

О ЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ ФУНКЦИЙ
 h -КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГОВ. А. ПАВЛОВСКИЙ¹⁾, И. Л. ВАСИЛЬЕВ¹⁾¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Теория функций h -комплексного переменного – альтернатива для обычной теории функций комплексного переменного, получающаяся заменой правил умножения. Это изменение приводит к появлению делителей нуля на множестве h -комплексных чисел. Такие числа образуют коммутативное кольцо, не являющееся полем. h -Голоморфные функции выступают решениями систем уравнений гиперболического типа, тогда как классические голоморфные функции – решениями систем уравнений эллиптического типа. Следствием этого является значительное отличие свойств h -голоморфных и классических голоморфных функций. Интерес к исследованию свойств функций h -комплексного переменного связан с необходимостью поиска новых методов решения задач механики и плоской теории относительности. В данной работе доказана теорема о локальной обратимости h -голоморфных функций, сформулированы принципы сохранения области и максимума нормы для h -голоморфных функций.

Ключевые слова: h -голоморфность; локальная обратимость; принцип сохранения области; принцип максимума нормы; кольцо h -комплексных чисел; делители нуля.

ON LOCAL INVERTIBILITY OF FUNCTIONS
OF AN h -COMPLEX VARIABLEV. A. PAVLOVSKY^a, I. L. VASILIEV^a^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. A. Pavlovsky (pavlad95@gmail.com)

The theory of functions of an h -complex variable is an alternative to the usual theory of functions of a complex variable, obtained by replacing the rules of multiplication. This change leads to the appearance of zero divisors on the set of h -complex numbers. Such numbers form a commutative ring that is not a field. h -Holomorphic functions are solutions of systems of equations of hyperbolic type, in comparison with classical holomorphic functions, which are solutions of systems of equations of elliptic type. A consequence of this is a significant difference between the properties of h -holomorphic functions and the classical ones. Interest in studying the properties of functions of an h -complex variable is associated with the need to search for new methods for solving problems in mechanics and the plane theory of relativity. The paper presents a theorem on the local invertibility of h -holomorphic functions, formulates the principles of preserving the domain and maximum of the norm.

Keywords: h -holomorphy; local invertibility; domain preservation principle; norm maximum principle; ring of h -complex numbers; zero divisors.

Образец цитирования:

Павловский ВА, Васильев ИЛ. О локальной обратимости функций h -комплексного переменного. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;1:103–107.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-103-107>

For citation:

Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On local invertibility of functions of an h -complex variable. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;1:103–107. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-103-107>

Авторы:

Владислав Андреевич Павловский – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – И. Л. Васильев.

Игорь Леонидович Васильев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Authors:

Vladislav A. Pavlovsky, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
pavlad95@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-2916-1241>

Igor L. Vasiliev, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.

vassilyevl@bsu.by

Введение

Пусть \mathbb{C}_h – множество всех h -комплексных чисел [1–6]. Любое число из множества \mathbb{C}_h представимо в алгебраической форме:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1) = a + jb = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z,$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа z , а $b = \operatorname{Im} z$ – гиперболическая часть числа z . Как показано в работе [7], множество h -комплексных чисел \mathbb{C}_h есть кольцо с делителями нуля, каковыми являются числа вида $a \pm aj$.

Норма элемента в кольце \mathbb{C}_h определяется по формуле $\|z\| = |a| + |b|$, а модуль h -комплексного числа имеет вид $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ [7].

Пусть D – область в \mathbb{C}_h , тогда любая h -комплексная функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}_h$ представима в алгебраической форме:

$$f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется h -голоморфной в точке $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$, если функции u и v имеют непрерывные вторые частные производные и выполнены условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция $f(z)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, если она h -голоморфна в каждой точке этой области.

