УДК 517.5

О РАЦИОНАЛЬНЫХ СУММАХ АБЕЛЯ – ПУАССОНА НА ОТРЕЗКЕ И АППРОКСИМАЦИЯХ ФУНКЦИЙ МАРКОВА

П. Г. ПОЦЕЙКО[1]***, Е. А. РОВБА***[1]

[1]*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь*

Исследованы приближения на отрезке $[-1, 1]$ функций Маркова суммами Абеля – Пуассона рационального интегрального оператора типа Фурье, ассоциированного с системой алгебраических дробей Чебышева – Маркова, в случае фиксированного числа геометрически различных полюсов. Найдены интегральное представление приближений и оценка равномерных приближений. Изучены приближения функций Маркова в случае, когда мера μ удовлетворяет условиям $\operatorname{supp}\mu = [1, a]$, $a > 1$, $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ и $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ на $[1, a]$. Получены оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Найдены оптимальные значения параметров, при которых мажоранта имеет наибольшую скорость убывания. В качестве следствия приведены асимптотические оценки приближений на отрезке $[-1, 1]$ исследуемым методом рациональной аппроксимации некоторых элементарных функций Маркова.

Ключевые слова: функции Маркова; рациональные интегральные операторы; суммы Абеля – Пуассона; алгебраические дроби Чебышева – Маркова; наилучшие приближения; асимптотические оценки; точные константы.

Образец цитирования:
Поцейко ПГ, Ровба ЕА. О рациональных суммах Абеля – Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;3:6–24.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-6-24

For citation:
Patseika PG, Rouba YA. On rational Abel – Poisson means on a segment and approximations of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;3:6–24. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-6-24

Авторы:
Павел Геннадьевич Поцейко – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.
Евгений Алексеевич Ровба – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики.

Authors:
Pavel G. Patseika, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
pahamatby@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7835-0500
Yauheni A. Rouba, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental and applied mathematics, faculty of mathematics and informatics.
rovba.ea@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1265-1965

ON RATIONAL ABEL – POISSON MEANS ON A SEGMENT AND APPROXIMATIONS OF MARKOV FUNCTIONS

P. G. PATSEIKA[a]***, Y. A. ROUBA***[a]

[a]*Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ažeška Street, Hrodna 230023, Belarus*
Corresponding author: P. G. Patseika (pahamatby@gmail.com)

Approximations on the segment $[-1, 1]$ of Markov functions by Abel – Poisson sums of a rational integral operator of Fourier type associated with the Chebyshev – Markov system of algebraic fractions in the case of a fixed number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of approximations and an estimate of uniform approximations are found. Approximations of Markov functions in the case when the measure μ satisfies the conditions $\operatorname{supp}\mu = [1, a]$, $a > 1$, $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ and $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ on $[1, a]$ are studied and estimates of pointwise and uniform approximations and the asymptotic expression of the majorant of uniform approximations are obtained. The optimal values of the parameters at which the majorant has the highest rate of decrease are found. As a corollary, asymptotic estimates of approximations on the segment $[-1, 1]$ are given by the method of rational approximation of some elementary Markov functions under study.

Keywords: Markov functions; rational integral operators; Abel – Poisson means; Chebyshev – Markov algebraic fractions; best approximations; asymptotic estimates; exact constants.

Введение

Приближение непрерывных 2π-периодических функций суммами Абеля – Пуассона является хорошо известной задачей. И. П. Натансон [1] установил асимптотическое выражение точной верхней грани уклонений на классах $H_{2\pi}^{(\alpha)}$ 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, $\alpha \in (0, 1]$, с константой, равной единице. А. Ф. Тиман [2] уточнил остаточный член в асимптотическом равенстве, полученном И. П. Натансоном. Полное асимптотическое разложение верхних граней уклонений на классе $H_{2\pi}^{(1)}$ было установлено Э. Л. Штарком [3]. В. В. Жук [4] получил оценки сверху уклонений сумм Пуассона от функций $f \in C_{2\pi}$ в терминах модулей непрерывности.

Для функций $f \in C[-1, 1]$ точные верхние грани уклонений сумм Абеля – Пуассона на классах $H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, были установлены Ю. И. Русецким [5]. Т. В. Жигалло [6] уточнила остаточный член в асимптотической формуле, полученной Ю. И. Русецким.

В 1956 г. М. М. Джрбашян [7] ввел рациональные ряды Фурье, обобщающие соответствующие классические тригонометрические ряды. В частности, в этой работе было найдено компактное представление ядра Дирихле рациональных рядов Фурье. В 1963 г. А. А. Китбалян [8] предложил подход к построению сумм Абеля – Пуассона тригонометрических рядов Фурье, введенных М. М. Джрбашяном. В его работе был установлен ряд теорем о сходимости при $r \to 1-0$ сумм Абеля – Пуассона рациональных рядов Фурье к функциям $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$.

Пусть μ – положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z) = \int_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \; z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

называется функцией Маркова [9].

Функции Маркова голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, и их рациональная аппроксимация является хорошо известной классической задачей. Данной тематике посвятили свои статьи А. А. Гончар [10], Т. Ганелиус [11], Я.-Э. Андерссон [12], А. А. Пекарский [13]. Отметим работу Н. С. Вячеславова и Е. П. Мочалиной [14], в которой изучаются аппроксимации функций Маркова в пространствах Харди H_p, $p \in (0, +\infty)$, при определенных условиях на меру μ, а также работу А. П. Старовойтова и Ю. А. Лабыч [15], где для функции Маркова, порожденной положительными борелевскими мерами степенного типа, установлена асимптотика поведения строчных последовательностей ее таблицы Паде. Последнее позволило найти точные порядки убывания наилучших приближений функций Маркова рациональными функциями с фиксированным числом полюсов.

Среди методов рациональной аппроксимации выделяются интегральные операторы, восходящие своими корнями к рядам Фурье и методам их суммирования. В работе [16] исследованы аппроксимации функций Маркова в единичном круге частичными суммами рядов Фурье по системам рациональных функций, введенных С. Такенакой [17] и Ф. Мальмквистом [18], а также на отрезке $[-1, 1]$ по системам рациональных функций, введенных М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном [19]. Эти исследования были продолжены в [20], где найдены асимптотические оценки равномерных приближений указанными методами при фиксированном числе геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые были рассмотрены в работах К. Н. Лунгу [21; 22].

В 1979 г. Е. А. Ровба [23] ввел интегральный оператор на основании системы рациональных функций Чебышева – Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье – Чебышева. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k являются либо действительными ($|a_k| < 1$), либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышева порядка не выше n (см. [23]):

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(v, u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,\ x = \cos u, \tag{1}$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \lambda_n(y)dy,\ \lambda_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k^2}{1+2\alpha_k\cos y + \alpha_k^2},\ \alpha_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |\alpha_k| < 1.$$

Оператор

$$s_n : f \to \frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k x)},$$

где $p_n(x)$ – некоторый многочлен степени не выше n, коэффициенты которого зависят от a_k, и $s_n(1, x) = 1$. В частности, если положить $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то $s_n(f, x)$ есть частичная сумма полиномиального ряда Фурье – Чебышева.

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств сумм Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов (1) в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов. Представляет интерес исследовать данным методом скорость рациональной аппроксимации функций Маркова.

Суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева и приближения функций Маркова

Пусть q – произвольное натуральное число, A_q есть множество точек $a = (a_1, \ldots, a_q)$ таких, что все a_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, различны. В этом случае значения интегрального оператора (1) представляют собой рациональные функции вида

$$s_{mq}(f, x) = \frac{p_{mq}(x)}{\left(\prod_{k=1}^{q}(1 + a_k x)\right)^m},\ m = 0, 1, \ldots.$$

Другими словами, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим суммы:

$$P_{r,q}(f, x) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k s_{kq}(f, x),\ \ x \in [-1, 1],\ \ r \in (0, 1). \tag{2}$$

Выражение (2) естественно назвать суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с q геометрически различными полюсами. Из представления (2) очевидно также, что $P_{r,q}(1, x) = 1$.

