
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 532.251

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ КАПЛИ С ОДНОСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

Е. В. АВДЕЙЧИК¹⁾, П. Н. КОНОН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуются формы относительного покоя ограниченных слоев жидкости на вращающейся горизонтальной плоскости в поле силы тяжести при наличии поверхностного натяжения. Рассматриваемые слои обладают односвязной свободной поверхностью и вращательной симметрией относительно линии действия угловой скорости. Математическая постановка данной задачи сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными и интегральными замыкающими условиями. Предлагается новый алгоритм численного решения полученной системы, изучается влияние различных безразмерных параметров на характеристики равновесных форм капли, и определяются критерии существования таких форм. Работа представляет теоретический интерес, поскольку рассматриваемая задача является одной из фундаментальных при исследовании

Образец цитирования:

Авдейчик ЕВ, Конон ПН. Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;3:79–90.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-79-90>

For citation:

Audzeichyk YaV, Konon PN. Numerical study of the relative equilibrium of a droplet with a simply connected free surface on a rotating plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;3:79–90. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-79-90>

Авторы:

Евгений Валерьевич Авдейчик – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета. Научный руководитель – П. Н. Конон.
Павел Николаевич Конон – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.

Authors:

Yauheni V. Audzeichyk, postgraduate student at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
zhenya_avdeychik@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-3854-5335>
Pavel N. Konon, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
kononpn@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1817-2313>

капиллярных явлений. Разработанная численная схема может также применяться в более широком классе дифференциальных уравнений. Результаты статьи могут быть использованы в практических задачах, связанных с нанесением покрытий, производством волокон и порошков центробежно-дисковым способом.

Ключевые слова: относительное равновесие; вращающаяся плоскость; вращательная симметрия; число Вебера; число Бонда; формула Лапласа; поверхностное натяжение; краевой угол смачивания.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Энергетические и ядерные процессы и технологии» (подпрограмма «Энергетические процессы и технологии», задание 2.11 «Волновые течения капиллярных струй, слоев, пленок в центробежных, постоянных и переменных температурных полях и их применение в технологических процессах»).

NUMERICAL STUDY OF THE RELATIVE EQUILIBRIUM OF A DROPLET WITH A SIMPLY CONNECTED FREE SURFACE ON A ROTATING PLANE

Ya. V. AUDZEICHYK^a, P. N. KONON^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: Ya. V. Audzeichyk (zhenya_avdeychik@mail.ru)

The paper investigates the shapes of relative rest of limited layers of liquid on a rotating horizontal plane in the field of gravity in the presence of surface tension. The layers under consideration have a simply connected free surface and rotational symmetry with respect to the line of action of the angular velocity. The mathematical formulation of this problem is reduced to a system of first-order ordinary differential equations with boundary and integral closing conditions. A new algorithm for the numerical solution of the resulting system is proposed, the influence of various dimensionless parameters on the characteristics of equilibrium droplet shapes is studied, and criteria for the existence of such shapes are determined. The paper is of theoretical interest, since the problem under consideration is one of the fundamental ones in the research of capillary phenomena. The developed numerical scheme can also be applied in a wider class of differential equations. The results of the article can be used in practical tasks related to coating, fiber and powder production by the centrifugal-disk method.

Keywords: relative equilibrium; rotating plane; rotational symmetry; Weber number; Bond number; Laplace formula; surface tension; contact angle.

Acknowledgements. The work was carried out with the financial support of the state program of scientific research «Energy and nuclear processes and technologies» (the subprogram «Energy processes and technologies», task 2.11 «Wave flows of capillary jets, layers, films in centrifugal, constant and variable temperature fields and their application in technological processes»).

Введение

Моделированию течения и равновесия слоев жидкости во вращающихся и неподвижных системах отсчета посвящено большое количество научной литературы. Широкий класс таких задач при различных формах твердой границы описан в монографии [1]. Стационарные вращающиеся объемы жидкости при отсутствии контакта с твердыми поверхностями в условиях невесомости и самогравитации исследуются в фундаментальном труде [2]. Покой тяжелой капли на горизонтальной плоскости рассматривается в статье [3]. В работе [4] анализируется устойчивость относительного равновесия невесомой жидкости, заключенной между двумя вращающимися параллельными пластинами. Течение внутри вращающихся слоев в однородном поле силы тяжести изучается в статьях [5–7], при этом в работах [5; 6] и [7] подложка представляет собой горизонтальный и вертикальный диски соответственно. Подобные исследования имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они играют важную роль в усовершенствовании методов моделирования поведения жидкости в процессах, связанных с межфазным взаимодействием. Их результаты могут использоваться при производстве порошков и волокон, а также при нанесении различных покрытий центробежными способами.

