + \dots + \beta_k a_{k+1} a_2^{-1}$ представляется квадратичной формой $\langle 1, \alpha \rangle + \beta_2 \langle 1, \alpha \rangle + \dots + \beta_k \langle 1, \alpha \rangle$. Отсюда следует, что квадратичная форма h_3 изотропна, но это не так. Данное противоречие и доказывает анизотропность над K квадратичной формы $q(U)$.

Получили, что $h(Z)$ – бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K и $f(X)g(Y) \in D_{K(X,Y)} q$. По этому согласно предложению 2 статьи [8] $h_1(Z) = h(Z)$ – подформа $q(U)$. Так как $h(Z)$ и $q(U)$ – анизотропные квадратичные формы размерности $2k + 2$, то по теореме 2.1 работы [11] $h(Z) \sim q(U)$ над K .

Переменные $u_1, \dots, u_{2k+2}$ алгебраически зависимы, поскольку $u_1 u_4 = u_2 u_3$. Из эквивалентности $h(Z)$ и $q(U)$ следует, что набор переменных $z_1, z_2, \dots, z_{2k+2}$ алгебраически зависим над K . Но по определению $Z = (z_1, \dots, z_{2k+2})$ – алгебраически независимый набор переменных. Противоречие мы получили, предположив, что $h(Z)$ имеет ранг $2k + 2$. Это и завершает доказательство предложения 2.

2. Докажем необходимость. Пусть бирациональная композиция $f(X)g(Y)$ над K равна $h(Z)$. Согласно предложению 1 $h_1 \sim \gamma_1 f + \dots + \gamma_s f$, где $f = \langle 1, \alpha \rangle$, h_1 – невырожденная часть h . Теперь надо определить $g(Y)$ в этом случае.

Если $n = \dim g = 2k - 1$ – нечетное, то

$$\text{rang } h = \dim h_1 = 2s \leq \dim h = \dim f + \dim g = 2k + 1,$$

так как h_1 – подформа h . По лемме 1 статьи [5] ag – подформа h_1 , где $a \in D_k(f)$, а значит, $\dim h_1 \geq \dim g = 2k - 1$. Имеем

$$2k - 1 = \dim g \leq \dim h_1 \leq \dim h = 2k + 1,$$

$\dim h_1$ – четное число. Следовательно, $\dim h_1 = 2k$. Согласно лемме 1

$$ag \sim \gamma_1 (y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \gamma_{k-1} (y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2) + \gamma_k y_n^k,$$

значит,

$$g \sim \beta_1 (y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_{k-1} (y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2) + \beta_k y_n^k,$$

где $\beta_i = \frac{\gamma_i}{a}$.

Теперь определим вид g , если $n = \dim g = 2k$. В этом случае согласно предложению 2 $\text{rang } h = \dim h_1 = 2k$, а согласно лемме 1 статьи [5] ag – подформа h_1 , следовательно, $h_1 \sim ag$. Значит, $g \sim \beta_1 (y_1^2 + \alpha y_2^2) + \dots + \beta_k (y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2)$, если $h = (z_1, \dots, z_{n+2}) = a [\beta_1 (z_1^2 + \alpha z_2^2) + \dots + \beta_k (z_{n-1}^2 + \alpha z_n^2)]$. Теорема полностью доказана.

Библиографические ссылки

1. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen*. 1922;88(1–2):1–25. DOI: 10.1007/BF01448439.
2. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1922;1(1):1–14. DOI: 10.1007/BF02940576.
3. Lam KY. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. In: Riehm CR, Hambleton I, editors. *Quadratic and Hermitian forms [Conference on quadratic forms and Hermitian K-theory, held at McMaster University; 1983 July 11–22; Hamilton, Ontario, Canada]*. Providence: American Mathematical Society; 1984. p. 173–192 (CMS conference proceedings; volume 4).
4. Pfister A. Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematic*. 1965;16(1):363–370. DOI: 10.1007/BF01220043.
5. Бондаренко АА. О бирациональной композиции квадратичных форм. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2007;4:56–61.
6. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем. *Математические заметки*. 2009;85(5):661–670. DOI: 10.4213/mzm4673.
7. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над конечным полем. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2010;3:90–93.
8. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2014;3:28–32.
9. Бондаренко АА. Бирациональная композиция тернарных квадратичных форм. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2012;2:106–110.
10. Серр Ж-П. *Курс арифметики*. Скопин АИ, переводчик; Малышев АВ, редактор. Москва: Мир; 1972. 184 с.
11. Knebusch M, Scharlau W. *Algebraic theory of quadratic forms. Generic methods and Pfister forms*. Boston: Birkhäuser; 1980. 44 p. (DMV seminar; 1).

References

1. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen*. 1922;88(1–2):1–25. DOI: 10.1007/BF01448439.
2. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1922;1(1):1–14. DOI: 10.1007/BF02940576.
3. Lam KY. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. In: Riehm CR, Hambleton I, editors. *Quadratic and Hermitian forms [Conference on quadratic forms and Hermitian K-theory, held at McMaster University; 1983 July 11–22; Hamilton, Ontario, Canada]*. Providence: American Mathematical Society; 1984. p. 173–192 (CMS conference proceedings; volume 4).
4. Pfister A. Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematic*. 1965;16(1):363–370. DOI: 10.1007/BF01220043.
5. Bondarenko AA. [On the birational composition of quadratic forms]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2007;4:56–61. Russian.
6. Bondarenko AA. [Birational composition of quadratic forms over a local field]. *Matematicheskie zametki*. 2009;85(5):661–670. DOI: 10.4213/mzm4673. Russian.
7. Bondarenko AA. [The birational composition of quadratic forms over a finite field]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2010;3:90–93. Russian.
8. Bondarenko AA. [The birational composition of quadratic forms over a function field]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2014;3:28–32. Russian.
9. Bondarenko AA. [The birational composition of ternary quadratic forms]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2012;2:106–110. Russian.
10. Serre J-P. *Cours d'arithmétique*. Paris: Presses Universitaires de France; 1970. 188 p.
Russian edition: Serre J-P. *Kurs arifmetiki*. Skopin AI, translator; Malyshev AV, editor. Moscow: Mir; 1972. 184 p.
11. Knebusch M, Scharlau W. *Algebraic theory of quadratic forms. Generic methods and Pfister forms*. Boston: Birkhäuser; 1980. 44 p. (DMV seminar; 1).

Получена 26.03.2021 / исправлена 15.01.2022 / принята 15.02.2022.
Received 26.03.2021 / revised 15.01.2022 / accepted 15.02.2022.