Заметим, что формула, выражающая зависимость между суммами Абеля – Пуассона и частичными суммами в случае числовых рядов, содержится, например, в [24, с. 403].

Изучим приближения функций Маркова суммами Абеля – Пуассона (2). С этой целью введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{r,q}(x, A_q) = \hat{\mu}(x) - P_{r,q}(\hat{\mu}(\cdot), x), \ x \in [-1, 1], \tag{3}$$

$$\varepsilon_{r,q}(A_q) = \left\| \hat{\mu}(x) - P_{r,q}(\hat{\mu}(\cdot), x) \right\|_{C[-1,1]}, \ r \in (0, 1). \tag{4}$$

Будем полагать, что $\operatorname{supp}\mu \subset [1, +\infty)$,

$$\int \frac{d\mu(t)}{t-1} < \infty. \tag{5}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условию (5), а мера* ν *определяется соотношением*

$$d\nu(y) = \frac{4y^2}{1-y^2} d\mu(\eta(y)), \ y \in (0, 1], \tag{6}$$

где

$$\eta(y) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right).$$

Тогда для приближений функций Маркова $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *суммами Абеля – Пуассона (2) имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{r,q}(x, A_q) = (1-r) \int\limits_{\operatorname{supp}\nu} \frac{\cos\psi_r(y, u, A_q) d\nu(y)}{\sqrt{1 - 2y\cos u + y^2}\sqrt{1 - 2r\omega_q(y)\cos\arg\omega_q(\xi) + r^2\omega_q^2(y)}}; \tag{7}$$

2) оценка равномерных приближений

$$\varepsilon_{r,q}(A_q) \le (1-r) \max_{x \in [-1,1]} \int\limits_{\operatorname{supp}\nu} \frac{|d\nu(y)|}{\sqrt{1 - 2y\cos u + y^2}\sqrt{1 - 2r\omega_q(y)\cos\arg\omega_q(\xi) + r^2\omega_q^2(y)}},$$

где

$$\psi_r(y, u, A_q) = \arg\frac{\xi - y}{1 - r\omega_q(\xi)\omega_q(y)}, \ \ \omega_q(y) = \prod_{j=1}^{q} \frac{y + \alpha_j}{1 + \alpha_j y}, \ \ x = \cos u, \ \ \xi = e^{iu}. \tag{8}$$

Доказательство. С учетом точности сумм Абеля – Пуассона (2) на константах из (3) получим

$$\varepsilon_{r,q}(x, A_q) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \delta_{k,q}(x, A_q), \ \ x \in [-1, 1], \tag{9}$$

где $\delta_{k,q}(x, A_q)$ – приближения функций Маркова рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышева (1) с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости. С другой стороны, известно, что интегральный оператор (1) является частным случаем рационального интегрального оператора на отрезке, введенного в [25]. Из результатов этой работы следует, что

$$\delta_{k,q}(x, A_q) = \frac{1}{2} \int\limits_{\operatorname{supp}\nu} \left[\frac{1 - \xi y}{\xi} \overline{\omega_q^k(\xi)} + (\xi - y)\omega_q^k(\xi) \right] \frac{\omega_q^k(y) d\nu(y)}{1 - 2y\cos u + y^2},$$

где $\xi = e^{iu}, \ x = \cos u, \ k = 0, 1, \ldots, \nu(y)$ из (6).

Подставим последнее соотношение в (9) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Указанная операция оправданна, поскольку ряд в правой части (9) равномерно сходится при всех $x \in [-1, 1]$ для любого фиксированного r, $r \in (0, 1)$. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}(x, A_q) = \frac{1-r}{2} \int\limits_{\operatorname{supp}\nu} \left[(\bar{\xi} - y) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \overline{\omega_q^k(\xi)} \omega_q^k(y) + (\xi - y) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \omega_q^k(\xi) \omega_q^k(y) \right] \frac{d\nu(y)}{1 - 2y\cos u + y^2}.$$

Ряды в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями $\left| r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(y) \right| < 1$ и $\left| r\omega_q(\xi)\omega_q(y) \right| < 1$ соответственно. Следовательно,

$$\varepsilon_{r,q}(x, A_q) = \frac{1-r}{2} \int\limits_{\operatorname{supp}\nu} \left[\frac{\bar{\xi} - y}{1 - r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(y)} + \frac{\xi - y}{1 - r\omega_q(\xi)\omega_q(y)} \right] \frac{d\nu(y)}{1 - 2y\cos u + y^2}, \ x = \cos u.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму взаимно комплексно-сопряженных слагаемых, т. е. является действительно значной функцией. Используя первое из обозначений в (8), после соответствующих преобразований придем к (7).

Второе утверждение теоремы 1 легко следует из (7). Теорема 1 доказана.

Оценки приближений функций Маркова в случае меры специального вида

При исследовании приближений функций Маркова часто рассматривается случай, когда производная меры $\mu(t)$ слабо эквивалентна некоторой степенной функции (см., например, [12; 13]). Такой случай изучается нами далее. При этом в определении рационального интегрального оператора (1) для удобства сделаем замену $\alpha_k \mapsto -\alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$, и будем полагать, что $\alpha_k \in [0, 1)$.

Теорема 2. *Пусть* $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ *и* $\varphi(t) \asymp (t-1)^\gamma$, $t \in [1, a]$, $\gamma > 0$. *Тогда в условиях теоремы 1 для приближений функции* $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *суммами Абеля – Пуассона (2) справедливы оценки:*

1) поточечных приближений

$$\left| \varepsilon_{r,q}(x, A_q) \right| \le \frac{1-r}{2^{\gamma-1}} \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma} dy}{y^\gamma \sqrt{1 - 2y\cos u + y^2} \sqrt{1 - 2r\omega_q(y)\cos\arg\omega_q(\xi) + r^2\omega_q^2(y)}}; \tag{10}$$

2) равномерных приближений

$$\varepsilon_{r,q}(A_q) \le \varepsilon_{r,q}^*(A_q), \ n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_{r,q}^*(A_q) = \frac{1-r}{2^{\gamma-1}} \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-1}}{y^\gamma} \frac{dy}{1 - r\left|\omega_q(y)\right|}, \tag{12}$$

$d = a - \sqrt{a^2 - 1}$, $d \in (0, 1]$, $\omega_q(y)$ *из (8).*

Доказательство. Из (6) и (7) следует, что в случае $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ и $\varphi(t) \asymp (t-1)^\gamma$ естественно рассматривать приближения (3) в виде

$$\varepsilon_{r,q}(x, A_q) = \frac{1-r}{2^{\gamma-1}} \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma} \cos\psi_r(y, u, A_q) dy}{y^\gamma \sqrt{1 - 2y\cos u + y^2} \sqrt{1 - 2r\omega_q(y)\cos\arg\omega_q(\xi) + r^2\omega_q^2(y)}},$$

где d определено в формулировке теоремы, $x = \cos u$, $\omega_q(y)$, $\psi_r(y, u, A_q)$ из (8). Учитывая, что $\left| \cos\psi_r(y, u, A_q) \right| \le 1$, из последнего соотношения следует оценка (10).

Воспользовавшись известным неравенством

$$\sqrt{1 - 2y\cos u + y^2} \ge 1 - y, \ y \in [0, 1], \ u \in \mathbb{R},$$

а также заметив, что

$$\sqrt{1 - 2r\omega_q(y)\cos\arg\omega_q(\xi) + r^2\omega_q^2(y)} \ge 1 - r\left|\omega_q(y)\right|, \ r \in (0, 1),$$

из (10) приходим к (11). Доказательство теоремы 2 завершено.

Замечание. Теорема 2 имеет место и при $d = 0$, что соответствует случаю, когда носитель функции Маркова $F = [1, +\infty)$. Тогда полагаем $\gamma \in (0, 1)$.