Теорема о локальной обратимости h -голоморфных функций

Пусть $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ – функция, h -голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}_h$. Тогда всюду в D $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, $f'(z) = u'_x + jv'_x$ [7]. В отличие от классических голоморфных функций условие $f'(z) \neq 0$ не является достаточным даже для локальной обратимости h -голоморфных функций. Например, для функции $f(z) = (1 + j)z$ производная $f'(z) = 1 + j \neq 0$ всюду в \mathbb{C}_h , однако эта функция ни в одной точке локально не обратима. Покажем, что при более сильных ограничениях локальная обратимость h -голоморфных функций имеет место. Верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, $z_0 = a + jb \in D$. Если $|u'_x(a, b)| \neq |u'_y(a, b)|$, то существуют открытая окрестность U точки z_0 и открытая окрестность V точки $w_0 = f(z_0)$ такие, что функция $f : U \rightarrow V$ имеет обратную функцию $f^{-1} : V \rightarrow U$, которая непрерывно h -дифференцируема в V , и, следовательно,

$$\{f^{-1}\}'(w) = \{f'(z)\}^{-1}. \quad (1)$$

Если $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ в некоторой окрестности точки z_0 , то f не обратима в этой окрестности.

Доказательство. 1. Функции f поставим в соответствие непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ согласованное отображение

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \det F'(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_y & -u'_x \end{vmatrix} = (u'_x)^2 - (u'_y)^2 \neq 0.$$

По теореме об обратном отображении существуют открытая окрестность U^* точки $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ и открытая окрестность V^* точки $F(a; b) \in \mathbb{R}^2$ такие, что отображение $F : U^* \rightarrow V^*$ имеет обратное отображение $F^{-1} : V^* \rightarrow U^*$. Это отображение также непрерывно дифференцируемо и, таким образом,

$$\{F^{-1}\}'(u, v) = \{F'(x, y)\}^{-1}. \quad (2)$$

Отображению $F^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$ поставим в соответствие функцию $z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v)$. Окрестностям U^* и V^* соответствуют окрестности U и V точек $z_0 = a + jb$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда функции $f: U \rightarrow V$ и $f^{-1}: V \rightarrow U$ являются обратными друг другу.

2. Докажем формулу (1). Имеем

$$F'(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_y & u'_x \end{vmatrix},$$

тогда

$$\{F'(x, y)\}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u'_x}{\mathbf{J}} & -\frac{u'_y}{\mathbf{J}} \\ -\frac{u'_y}{\mathbf{J}} & \frac{u'_x}{\mathbf{J}} \end{bmatrix}, \quad \{F^{-1}\}'(u, v) = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}.$$

Из выражения (2) получаем $x'_u = \frac{u'_x}{\mathbf{J}}$, $x'_v = -\frac{u'_y}{\mathbf{J}}$, $y'_u = -\frac{u'_y}{\mathbf{J}}$, $y'_v = \frac{u'_x}{\mathbf{J}}$. Для функции $z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v)$ имеем

$$x'_u = y'_v = \frac{u'_x}{\mathbf{J}}, \quad x'_v = y'_u = -\frac{u'_y}{\mathbf{J}}.$$

Следовательно, функция f^{-1} h -голоморфна в V , и тогда

$$\{f^{-1}\}'(w) = x'_u + jy'_u = \frac{u'_x - ju'_y}{\mathbf{J}} = \frac{u'_x - jv'_x}{\mathbf{J}} = \frac{1}{u'_x + jv'_x} = \{f'(z)\}^{-1}.$$

3. Пусть $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ в некоторой окрестности U точки z_0 . Введем характеристические координаты $\xi = \frac{1}{2}(x + y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x - y)$. Имеем

$$\begin{cases} u'_\xi = u'_x + u'_y, & v'_\xi = v'_x + v'_y, \\ u'_\eta = u'_x - u'_y, & v'_\eta = v'_x - v'_y. \end{cases}$$

Если $u'_x = u'_y$, то с учетом $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$ выводим

$$u'_\xi = v'_\xi = 2u'_x, \quad u'_\eta = v'_\eta = 0.$$

Отсюда

$$u = u(\xi) = u\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad v = v(\eta) = v\left(\frac{x+y}{2}\right) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) + jv\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1+j) \cdot u\left(\frac{x+y}{2}\right) + jC.$$

