Краткие сообщения

Short communications

УДК 517.968.73

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

С. М. ШЕШКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Построена схема численного решения сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром методом ортогональных многочленов. Предлагаемая схема приближенного решения задачи основана на представлении искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышева и спектральных соотношениях, позволяющих получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышева вычисляются как решение системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближенного решения достигает минимального предела, обусловленного погрешностью представления действительных чисел с плавающей запятой.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; численное решение; метод ортогональных многочленов.

Благодарность. Автор выражает благодарность научному руководителю Г. А. Расолько за постановку задачи и полезные замечания.

Образец цитирования:
Шешко СМ. Численное решение одного слабосингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;3:98–103.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-98-103

For citation:
Sheshko SM. Numerical solution of a weakly singular integral equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;3:98–103. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-98-103

Автор:
Сергей Михайлович Шешко – старший преподаватель кафедры цифровой экономики экономического факультета.

Author:
Sergei M. Sheshko, senior lecturer at the department of digital economy, faculty of economics.
sheshkasm@bsu.by
https://orcid.org/0000-0001-6366-4961

NUMERICAL SOLUTION OF A WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATION BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

S. M. SHESHKO[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

A scheme is constructed for the numerical solution of a singular integral equation with a logarithmic kernel by the method of orthogonal polynomials. The proposed schemes for an approximate solution of the problem are based on the representation of the solution function in the form of a linear combination of the Chebyshev orthogonal polynomials and spectral relations that allows to obtain simple analytical expressions for the singular component of the equation. The expansion coefficients of the solution in terms of the Chebyshev polynomial basis are calculated by solving a system of linear algebraic equations. The results of numerical experiments show that on a grid of 20–30 points, the error of the approximate solution reaches the minimum limit due to the error in representing real floating-point numbers.

Keywords: integro-differential equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

Acknowledgements. The author would like to thank to the scientific advisor G. A. Rasolko for setting the problem and valuable comments.

Введение

Аппарат сингулярных интегральных уравнений широко используется в задачах аэродинамики, дифракции и других областях естествознания [1]. Точность приближенного численного решения интегральных уравнений во многом определяется способом их дискретизации, т. е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, позволяющих свести исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. При наличии особенностей в подынтегральных функциях (что характерно для сингулярных интегральных уравнений) требуется максимально учитывать специфику задачи.

В работе [1, с. 58–59] рассматривается квадратурный метод приближенного решения разрешимого сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром

$$\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)\,dt=f(x),\ -1<x<1, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция; $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера H.

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения уравнения (1) методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

Данная статья продолжает серию работ по приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, в том числе со слабой особенностью, методом ортогональных многочленов [2–5].

Предварительные сведения

Прежде чем переходить к конструированию вычислительной схемы приближенного решения уравнения (1) в классе функций $h(-1,1)$ по Мусхелишвили [6, с. 31], приведем некоторые предварительные сведения. Класс функций $h(-1,1)$ составляют ограниченные в окрестности точек $x=\pm1$ функции.

Известны спектральные соотношения для слабосингулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-x|\,dt=\alpha_k T_k(x),\ \alpha_0=-\ln 2,\ \alpha_k=-\frac{1}{k},\ k>0,$$
$$T_k(x)=\cos(k\arccos x), \tag{2}$$

которым воспользуемся далее.

При построении вычислительной схемы используем интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [7]:

$$f(x)\approx f_n(x)=\sum_{j=0}^{n}f_j^n T_j(x). \tag{3}$$

Здесь

$$f_0^n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k),\ \ f_j^n = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k),\ \ j = 1, \ldots, n,$$

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева второго рода, применим в (3) тождества [7, с. 23]

$$T_0(x) = U_0(x),\ 2T_1(x) = U_1(x),\ 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x),\ \ j \geq 2,$$

что дает следующее:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x),$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2},\ j = 0, 1, \ldots, n-2,\ \ f_{n-1} = G_{n-1},\ \ f_n = G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k),\ \ j = 0, 1, \ldots, n,$$

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для получения интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода используем (3), в результате чего имеем

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=0}^{n} T_j(t)k_{m,j}^{*},$$

$$k_{m,j}^{*} = \frac{\delta_m\delta_j}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n} T_m(x_l)\sum_{r=0}^{n} K(x_l, x_r)T_j(x_r),$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1,\ q = 0, \\ 2,\ q \neq 0, \end{cases}\ x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = \overline{0, n}.$$

На основании предыдущих результатов получим интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева первого и второго рода:

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=0}^{n} k_{m,j}U_j(t), \tag{4}$$

где

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n} T_m(x_l)\sum_{r=0}^{n} K(x_l, x_r)\big(T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)\big),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1,\ j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ 0,\ j = n-1, n, \end{cases}\ \ \delta_m = \begin{cases} 1,\ m = 0, \\ 2,\ m \neq 0, \end{cases}\ \ x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = \overline{0, n}.$$

Приближенное решение уравнения (1)

Приближенное решение данного уравнения в классе функций $h(-1, 1)$ будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\varphi_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\ln|t - x|dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)K_{n,n}(x, t)dt = F_n(x),\ -1 < x < 1, \tag{5}$$

где $\varphi_n(x)=\sqrt{1-x^2}\,v_n(x)$; $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $K(x,t)$ степени n по обеим переменным; $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1,1]$ такая, что $F_n(x_j)=f(x_j)$, $x_j=\cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j=0,1,\ldots,n$.