Положим в соотношениях (10) и (11) значения параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Тогда $\varepsilon_{r,1}(x, O) = \varepsilon_r^{(0)}(x)$, $\varepsilon_{r,1}(O) = \varepsilon_r^{(0)}$, $O = (0, \ldots, 0)$, – соответственно поточечные и равномерные приближения функций Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля – Пуассона рядов Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода, когда мера $\mu(t)$ удовлетворяет условиям в формулировке теоремы 2.

Следствие 1. *Имеют место соотношения*

$$\left|\varepsilon_r^{(0)}(x)\right| \le \frac{1-r}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma} dy}{y^\gamma \sqrt{1-2y\cos u + y^2} \sqrt{1-2ry\cos u + r^2 y^2}}, \ x = \cos u, \ x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_r^{(0)} = \frac{1-r}{2^{\gamma-1}} \int_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-1} dy}{y^\gamma (1-ry)}, \ r \in (0, 1). \tag{13}$$

Асимптотика мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение величины (12) при $r \to 1$. С этой целью в интеграле выполним замену переменного по формуле $y = \dfrac{1-u}{1+u}$, $dy = \dfrac{-2du}{(1+u)^2}$. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}^*(A_q) = 2^{\gamma+1}(1-r)\int_0^D \Omega_r^{(\gamma)}(u, A_q)du, \ D = \frac{1-d}{1+d} = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \ D \in [0, 1), \ r \in (0, 1), \tag{14}$$

где

$$\Omega_r^{(\gamma)}(u, A_q) = \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma (1 - r|\pi_q(u)|)}, \ \pi_q(u) = \prod_{j=1}^q \frac{\beta_j - u}{\beta_j + u}, \ \beta_j = \frac{1-\alpha_j}{1+\alpha_j}. \tag{15}$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $r \in (0, 1)$ может выбираться соответствующее множество точек $A_q = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ и $\alpha_k = \alpha_k(r) \to 1$ при $r \to 1$, $k = 1, 2, \ldots, q$. При этом будем полагать, что выполняются условия

$$\lim_{r \to 1} \frac{1-\alpha_k}{1-r} = \infty, \ k = 1, 2, \ldots, q.$$

Из сказанного следует, что для любого значения $d = a - \sqrt{a^2 - 1}$ существует такое r_0, $r_0 \in (0, 1)$, что при $r \in (r_0, 1)$ $\alpha_k \in [d, 1)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Эти ограничения будем учитывать в дальнейших рассуждениях. В этом случае без нарушения общности можно полагать параметры упорядоченными следующим образом: $0 < \beta_q < \ldots < \beta_1 < D \le 1$. Справедлива нижеприведенная теорема.

Теорема 3. *При* $r \to 1$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{r,q}^*(A_q) \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}(1-r)^{2\gamma}\pi}{\sin 2\pi\gamma \left(\sum\limits_{k=1}^q \dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} + \Phi_r^{(\gamma)}(q, A_q), \ \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{\sqrt{2}(1-r)}{\sum\limits_{k=1}^q \dfrac{1}{\beta_k}} \ln\left(1 + \dfrac{2r\beta_q}{1-r}\sum\limits_{k=1}^q \dfrac{1}{\beta_k}\right) + \Phi_r^{(1/2)}(q, A_q), \ \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ 2^{\gamma+1}(1-r)\displaystyle\int_0^{\beta_q} \dfrac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma(1-\pi_q(u))} + \Phi_r^{(\gamma)}(q, A_q), \ \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь

$$\Phi_r^{(\gamma)}\left(q,\ A_q\right) = 2^{\gamma+1}(1-r)\left[\sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k}\frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}\left(1-\pi_{q,k}(u)\right)} + \int\limits_{\beta_1}^{D}\frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}\left(1-\left|\pi_q(u)\right|\right)}\right], \quad (17)$$

$$\pi_{q,k}(u) = \prod_{j=1}^{k}\frac{\beta_j - u}{\beta_j + u}\prod_{j=k+1}^{q}\frac{u-\beta_j}{u+\beta_j}. \quad (18)$$

Доказательство. Представим интеграл в (14) в виде

$$\varepsilon_{r,q}^{*}\left(A_q\right) = 2^{\gamma+1}\left[I_1\left(r,\ A_q\right) + I_2\left(r,\ A_q\right) + I_3\left(r,\ A_q\right)\right], \quad (19)$$

где

$$I_1\left(r,\ A_q\right) = (1-r)\int\limits_0^{\beta_q}\Omega_r^{(\gamma)}\left(u,\ A_q\right)du,$$

$$I_2\left(r,\ A_q\right) = (1-r)\sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k}\Omega_r^{(\gamma)}\left(u,\ A_q\right)du,$$

$$I_3\left(r,\ A_q\right) = (1-r)\int\limits_{\beta_1}^{D}\Omega_r^{(\gamma)}\left(u,\ A_q\right)du,$$

функция $\Omega_r^{(\gamma)}\left(u,\ A_q\right)$ определена в (15).

Изучим асимптотическое поведение при $r \to 1$ каждого из трех интегралов в отдельности. Дальнейшему изложению предпошлем три леммы.

Лемма 1. *При* $r \to 1$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_1\left(r,\ A_q\right) \sim \begin{cases} \dfrac{(1-r)^{2\gamma}\pi}{\sin 2\pi\gamma\left(2r\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, \ \gamma \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{1-r}{2r\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}}\ln\left(1 + \dfrac{2r\beta_q}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right), \ \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ (1-r)\int\limits_0^{\beta_q}\dfrac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}\left(1-\pi_q(u)\right)}, \ \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad (20)$$

Доказательство. Из (14) следует, что

$$I_1\left(r,\ A_q\right) = (1-r)\int\limits_0^{\beta_q}\frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}\left(1-r\pi_q(u)\right)}.$$

Очевидно, что асимптотическое поведение интеграла $I_1\left(r,\ A_q\right)$ при $r \to 1$ определяется сколь угодно малой окрестностью нуля переменной интегрирования. Используя разложение в ряд Тейлора

$$\pi_q(u) = 1 - 2u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k} + o(u),\ u \to 0,$$

а также очевидное асимптотическое равенство

$$\frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}} \sim u^{2\gamma-1},\ u \to 0,$$

находим, что

$$I_1(r, A_q) \sim \int_0^{\beta_q} \frac{u^{2\gamma-1}du}{1 + \frac{2ru}{1-r}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}, \; r \to 1.$$

В интеграле выполним замену переменного по формуле $\frac{2ru\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}{1-r} \mapsto u.$ Тогда

$$I_1(r, A_q) \sim \frac{(1-r)^{2\gamma}}{\left(2r\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} \int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^{2\gamma-1}du}{1+u}, \; \varphi(r, A_q) = \frac{2r\beta_q}{1-r}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k} \to \infty, \; r \to 1.$$

Пусть $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тогда, учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2\gamma-1}du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin 2\pi\gamma},$$

получим

$$I_1(r, A_q) \sim \frac{(1-r)^{2\gamma}\pi}{\sin 2\pi\gamma\left(2r\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, \; r \to 1. \tag{21}$$

Если $\gamma = \frac{1}{2}$, то из (21) находим

$$I_1(r, A_q) \sim \frac{1-r}{2r\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}} \int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{du}{1+u} = \frac{1-r}{2r\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}} \ln\left(1 + \varphi(r, A_q)\right), \; r \to 1. \tag{22}$$

Наконец, при $\gamma > \frac{1}{2}$ подынтегральная функция интегрируема при каждом значении $r \in (0, 1)$ и мажорируется интегрируемой функцией. Следовательно, оправдан предельный переход под знаком интеграла $I_1(r, A_q)$ при $r \to 1$, и, значит,

$$I_1(r, A_q) \sim (1-r)\int_0^{\beta_q} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}(1-\pi_q(u))}, \; r \to 1. \tag{23}$$