Пусть $z_0 \in D$, $z_0 = a + jb$. Все точки интервала $\gamma = \{x + y = a + b | z = x + jy \in U\}$ переходят в точку $w_0 = (1+j) \cdot u\left(\frac{a+b}{2}\right) + jC$, лежащую на прямой $y = x + C$. Если $u'_x = -u'_y$, то $u'_\xi = v'_\xi = 0$, $u'_\eta = -v'_\eta = 2u'_x$. Отсюда

$$u = u(\eta) = u\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad v = v(\eta) = v\left(\frac{x-y}{2}\right) = -u\left(\frac{x-y}{2}\right) + C.$$

Тогда

$$f(z) = u\left(\frac{x-y}{2}\right) + j\left(-u\left(\frac{x-y}{2}\right) + C\right) = (1-j) \cdot u\left(\frac{x-y}{2}\right) + jC,$$

где $C \in \mathbb{R}$. В этом случае для любой точки $z_0 \in D$ и ее окрестности U все точки интервала $\bar{\gamma} = \{x - y = a - b | z = x + jy \in U\}$ переходят в точку $w_0 = (1 - j) \cdot u\left(\frac{a - b}{2}\right) + jC$, лежащую на прямой $y = -x + C$.

Таким образом, при $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ всюду в D функция f локально не обратима ни в одной точке области D . Теорема доказана.

Замечание 1. В отличие от классического комплексного анализа условие $f'(z) \neq 0$ не является необходимым для локальной обратимости h -голоморфных функций в окрестности точки z . Например, $f(z) = z^3$ обратима в любой окрестности точки $z = 0$, в то время как $f'(0) = 0$.

Принцип сохранения области

Для h -голоморфных функций обычный принцип сохранения области не имеет места. Например, образом открытого h -круга $D = \{|z| < 1\}$ при отображении $f(z) = (1 + j) \cdot u(x + y)$ будет интервал $\gamma = \{w = (1 + j) \cdot u(x + y) | -1 < x + y < 1\}$, который не является областью в \mathbb{C}_h . Для h -голоморфных функций верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, а функции $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ непрерывны в области $D^* = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\}$. Если $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D^* , то множество $E = f(D)$ является областью. Если $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ всюду в D , то $f(D)$ – открытый интервал вида

$$\gamma = \left\{ w = (1 \pm j) \cdot u\left(\frac{x \pm y}{2}\right) + jC | C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^* \right\}.$$

Доказательство. 1. Пусть $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$. Докажем, что множество $E = f(D)$ открыто. Выберем произвольную точку $w_0 = f(z_0) \in E$, $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. В силу теоремы 1 существуют такие открытые окрестности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f : U \rightarrow V$ имеет обратную функцию $f^{-1} : V \rightarrow U$. Тогда для любой точки $w_1 \in V$ существует такая точка $z_1 \in U$, что $z_1 = f^{-1}(w_1) \in D$, $w_1 = f(z_1) \in E$. Следовательно, множество E открытое.

2. Докажем, что E связно. Для открытых множеств связность эквивалентна линейной связности [8]. Пусть $w_1, w_2 \in E$, $z_1 \in D$ – один из прообразов w_1 , $z_2 \in D$ – один из прообразов w_2 . Существует путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [0, 1]$, связывающий в D точки z_1 и z_2 . Из непрерывности f вытекает, что образ $\gamma^* = f[z(t)]$, $t \in [0, 1]$, будет путем, связывающим в E точки w_1 и w_2 . Очевидно, что $\gamma^* \in E$, следовательно, множество E связное. Таким образом, при $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D множество $E = f(D)$ есть область.

3. Пусть $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ для любой точки $(x; y) \in D^*$. Если $u'_x = u'_y$, то $f(z) = (1 + j) \cdot u\left(\frac{x + y}{2}\right) + jC$ и для любой точки $z \in D$ точка $w = f(z)$ лежит на интервале $\gamma = \left\{ w = (1 + j) \cdot u\left(\frac{x + y}{2}\right) + jC | C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^* \right\}$. Если $u'_x = -u'_y$, то $f(z) = (1 - j) \cdot u\left(\frac{x - y}{2}\right) + jC$ и образы любой точки $z \in D$ лежат на интервале $\bar{\gamma} = \left\{ w = (1 - j) \cdot u\left(\frac{x - y}{2}\right) + jC | C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^* \right\}$. Указанные интервалы не являются областями в \mathbb{C}_h . Теорема доказана.