Отметим, что уравнение (5) в заданном классе также разрешимо.

Рассмотрим следующие утверждения.

Утверждение 1. Для $|x|<1$ имеет место равенство

$$J_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)\ln|t-x|\,dt=\begin{cases}-\dfrac{\ln 2}{2}T_0(x)+\dfrac{1}{4}T_2(x),\ k=0,\\[2mm] -\dfrac{1}{2k}T_k(x)+\dfrac{1}{2k+4}T_{k+2}(x),\ k\geq 1.\end{cases}\tag{6}$$

Доказательство. С учетом соотношения [7] $2\left(1-x^2\right)U_k(x)=T_k(x)-T_{k+2}(x)$ подынтегральная функция в (6) сводится к виду (2), откуда следует истинность утверждения.

Утверждение 2. Для $|x|<1$ имеет место равенство

$$I_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln|t-x|\,dt=$$

$$=\begin{cases}-\left(\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{1}{8}\right)U_0(x)+\dfrac{1}{8}U_2(x),\ k=0,\\[2mm] -\dfrac{1}{6}U_1(x)+\dfrac{1}{24}U_3(x),\ k=1,\\[2mm] \left(\dfrac{\ln 2}{4}+\dfrac{1}{8}\right)U_0(x)-\dfrac{5}{32}U_2(x)+\dfrac{1}{32}U_4(x),\ k=2,\\[2mm] -\dfrac{1}{8(k-2)}U_{k-4}(x)+\dfrac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\dfrac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\dfrac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x),\ k\geq 3.\end{cases}\tag{7}$$

Доказательство. С учетом соотношений $2T_k(x)=U_k(x)-U_{k-2}(x)$, $k\geq 1$, $U_{-1}(x)=0$, $T_0=U_0$ левая часть (7) сводится к вычислению интегралов вида (6), и тождества (7) проверяются непосредственными вычислениями.

Положим далее

$$\varphi_n(x)=\sqrt{1-x^2}\,v_n(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x),\tag{8}$$

где c_k, $k=0,1,\ldots,n$, – пока неизвестные постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в (5) с учетом представления (8):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_kI_k(t).$$

Рассмотрим второй интеграл в (5) и воспользуемся интерполяционным многочленом (4). Отсюда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)U_j(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\left(U_{j+k}(t)+U_{j-k}(t)\right)dt\right)=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\omega_{m,k},$$

$$\omega_{m,k}=\begin{cases}0{,}5k_{m,k},\ k=0,\\ 0{,}25k_{m,k},\ k>0.\end{cases}$$

Уравнение (5) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k I_k(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{m=0}^{n} T_m(x)\omega_{m,k} = F_n(x). \tag{9}$$

В качестве внешних узлов x в (9) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, \ldots, n$. Из (9) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} c_k A_{j,k} = f(x_j),\ j = 0, \ldots, n, \tag{10}$$

$$A_{j,k} = \sqrt{1-x_j^2}\,T_k(x_j) + I_k(x_j) + \sum_{m=0}^{n} T_m(x_j)\omega_{m,k}.$$

Уравнения (5) и (9) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (5) в (9), в обратном порядке, из (9) получим (5) (см., например, [8, с. 535]). Следовательно, система (10), полученная из уравнения (9), разрешима и имеет единственное решение.

Решив систему (10) относительно неизвестных c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, приближенное решение уравнения (1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x). \tag{11}$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при $k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}$, $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}x^3 - x + \left(56 - 32\sqrt{3}\right)\frac{1}{x+2}$.

Известно, что решением уравнения (1) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения.

Решая систему (10) при n, равных 7, 14 и 29, видим, что точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (11), в системе точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$ не более чем на $4{,}6 \cdot 10^{-4}$, $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ и $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ соответственно.

Библиографические ссылки

1. Панасюк ВВ, Саврук МП, Назарчук ЗТ. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* Киев: Наукова думка; 1984. 344 с.

2. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:68–74.

3. Расолько ГА. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:58–68.

4. Расолько ГА, Шешко СМ, Шешко МА. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 2019;55(9):1285–1292.

5. Расолько ГА, Шешко СМ. Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020; 2:86–96.

6. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения.* 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 513 с.

7. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* Москва: Наука; 1983. 384 с.

8. Колмогоров АН, Фомин СВ. *Элементы теории функций и функционального анализа.* 6-е издание. Москва: Наука; 1989. 624 с.

References

1. Panasyuk VV, Savruk MP, Nazarchuk ZT. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv: Naukova dumka; 1984. 344 p. Russian.

2. Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:68–74. Russian.

3. Rasolko GA. To the numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:58–68. Russian.

4. Rasolko GA, Sheshko SM, Sheshko MA. [Numerical method for some singular integro-differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2019;55(9):1285–1292. Russian.

5. Rasolko GA, Sheshko SM. An approximate solution of one singular integro-differential equation using the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:86–96. Russian.

6. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1968. 513 p. Russian.

7. Pashkovskii S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Moscow: Nauka; 1983. 384 p. Russian.

8. Kolmogorov AN, Fomin SV. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. 6th edition. Moscow: Nauka; 1989. 624 p. Russian.

Получена 03.06.2021 / исправлена 11.06.2021 / принята 29.09.2021.
Received 03.06.2021 / revised 11.06.2021 / accepted 29.09.2021.