Из (21)–(23) следует (20). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_2(r, A_q) \sim (1-r)\sum_{k=1}^{q-1}\int_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}(1-\pi_{q,k}(u))}, \quad r \to 1, \tag{24}$$

где $\pi_{q,k}(u)$ *из (18).*

Доказательство. Из (15) следует, что

$$I_2(r, A_q) = (1-r)\sum_{k=1}^{q-1}\int_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}(1-r\pi_{q,k}(u))}.$$

Каждая из $q-1$ подынтегральных функций в сумме справа суммируема на соответствующих интервалах $[\beta_{k+1}, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots, q-1$, и при любом значении $r \in (0, 1)$ и выполнении условия (18) ограничена в совокупности суммируемой функцией. Выполнив в каждом из $q-1$ интегралов предельный переход при $r \to 1$, придем к равенству (24). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_3\left(r, A_q\right) \sim (1-r)\int\limits_{\beta_1}^{D} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}\left(1-\left|\pi_q(u)\right|\right)}, \; r \to 1, \tag{25}$$

где $\pi_q(u)$ *из (15).*

Доказательство. Очевидно, что

$$I_3\left(r, A_q\right) = (1-r)\int\limits_{\beta_1}^{D} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}\left(1-\left|\pi_q(u)\right|\right)}.$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 3. Подставив (20), (24) и (25) в (19), придем к (16). Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 для равномерных приближений функций Маркова суммами Абеля – Пуассона рядов Фурье по системе полиномов Чебышева первого рода (13) при* $r \to 1$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_r^{(0)} \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}\pi(1-r)^{2\gamma}}{\sin 2\pi\gamma}, \; \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2}(1-r)\ln\dfrac{2}{1-r}, \; \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2^{\gamma}D^{2\gamma-1}(1-r)}{2\gamma-1}, \; \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{26}$$

Положим в формулировке теоремы 3 значение $q = 1$. Тогда $\varepsilon_{r,1}^{*}\left(A_1\right)$ – мажоранта равномерных приближений функций Маркова рациональными суммами Абеля – Пуассона с одним полюсом в открытой комплексной плоскости.

Следствие 3. *Справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{r,1}^{*}\left(A_1\right) \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}(1-r)^{2\gamma}\pi\beta^{2\gamma}}{\sin 2\pi\gamma} + \dfrac{2^{\gamma}(1-r)}{\beta}\displaystyle\int\limits_{\beta}^{D}\dfrac{u^{2\gamma-1}(u+\beta)du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}}, \; \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2}(1-r)\beta\ln\dfrac{2}{1-r} + \dfrac{\sqrt{2}(1-r)}{\beta}\displaystyle\int\limits_{\beta}^{D}\dfrac{(u+\beta)du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{1/2}}, \; \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ 2^{\gamma}\left[\displaystyle\int\limits_{0}^{\beta}\dfrac{u^{2\gamma-2}(u+\beta)du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}} + \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int\limits_{\beta}^{D}\dfrac{u^{2\gamma-1}(u+\beta)du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^{\gamma}}\right](1-r), \; \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что параметр d в формулировке теоремы 3 может принимать и нулевое значение. В этом случае $\gamma \in (0, 1)$.

Наилучшая мажоранта равномерных приближений

Представляет интерес минимизировать правую часть асимптотического равенства (16) посредством выбора оптимального для этой задачи множества $A_q^{*} = \left(\alpha_1^{*}, \ldots, \alpha_q^{*}\right)$. Другими словами, будем искать оценку наилучшего равномерного приближения функций Маркова в условиях теоремы 2 суммами (2). Положим

$$\varepsilon_{r,q} = \inf_{A_q} \varepsilon_{r,q}\left(A_q\right), \; \varepsilon_{r,q}^{*} = \inf_{A_q} \varepsilon_{r,q}^{*}\left(A_q\right),$$

где $\varepsilon_{r,\,q}\left(A_q\right)$ – равномерные приближения функций Маркова суммами Абеля – Пуассона (2), определенные в (4). Отметим очевидное неравенство, следующее из (11):

$$\varepsilon_{r,\,q} \le \varepsilon^{*}_{r,\,q},\ \ r \in (0,\,1).$$

Теорема 4. *При $r \to 1$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^{*}_{r,\,q} \sim \begin{cases} \mu(q,\,\gamma)(1-r)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}},\ \gamma \in \left(0,\,\frac{1}{2}\right), \\ 2\sqrt{2c\left(\frac{1}{2}\right)}(1-r)\sqrt{\ln_q \frac{2}{1-r}},\ \gamma = \frac{1}{2}, \\ 2^{\gamma+1}\inf\limits_{A_q} F_\gamma\left(A_q\right)(1-r),\ \gamma > \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\mu(q,\,\gamma) = (1+2\gamma)\left[\frac{2^{(1-\gamma)\left(2(1-2\gamma)^{q-1}-(1+2\gamma)\right)}\left(c(\gamma)\right)^{2\gamma}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{q-1}}{2\gamma}}\gamma^{1+2\gamma-(1-2\gamma)^{q-1}}}\left(\frac{\pi}{\sin 2\pi\gamma}\right)^{(1-2\gamma)^{q-1}}\right]^{\frac{1}{1+2\gamma}},$$

$$c(\gamma) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^D \frac{u^{2\gamma}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma},\ \gamma > 0,\ d \in (0,\,1],\ D = \frac{1-d}{1+d}, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2\gamma}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma},\ \gamma \in (0,\,1),\ d = 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$\ln_q \frac{2}{1-r} = \underbrace{1+\ln\left(1+\ln\left(1+\ldots+\ln\ln\frac{2}{1-r}\right)\right)}_{q\ \text{раз}}, \tag{29}$$

$$F_\gamma\left(A_q\right) = \int_0^{\beta_q} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma\left(1-\pi_q(u)\right)} +$$
$$+\sum_{k=1}^{q-1}\int_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma\left(1-\pi_{q,\,k}(u)\right)} + \int_{\beta_1}^{D} \frac{u^{2\gamma-1}du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma\left(1-\left|\pi_q(u)\right|\right)}, \tag{30}$$

здесь $\pi_q(u)$ из (15), $\pi_{q,\,k}(u)$ из (18).

Доказательство. Исследуем асимптотические равенства (16). При фиксированных β_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, порядок в указанном соотношении, очевидно, не отличается от полиномиального, полученного нами в (26).

Пусть $\gamma \in \left(0,\,\frac{1}{2}\right]$. В этом случае будем полагать, что $\beta_j = \beta_j(r) \to 0$, $r \to 1$, причем $\beta_{j+1} = o\left(\beta_j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, q$, $r \to 1$. При этом из (17) находим, что

$$\Phi_r^{(\gamma)}\left(q,\,A_q\right) \sim 2^\gamma(1-r)\begin{cases} \displaystyle\frac{1}{1-2\gamma}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1-2\gamma}} + \frac{c(\gamma)}{\beta_1},\ \gamma \in \left(0,\,\frac{1}{2}\right), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1}\beta_k \ln\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} + \frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1},\ \gamma = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $c(\gamma)$ определена в (27).