Принцип максимума нормы

Теорема 3. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, а функции $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ непрерывны в области $D^* = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\}$. Если $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D^* , то функция $\|f(z)\|$, $f(z) \neq \text{const}$, не может достигать локального максимума во внутренней точке области D .

Доказательство. В силу теоремы 2 множество $E = f(D)$ является областью. Пусть $\|f(z)\|$ достигает локального максимума в точке $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0) \in E$. Тогда существуют такие открытые окрест-

ности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f : U \rightarrow V$ обратима. В окрестности V найдется такая точка w_1 , что $\|w_1\| > \|w_0\|$. Это противоречит тому, что $\|f(z)\|$ достигает максимума в точке z_0 . Теорема доказана.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 3 $f \in C(\bar{D})$, то функция $\|f(z)\|$ достигает максимума на границе ∂D .

Следствие 2. Если в условиях теоремы 3 $f(z) \neq 0$ для любой точки $z \in D$, то $\|f(z)\|$ не может достигать локального минимума внутри D .

Библиографические ссылки

1. Ивлев ДД. О двойных числах и их функциях. В: Бронштейн ИН, Варпаховский ФЛ, редакторы. *Математическое просвещение. Серия: Математика, ее преподавание, приложения и история. Выпуск 6*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1961. с. 197–203.
2. Розенфельд БА. *Неевклидовы геометрии*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1955. 744 с.
3. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.
4. Khrennikov A. An introduction to hyperbolic analysis. arXiv:math-ph/0507053v2 [Preprint]. 2005 [cited 2021 March 15]: [42 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053v2>.
5. Зверович ЭИ, Павловский ВА. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h -комплексного переменного. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2020;56(2):189–193. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.
6. Павловский ВА. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h -комплексных чисел. *Весті БДПУ. Серія 3. Фізика. Математика. Інформатика. Біялогія. Географія*. 2020;4:25–31.
7. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On h -holomorphy and h -analyticity of functions of an h -complex variable. *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*. 2020;4:19–27. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27.
8. Шабат БВ. *Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного*. 5-е издание. Москва: Ленанд; 2015. 336 с. (Классический университетский учебник).

References

1. Ivlev DD. [On double numbers and their functions]. In: Bronshtein IN, Varpakhovskii FL, editors. *Matematicheskoe prosveshchenie. Seriya: Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya. Vypusk 6* [Mathematical education. Series: Mathematics, its teaching, applications and history. Issue 6]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1961. p. 197–203. Russian.
2. Rosenfeld BA. *Neevklidovy geometrii* [Non-Euclidean geometries]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1955. 744 p. Russian.
3. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.
4. Khrennikov A. An introduction to hyperbolic analysis. arXiv:math-ph/0507053v2 [Preprint]. 2005 [cited 2021 March 15]: [42 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053v2>.
5. Zverovich EI, Pavlovsky VA. Finding the areas of convergence and calculating the sums of power series from an h -complex variable. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2020;56(2):189–193. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.
6. Pavlovsky VA. Algebraic equations with material coefficients in the ring of h -complex numbers. *BSPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography*. 2020;4:25–31. Russian.
7. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On h -holomorphy and h -analyticity of functions of an h -complex variable. *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series*. 2020;4:19–27. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27.
8. Shabat BV. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Chast' 1. Funktsii odnogo peremennogo* [Introduction to complex analysis. Part 1. Functions of one variable]. 5th edition. Moscow: Lenand; 2015. 336 p. (Klassicheskii universitetskii učebnik). Russian.

Получена 23.04.2021 / исправлена 10.01.2022 / принята 18.02.2022.
Received 23.04.2021 / revised 10.01.2022 / accepted 18.02.2022.