Тогда первые два асимптотических равенства из (16) при $r \to 1$ примут вид

$$\varepsilon^*_{r,\,q}\left(A_q\right) \sim \frac{2^{\gamma}(1-r)}{1-2\gamma}\left[\frac{2^{1-2\gamma}\pi(1-2\gamma)(1-r)^{2\gamma-1}\beta_q^{2\gamma}}{\sin 2\pi\gamma} + \sum_{k=1}^{q-1}\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1-2\gamma}} + \frac{(1-2\gamma)c(\gamma)}{\beta_1}\right],\ \gamma \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right), \tag{31}$$

$$\varepsilon^*_{r,\,q}\left(A_q\right) \sim \sqrt{2}(1-r)\left[\ln\frac{2\beta_q}{1-r} + \sum_{k=1}^{q-1}\beta_k \ln\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} + \frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1}\right],\ \gamma = \frac{1}{2}. \tag{32}$$

При каждом фиксированном $\gamma \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ правые части асимптотических равенств (31) и (32) представляют собой функции переменных $\beta_1, \ldots, \beta_q$, непрерывные в каждой точке q-мерного куба $[\delta, 1]^q$, $\delta = \delta(r) > 0$, следовательно, имеют строгий минимум при некотором $\beta^* = \left(\beta_1^*, \ldots, \beta_q^*\right) \in [\delta, 1]^q$. Если $\beta_k = 1$, $k = 1, \ldots, q$, то получим полиномиальный случай. Можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства, решим экстремальную задачу

$$\varepsilon^*_{r,\,q}\left(A_q\right) \underset{A_q}{\to} \inf.$$

Рассмотрим каждый случай в отдельности. Так, исходя из асимптотического равенства (31), приходим к задаче

$$\Psi^{(\gamma)}\left(A_q\right) = c_q\beta_q^{2\gamma} + \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-2\gamma}} + \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{1-2\gamma}} + \ldots + \frac{\beta_2}{\beta_3^{1-2\gamma}} + \frac{\beta_1}{\beta_2^{1-2\gamma}} + \frac{c_1}{\beta_1} \underset{A_q}{\to} \inf,$$

где для краткости положено

$$c_q = \frac{2^{1-2\gamma}\pi(1-2\gamma)(1-r)^{2\gamma-1}}{\sin 2\pi\gamma},\ c_1 = (1-2\gamma)c(\gamma).$$

Функция $\Psi^{(\gamma)}\left(A_q\right)$ переменных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0, 1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума $\dfrac{\partial\Psi^{(\gamma)}\left(A_q\right)}{\partial\beta_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 2\gamma c_q\beta_q^{2\gamma-1} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}} = 0, \\ \dfrac{1}{\beta_q^{1-2\gamma}} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} = 0, \\ \dfrac{1}{\beta_{q-1}^{1-2\gamma}} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}^{2-2\gamma}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{\beta_3^{1-2\gamma}} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_1}{\beta_2^{2-2\gamma}} = 0, \\ \dfrac{1}{\beta_2^{1-2\gamma}} - \dfrac{c_1}{\beta_1^2} = 0, \end{cases} \tag{33}$$

из которой последовательно находим

$$\frac{\beta_1}{\beta_2^{1-2\gamma}} = \frac{c_1}{\beta_1},\ \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1-2\gamma}} = (1-2\gamma)^{k-1}\frac{c_1}{\beta_1},\ k = 2, 3, \ldots, q-1.$$

С другой стороны, из первого уравнения системы (33) получаем

$$2\gamma c_q \beta_q^{2\gamma} = (1-2\gamma)\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-2\gamma}} = (1-2\gamma)^{q-1}\frac{c_1}{\beta_1}.$$

Таким образом, с оптимальным набором параметров функция $\Psi^{(\gamma)}(A_q)$ имеет вид

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q^*) = \frac{(1-2\gamma)^{q-1}}{2\gamma}\frac{c_1}{\beta_1^*} + (1-2\gamma)^{q-2}\frac{c_1}{\beta_1^*} +$$

$$+ (1-2\gamma)^{q-3}\frac{c_1}{\beta_1^*} + \ldots + \frac{c_1}{\beta_1^*} + \frac{c_1}{\beta_1^*} = \frac{1+2\gamma}{2\gamma}\frac{c_1}{\beta_1^*}. \tag{34}$$

Осталось найти параметр β_1^*. С этой целью снова обратимся к системе (33). Последовательно находим

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \dfrac{2\gamma c_q}{1-2\gamma}, \\ \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = \dfrac{1}{1-2\gamma}\left(\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q}\right)^{1-2\gamma} = \dfrac{1}{1-2\gamma}\left(\dfrac{2\gamma c_q}{1-2\gamma}\right)^{1-2\gamma}, \\ \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = \dfrac{1}{1-2\gamma}\left(\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}}\right)^{1-2\gamma} = \dfrac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^2}}{(1-2\gamma)(1-2\gamma)^{1-2\gamma}(1-2\gamma)^{(1-2\gamma)^2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}{(1-2\gamma)^{\left[1+(1-2\gamma)+(1-2\gamma)^2+\ldots+(1-2\gamma)^{(q-2)}\right]}} = \dfrac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{(q-1)}}{2\gamma}}}. \end{cases} \tag{35}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (33) имеем

$$\beta_2 = \frac{\beta_1^{\frac{2}{1-2\gamma}}}{c_1^{\frac{1}{1-2\gamma}}}.$$

Подставив полученное выражение для β_2 в последнее равенство системы (35), после необходимых преобразований будем иметь

$$\beta_1^* = c_1^{\frac{1}{1+2\gamma}}\left(\frac{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{(q-1)}}{2\gamma}}}{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}\right)^{\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}}, \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

При найденном β_1^* в (34) получим

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q^*) = \frac{1+2\gamma}{2\gamma} c_1^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}}\left(\frac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{(q-1)}}{2\gamma}}}\right)^{\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}}, \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Возвращаясь к первоначальным значениям параметров c_1 и c_q, из последнего соотношения и формулы (31) находим, что

$$\varepsilon_{r,q}^* \sim \mu(q,\gamma)(1-r)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}, \quad r \to 1, \tag{36}$$

где $\mu(q,\gamma)$ определена в формулировке теоремы 4.

Займемся теперь асимптотическим равенством (32). Здесь приходим к следующей задаче оптимизации:

$$\Psi^{(1/2)}\left(A_q\right) = \ln\frac{2\beta_q}{1-r} + \beta_{q-1}\ln\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} + \beta_{q-2}\ln\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} + \ldots + \beta_1\ln\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1} \underset{A_q}{\rightarrow} \inf, \qquad (37)$$

где $c\left(\frac{1}{2}\right)$ определено в (28). Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что оптимальный набор $\beta^* = \left(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_q^*\right)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \ln\frac{2}{1-r} - \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = 0, \\ \ln\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} + 1 - \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 0, \\ \ln\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} + 1 - \frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ln\frac{\beta_2}{\beta_3} + 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0, \\ \ln\frac{\beta_1}{\beta_2} + 1 - \frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1^2} = 0. \end{cases} \qquad (38)$$

Из последней системы находим, что с оптимальным набором параметров функция $\Psi^{(1/2)}\left(A_q^*\right)$ из (37) имеет вид

$$\Psi^{(1/2)}\left(A_q^*\right) = \ln\frac{2\beta_q^*}{1-r} + \beta_{q-1}^*\left(\frac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*} - 1\right) + \beta_{q-2}^*\left(\frac{\beta_{q-3}^*}{\beta_{q-2}^*} - 1\right) + \ldots$$

$$\ldots + \beta_2^*\left(\frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} - 1\right) + \beta_1^*\left(\frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1^{*2}} - 1\right) + \frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1^*} = \frac{2c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1^*}. \qquad (39)$$

Осталось найти значение параметра β_1^*. С этой целью снова обратимся к системе (38). Последовательно получим

$$\begin{cases} \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \ln\frac{2}{1-r}, \\ \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 1 + \ln\ln\frac{2}{1-r}, \\ \frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 1 + \ln\left(1 + \ln\ln\frac{2}{1-r}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} = \underbrace{1 + \ln\left(1 + \ln\left(1 + \ldots + \ln\ln\frac{2}{1-r}\right)\right)}_{q-1 \text{ раз}}, \\ \frac{c\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta_1^2} = \underbrace{1 + \ln\left(1 + \ln\left(1 + \ldots + \ln\ln\frac{2}{1-r}\right)\right)}_{q \text{ раз}}. \end{cases}$$

Из последнего равенства системы имеем

$$\beta_1^* = \frac{\sqrt{c\left(\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{\ln_q \frac{2}{1-r}}},$$

где выражение $\ln_q \frac{2}{1-r}$ определено в (29). Для оптимального β_1^* из (39) находим

$$\Psi^{(1/2)}\left(A_q^*\right) = 2\sqrt{c\left(\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\ln_q \frac{2}{1-r}}.$$

Подставив последнее соотношение в (32), будем иметь

$$\varepsilon_{r,\,q}^* \sim 2\sqrt{2c\left(\frac{1}{2}\right)}(1-r)\sqrt{\ln_q \frac{2}{1-r}},\ \gamma = \frac{1}{2},\ r \to 1. \tag{40}$$

Пусть $\gamma > \frac{1}{2}$. В этом случае из (16) и (17) находим

$$\varepsilon_{r,\,q}^*\left(A_q\right) \sim 2^{\gamma+1} F_\gamma\left(A_q\right)(1-r),\ r \to 1,$$

где $F_\gamma\left(A_q\right)$ определена в (30). На основании этого представления заключаем, что в данном случае оптимальный набор параметров $\beta^* = \left(\beta_1^*,\ \beta_2^*,\ \ldots,\ \beta_q^*\right)$ не зависит от r и не влияет на скорость убывания мажоранты. Следовательно,

$$\varepsilon_{n,\,q}^* \sim 2^{\gamma+1} \inf_{A_q} F_\gamma\left(A_q\right)(1-r),\ \gamma > \frac{1}{2},\ r \to 1. \tag{41}$$

Из асимптотических равенств (36), (40) и (41) приходим к (27). Теорема 4 доказана.

Следствие 4. *Пусть* $q = 1$. *Тогда в условиях теоремы 2 для наилучшей мажоранты равномерных приближений при* $r \to 1$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_{n,1}^* \sim \begin{cases} (1+2\gamma)\left[\dfrac{2^{(1-\gamma)(1-2\gamma)}\left[c(\gamma)\right]^{2\gamma}\pi}{(1-2\gamma)^{\frac{1}{2\gamma}}\sin 2\pi\gamma}\right]^{\frac{1}{1+2\gamma}}(1-r)^{\frac{4\gamma}{1+2\gamma}},\ \gamma \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ 2\sqrt{2c\left(\dfrac{1}{2}\right)}(1-r)\sqrt{\ln\dfrac{2}{1-r}},\ \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ 2^\gamma \inf\limits_{\beta \in (0,\,1]}\left[\displaystyle\int_0^\beta \frac{u^{2\gamma-2}(\beta+u)\,du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^D \frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)\left(1-u^2\right)^\gamma}\right](1-r),\ \gamma > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $c(\gamma)$ *определена в формулировке теоремы 4.*

Аппроксимация некоторых элементарных функций

Известно (см., например, [11]), что многие элементарные функции можно представить в виде комбинаций функций Маркова. Рассмотрим функцию $f(z) = (z-1)^\gamma,\ \gamma \in (0,\ +\infty)\backslash\mathbb{N}$. Она является голоморфной в области $\mathbb{C}\backslash(1,\ +\infty)$. Стандартное применение интегральной формулы Коши приводит к соотношению

$$(w-1)^\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{(z-1)^\gamma}{z-w}dz,\ w \in \Omega,$$

где Ω – круг радиусом $a > 1$ с центром в начале координат и разрезом по отрезку $[1,\ a]$. Из последней формулы легко получить (см., например, [12]), что при $|w| < a,\ w \,\overline{\in}\, (1,\ a)$, справедливо равенство

$$(1-x)^\gamma = \hat{\mu}_1(x) + g(x),\ x \in [0,\ 1], \tag{42}$$

где

$$\hat{\mu}_1(x) = -\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_1^a \frac{(t-1)^\gamma}{t-x}dt,\ g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a}\frac{(1-z)^\gamma}{z-x}dz.$$

Функция $\hat{\mu}_1(x),\ x \in [0, 1]$, удовлетворяет условию теоремы 4. Следовательно,

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{\mu}_1(x)) \sim \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\begin{cases} \mu(q,\gamma)(1-r)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}},\ \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 2\sqrt{\pi-2}(1-r)\sqrt{\ln_q \frac{2}{1-r}},\ \gamma = \frac{1}{2}, \\ 2^{\gamma+1}\inf\limits_{A_q} F_\gamma(A_q)(1-r),\ \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

где $\mu(q,\gamma)$ определена в теореме 4; $F_\gamma(A_q)$ из (30). Исследуем приближения функции $g(x)$ суммами Абеля – Пуассона (2). В обозначениях (3) имеем

$$\varepsilon_{r,q}(g, x, A_q) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \delta_{k,q}(g, x, A_q),\ x \in [-1, 1], \tag{43}$$

где

$$\delta_{k,q}(g, x, A_q) = g(x) - s_n(g, x) = \frac{1}{(2\pi)^2 i}\int_{|z|=a}\frac{(1-z)^\gamma}{z-x}I_k(x,z)dz \tag{44}$$

– приближения функции $g(x)$ интегральным рациональным оператором Фурье – Чебышева (1) с набором параметров A_q,

$$I_k(x,z) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos u - \cos v}{z - \cos v}\left(\zeta\frac{\omega_q^k(\zeta)}{\omega_q^k(\xi)} - \xi\frac{\omega_q^k(\xi)}{\omega_q^k(\zeta)}\right)\frac{dv}{\zeta - \xi},\ \zeta = e^{iv},\ \xi = e^{iu},\ x = \cos u,$$

$\omega_q(\xi)$ определена в (8). Выполнив в интеграле $I_k(x, z)$ замену переменных по формулам $\zeta = e^{iv}$, $\xi = e^{iu}$, получим

$$I_k(x,z) = -\frac{1}{i\xi}\left(\overline{\omega_q^k(\xi)}J_1 - \xi\omega_q^k(\xi)J_2\right),\ \xi = e^{iu},\ x = \cos u, \tag{45}$$

где

$$J_1 = \int_{|\zeta|=1}\frac{1-\xi\zeta}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)}\omega_q^k(\zeta)d\zeta,\ J_2 = \int_{|\zeta|=1}\frac{1-\xi\zeta}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)}\frac{d\zeta}{\zeta\omega_q^k(\zeta)},$$

$$a_1 = z - \sqrt{z^2-1},\ a_2 = z + \sqrt{z^2-1},\ |z| = a > 1.$$

Величины a_1 и a_2 представляют собой функции переменного z, обратные к функции Жуковского, причем $|a_1| < 1$, $|a_2| > 1$. Следовательно, подынтегральная функция интеграла J_1 внутри единичного круга имеет в точке $\zeta = a_1$ простой полюс. Применяя теорему Коши о вычетах, находим, что

$$J_1 = 2\pi i\frac{1-\xi a_1}{a_1 - a_2}\omega_q^k(a_1). \tag{46}$$

Подынтегральная функция интеграла J_2 во внешности единичного круга имеет в точке $\zeta = a_2$ простой полюс, а на бесконечности – нуль не ниже второго порядка. Применяя теорему Коши о вычетах, получаем

$$J_2 = -2\pi i\frac{1-\xi a_2}{(a_2-a_1)a_2\omega_q^k(a_2)} = 2\pi i\frac{a_1-\xi}{a_1-a_2}\omega_q^k(a_1). \tag{47}$$

Подставив (46) и (47) в (45), будем иметь

$$I_k(x,z) = \frac{2\pi}{\sqrt{z^2-1}}\left(\overline{\omega_q^k(\xi)}(\bar{\xi}-a_1) + \omega_q^k(\xi)(\xi - a_1)\right)\omega_q^k(a_1),\ \xi = e^{iu},\ x = \cos u.$$

Из (44) при этом находим

$$\delta_{k,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=a}\frac{(1-z)^{\gamma}\left(\overline{\omega_q^k(\xi)}\left(\overline{\xi}-a_1\right)+\omega_q^k(\xi)(\xi-a_1)\right)}{(z-x)\sqrt{z^2-1}}\omega_q^k(a_1)dz,\ \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

Оценим полученное выражение. Выполнив в интеграле справа замену переменного по формуле $z=a\mathrm{e}^{i\theta}$, будем иметь

$$\left|\delta_{k,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)\right|=\frac{a}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(1-a\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{\gamma}\left(\overline{\omega_q^k(\xi)}\left(\overline{\xi}-b_1\right)+\omega_q^k(\xi)(\xi-b_1)\right)}{\left(a\mathrm{e}^{i\theta}-x\right)\sqrt{a^2\mathrm{e}^{2i\theta}-1}}\omega_q^k(a_1)i\mathrm{e}^{i\theta}d\theta\right|\leq$$

$$\leq\frac{a}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left|1-a\mathrm{e}^{i\theta}\right|^{\gamma}\left(\left|\overline{\xi}-b_1\right|+\left|\xi-b_1\right|\right)}{\left|a\mathrm{e}^{i\theta}-x\right|\sqrt{\left|a^2\mathrm{e}^{2i\theta}-1\right|}}\left|\omega_q(b_1)\right|^k d\theta,$$

где $b_1=a\mathrm{e}^{i\theta}-\sqrt{a^2\mathrm{e}^{2i\theta}-1}$, $|b_1|<1$, $\xi=\mathrm{e}^{iu}$, $x=\cos u$. Заметив, что $\left|\omega_q(b_1)\right|\leq\lambda<1$, получим

$$\left|\delta_{k,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)\right|\leq\frac{a}{2\pi}\lambda^k\int\limits_0^{2\pi}\Phi(\theta,\ x,\ a)d\theta, \tag{48}$$

где

$$\Phi(\theta,\ x,\ a)=$$

$$=\frac{\left(1-2a\cos\theta+a^2\right)^{\gamma/2}\left(\sqrt{1-2a\cos(u-\theta)+a^2}+\sqrt{1-2a\cos(u+\theta)+a^2}+2\left(1-2a^2\cos2\theta+a^4\right)^{1/4}\right)}{\sqrt{a^2-2ax\cos\theta+x^2}\left(1-2a^2\cos2\theta+a^4\right)^{1/4}}.$$

Поскольку равномерно по $x\in[0,\ 1]$ и $\theta\in[0,\ 2\pi]$

$$\Phi(\theta,\ x,\ a)\leq\frac{2(1+a)^{\gamma}\left(1+a+\sqrt{1+a^2}\right)}{(a-x)\sqrt{a^2-1}},\ a>1,$$

то из (48) находим, что

$$\left|\delta_{k,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)\right|\leq\frac{2a(1+a)^{\gamma}\left(1+a+\sqrt{1+a^2}\right)}{(a-x)\sqrt{a^2-1}}\lambda^k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Из последней оценки и формулы (43) получим

$$\left|\varepsilon_{r,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)\right|\leq(1-r)\sum_{k=0}^{+\infty}r^k\left|\delta_{k,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)\right|=$$

$$=(1-r)\frac{2a(1+a)^{\gamma}\left(1+a+\sqrt{1+a^2}\right)}{(a-1)\sqrt{a^2-1}}\sum_{k=0}^{+\infty}r^k\lambda^k=$$

$$=(1-r)\frac{2a(1+a)^{\gamma}\left(1+a+\sqrt{1+a^2}\right)}{(a-1)\sqrt{a^2-1}(1-r\lambda)}\leq(1-r)\frac{2a(1+a)^{\gamma}\left(1+a+\sqrt{1+a^2}\right)}{(a-1)\sqrt{a^2-1}(1-\lambda)},\ \lambda<1,\ a>1.$$

Другими словами, для любого набора параметров A_q равномерно по $r\in(0,\ 1)$ справедлива оценка $\left\|\varepsilon_{r,q}\left(g,\ x,\ A_q\right)\right\|_{C[-1,1]}=O(1-r)$. Из представления (42) и последних рассуждений мы получаем нижеприведенное следствие.

Следствие 5 (аппроксимация функции $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma\in(0,1)$). *Для любого натурального q справедливо соотношение*

$$\varepsilon^*_{r,\,q}\left((1-x)^{\gamma},\ [0,1]\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi\gamma}{\pi}\mu(q,\gamma)(1-r)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}+O(1-r),\ \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\ \dfrac{2\sqrt{\pi-2}}{\pi}(1-r)\sqrt{\ln_q\dfrac{2}{1-r}}+O(1-r),\ \gamma=\dfrac{1}{2},\\ O(1-r),\ \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}\tag{49}$$

Следствие 6. *Для наилучших равномерных приближений функции* $(1-x)^{\gamma},\ \gamma\in(0,1)$, *на отрезке* $[0,1]$ *суммами Абеля – Пуассона полиномиальных рядов Фурье – Чебышева при* $r\to 1$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon^{(0)}_{r}\left((1-x)^{\gamma},\ [0,1]\right)=\begin{cases}\dfrac{(1-r)^{2\gamma}}{2^{\gamma}\cos\pi\gamma}+O(1-r),\ \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}(1-r)\ln\dfrac{2}{1-r}+O(1-r),\ \gamma=\dfrac{1}{2},\\ O(1-r),\ \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Доказательство. Оно следует непосредственно из (26) и предыдущих рассуждений. Обратим внимание, что в полиномиальном случае имеем асимптотическую оценку равномерных приближений.

Известно [26, с. 96], что для наилучших равномерных полиномиальных приближений справедливо равенство

$$E_{2n}\left(|x|^{2\gamma},\ [-1,1]\right)=\frac{1}{2^{\gamma}}E_n\left((1-x)^{\gamma},\ [0,1]\right).$$

Используя аналогичные рассуждения, после соответствующих преобразований из (49) находим, что

$$\varepsilon^*_{r,\,2q}\left(|x|^{s},\ [-1,1]\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}\mu_1(q,s)(1-r)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}+O(1-r),\ s\in(0,1),\\ \dfrac{2\sqrt{\pi-2}}{\pi}(1-r)\sqrt{\ln_q\dfrac{2}{1-r}}+O(1-r),\ s=1,\\ O(1-r),\ s\in(1,2),\ r\to 1,\end{cases}$$

где

$$\mu_1(q,s)=\frac{2^{\frac{s}{2}}(1+s)}{s}\left[\frac{2^{(1-s)^q}s^{(1-s)^{q-1}}\left[c\left(\frac{s}{2}\right)\right]^s}{(1-s)^{\frac{1-(1-s)^{q-1}}{s}}}\left(\frac{\pi}{\sin\pi s}\right)^{(1-s)^{q-1}}\right]^{\frac{1}{1+s}},\ s\in(0,1).$$

Заключение

В работе изучены аппроксимации функций Маркова суммами Абеля – Пуассона интегральных операторов Фурье – Чебышева, ассоциированных с системой рациональных функций Чебышева – Маркова, при фиксированном числе геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции. Найдены интегральное представление приближений и оценка равномерных приближений. В случае, когда мера μ удовлетворяет условиям $d\mu(t)=\varphi(t)dt$ и $\varphi(t)\asymp(t-1)^{\gamma},\ \gamma>0$, получены оценки поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений, оптимальные значения параметров, при которых мажоранта имеет наибольшую скорость убывания. Отмечено, что при $\gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ порядок стремления к нулю равномерных приближений функций Маркова рациональными суммами Абеля – Пуассона даже с одним полюсом в открытой комплексной плоскости выше в сравнении с полиномиальным случаем. При $\gamma > \frac{1}{2}$ скорость убывания мажоранты имеет тот же порядок малости, что и в полиномиальном случае.

На основании проведенных исследований можно заключить, что суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов типа Фурье – Чебышева отражают особенности рациональной аппроксимации функций Маркова в условиях теоремы 2.

Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки равномерных приближений некоторых элементарных функций со степенной особенностью.

Библиографические ссылки

1. Натансон ИП. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона. *Доклады Академии наук СССР.* 1950;72(1):11–14.

2. Тиман АФ. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. *Доклады Академии наук СССР.* 1950;74(1):17–20.

3. Штарк ЭЛ. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона. *Математические заметки.* 1973;13(1):21–28.

4. Жук ВВ. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье. *Математические заметки.* 1968;4(1):21–32.

5. Русецкий ЮИ. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона. *Сибирский математический журнал.* 1968;9(1):136–144.

6. Жигалло ТВ. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона – Чебышева. *Проблемы управления и информатики.* 2018;3:46–58.

7. Джрбашян ММ. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. *Известия Академии наук Армянской ССР. Серия: Математика.* 1956;9(7):3–28.

8. Китбалян АА. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам. *Известия Академии наук Армянской ССР. Серия: Математика.* 1963;16(6):3–24.

9. Марков АА. Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей. В: *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля.* Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1948. с. 106–119.

10. Гончар АА. О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций. *Математический сборник.* 1978;105(2):147–163.

11. Ganelius T. Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function. In: Erdős P, Alpár L, Halász G, Sárközy A, editors. *Studies in pure mathematics. To the memory of Paul Turán.* Basel: Birkhäuser; 1978. p. 237–243.

12. Andersson J-E. Best rational approximation to Markov functions. *Journal of Approximation Theory*. 1994;76(2):219–232. DOI: 10.1006/jath.1994.1015.

13. Пекарский АА. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова. *Алгебра и анализ.* 1995;7(2): 121–132.

14. Vyacheslavov NS, Mochalina EP. Rational approximations of functions of Markov – Stieltjes type in Hardy spaces H_p, $0 < p \leq \infty$. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2008;63(4):125–134. DOI: 10.3103/S0027132208040013.

15. Старовойтов АП, Лабыч ЮА. Рациональная аппроксимация функций Маркова, порожденных борелевскими мерами степенного типа. *Проблемы физики, математики и техники.* 2009;1:69–73.

16. Пекарский АА, Ровба ЕА. Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций. *Математические заметки.* 1999;65(3):362–368.

17. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Japanese Journal of Mathematics: Transactions and Abstracts.* 1925;2:129–145. DOI: 10.4099/jjm1924.2.0_129.

18. Malmquist F. Sur la determination d’une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points. In: *Comptes rendus du Sixtiéme Congrés des mathématiciens scandinaves*. Copenhagen: [s. n.]; 1926. p. 253–259.

19. Джрбашян ММ, Китбалян АА. Об одном обобщении полиномов Чебышева. *Доклады Академии наук Армянской ССР.* 1964;38(5):263–270.

20. Ровба ЕА, Микулич ЕГ. Константы в рациональной аппроксимации функций Маркова – Стилтьеса с фиксированным числом полюсов. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2013;1:12–20.

21. Лунгу КН. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. *Математический сборник.* 1971;86(2):314–324.

22. Лунгу КН. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. *Сибирский математический журнал.* 1984;25(2):151–160.

23. Ровба ЕА. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации. *Доклады Академии наук БССР.* 1979;23(11):968–971.

24. Фихтенгольц ГМ. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2.* Москва: Физматлит; 2003. 864 с.

25. Поцейко ПГ, Ровба ЕА, Смотрицкий КА. Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье – Чебышева и аппроксимации функций Маркова. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:6–27.

26. Бернштейн СН. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1.* Москва: Главная редакция общетехнической литературы; 1937. 200 с. (Математика в монографиях).

References

1. Natanson IP. [On the order of approximation of a continuous 2π-periodic function using its Poisson integral]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 1950;72(1):11–14. Russian.

2. Timan AF. [Exact estimation of the remainder in the approximation of periodic differentiable functions by Poisson integrals]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 1950;74(1):17–20. Russian.

3. Stark EL. [Complete asymptotic decomposition for the upper face of the deviation of functions from Lip1 from the singular Abel – Poisson integral]. *Matematicheskie zametki.* 1973;13(1):21–28. Russian.

4. Zhuk VV. [On the order of approximation of a continuous 2π-periodic function using Feyer and Poisson averages of its Fourier series]. *Matematicheskie zametki.* 1968;4(1):21–32. Russian.

5. Rusetsky YuI. [On the approximation of continuous functions on a segment by Abel – Poisson means]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 1968;9(1):136–144. Russian.

6. Zhyhallo TV. Approximation of functions satisfying the Lipschitz condition on a finite segment of the real axis by Poisson – Chebyshev's integrals. *Problemy upravleniya i informatiki.* 2018;3:46–58. Russian.

7. Dzhrbashyan MM. [On the theory of Fourier series in terms of rational functions]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya: Matematika.* 1956;9(7):3–28. Russian.

8. Kitbalyan AA. [Decompositions by generalised trigonometric systems]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya: Matematika.* 1963;16(6):3–24. Russian.

9. Markov AA. [Two proofs of convergence of some continuous fractions]. In: *Izbrannye trudy po teorii nepreryvnykh drobei i teorii funktsii, naimenee uklonyayushchikhsya ot nulya* [Selected works on the theory of continuous fractions and the theory of functions least deviating from zero]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1948. p. 106–119. Russian.

10. Gonchar AA. [On the speed of rational approximation of some analytical functions]. *Matematicheskii sbornik.* 1978;105(2):147–163. Russian.

11. Ganelius T. Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function. In: Erdős P, Alpár L, Halász G, Sárközy A, editors. *Studies in pure mathematics. To the memory of Paul Turán.* Basel: Birkhäuser; 1978. p. 237–243.

12. Andersson J-E. Best rational approximation to Markov functions. *Journal of Approximation Theory.* 1994;76(2):219–232. DOI: 10.1006/jath.1994.1015.

13. Pekarskii AA. [Best uniform rational approximations to Markov functions]. *Algebra i analiz.* 1995;7(2):121–132. Russian.

14. Vyacheslavov NS, Mochalina EP. Rational approximations of functions of Markov – Stieltjes type in Hardy spaces H_p, $0 < p \leq \infty$. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2008;63(4):125–134. DOI: 10.3103/S0027132208040013.

15. Starovoitov AP, Labych YuA. [Rational approximation of Markov functions generated by Borel measures of power type]. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki.* 2009;1:69–73. Russian.

16. Pekarskii AA, Rouba EA. [Uniform approximations of Stieltjes functions by orthogonal projection on the set of rational functions]. *Matematicheskie zametki.* 1999;65(3):362–368. Russian.

17. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Japanese Journal of Mathematics: Transactions and Abstracts.* 1925;2:129–145. DOI: 10.4099/jjm1924.2.0_129.

18. Malmquist F. Sur la determination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points. In: *Comptes rendus du Sixtiéme Congrés des mathématiciens scandinaves.* Copenhagen: [s. n.]; 1926. p. 253–259.

19. Dzhrbashyan MM, Kitbalyan AA. [On a generalisation of Chebyshev polynomials]. *Doklady Akademii nauk Armyanskoi SSR.* 1964;38(5):263–270. Russian.

20. Rovba EA, Mikulich EG. Constants in rational approximation of Markov – Stieltjes functions with fixed number of poles. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control.* 2013;1:12–20.

21. Lungu KN. [On best approximations by rational functions with a fixed number of poles]. *Matematicheskii sbornik.* 1971;86(2):314–324. Russian.

22. Lungu KN. [On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 1984;25(2):151–160. Russian.

23. Rouba YA. [On a direct method in a rational approximation]. *Doklady Akademii nauk BSSR.* 1979;23(11):968–971. Russian.

24. Fichtenholz GM. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* [Course of differential and integral calculus. Volume 2]. Moscow: Fizmatlit; 2003. 864 p. Russian.

25. Patseika PG, Rouba YA, Smatrytski KA. On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:6–27.

26. Bernshtein SN. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi. Chast' 1* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable. Part 1]. Moscow: Glavnaya redaktsiya obshchetekhnicheskoi literatury; 1937. 200 p. (Matematika v monografiyakh). Russian.

Получена 05.10.2021 / исправлена 08.10.2021 / принята 12.10.2021.
Received 05.10.2021 / revised 08.10.2021 / accepted 12.10.2021.