В настоящей работе рассматривается ограниченный жидкий слой в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения g , направленным вниз. Капля располагается на верхней стороне твердого горизонтального основания, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг некоторой

вертикальной оси l , и находится в состоянии покоя относительно подложки. Координату Z определим как расстояние до некоторой горизонтальной плоскости Π , взятое с положительным знаком, если рассматриваемая точка выше Π , и с отрицательным знаком – если ниже Π . Координату, соответствующую расстоянию до оси l , обозначим через R . На свободную поверхность капли (Σ) действует равномерное атмосферное давление (p_a). Жидкость считается несжимаемой (ρ – ее плотность; σ – коэффициент поверхностного натяжения на Σ ; θ – статический краевой угол смачивания на границе жидкой, газообразной и твердой фаз). Исследуются формы относительного равновесия капли, обладающие вращательной симметрией по отношению к оси l , при односвязной области контакта жидкости с основанием. Такая постановка задачи имеет место также в работах [1; 8–11]. Новизна настоящего исследования состоит в используемой вычислительной схеме. В частности, она позволяет аппроксимировать точное решение в конечном наборе точек, в то время как в методологической части [1] основное внимание уделяется аналитическим приближениям. При этом предлагаемый подход основан на решении задачи Коши с дальнейшей пристрелкой, а не на изначальном учете всех краевых условий, как описано в статьях [8; 9]. Отличие настоящего исследования от работ [10; 11] заключается в отсутствии отдельного способа реализации первого шага при начале итерационного процесса на оси l , а также в проведении оценки допустимых значений входных параметров расчета. Цель статьи – описать, обосновать и проверить алгоритм численного решения определенного класса задач, а также исследовать равновесные формы капель при помощи этого алгоритма.

Теоретические основы

По формуле Лапласа для поверхностного натяжения имеем

$$(p - p_a)|_{\Sigma} = \sigma H, \quad (1)$$

где p – давление жидкости в некоторой рассматриваемой точке поверхности Σ ; H – средняя кривизна поверхности Σ в этой точке, определяемая как сумма главных кривизн при положительном направлении векторов главных кривизн внутрь капли.

Распределение давления p во вращающейся тяжелой капле описывается формулой [10]

$$p = 0,5\rho\omega^2 R^2 - \rho gZ + p_0, \quad (2)$$

где p_0 – некоторая константа, которая зависит от конкретного значения p_a . Пусть L – характеристическое расстояние. Перейдем к безразмерным величинам r, z, H_0 по формулам

$$R = rL, Z = zL, H_0 = HL. \quad (3)$$

Определим кривую Λ , заданную в координатах (r, z) и являющуюся образующей поверхности вращения Σ . В качестве начала координат (r, z) выберем точку O пересечения кривой Λ и оси вращения. Из формул (1)–(3) получаем следующую систему для естественной параметризации кривой Λ [8; 10]:

$$\begin{aligned} r' &= a, \quad z' = b, \quad a' = (H_0(r, z) + br^{-1})b, \quad b' = -(H_0(r, z) + br^{-1})a, \\ H_0(r, z) &= -X + 0,5We \cdot r^2 - Bo \cdot z, \end{aligned} \quad (4)$$

где штрих означает производную по натуральному параметру t кривой Λ , соответствующему длине участка этой кривой от ее начала до рассматриваемой точки; X – безразмерная средняя кривизна в центре капли, рассчитываемая как удвоенная кривизна Λ в точке на оси Oz ; We и Bo – числа Вебера и Бонда соответственно, вычисляемые по формулам

$$We = \rho\omega^2 L^3 \sigma^{-1}, \quad Bo = \rho g L^2 \sigma^{-1}. \quad (5)$$

В настоящей работе рассматривается только случай $Bo \geq 0$. Положительное значение X указывает на наличие прогиба в центре капли, отрицательное значение X – на отсутствие. Положительное направление параметризации кривой Λ выберем так, чтобы началу кривой ($t = 0$) соответствовала точка $(r, z) = (0, 0)$, а концу – точка пересечения кривой Λ с твердой поверхностью, где примем $t = t_{\text{end}}$.

Система (4) замыкается краевыми условиями

$$r(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad a(0) = 1, \quad b(0) = 0, \quad (6)$$

$$a(t_{\text{end}}) = \cos \theta, \quad b(t_{\text{end}}) = -\sin \theta. \quad (7)$$

В силу монотонности функции $a(t)$ при $g \geq 0$ согласно работе [10] достаточно проверки выполнения только первого равенства из условий (7). Краевой угол должен находиться в диапазоне $0 < \theta \leq \pi$.

Массу капли (M) можно найти по формуле

$$M = \rho V, \quad V = L^3 v, \quad v = 2\pi \int_0^{t_{\text{end}}} r(t)(z(t) - z(t_{\text{end}}))a(t)dt, \quad (8)$$

где V и v – размерный и безразмерный объемы капли соответственно. Если необходимо определить форму капли при заданной массе, то характеристическое расстояние L можно рассчитать по формуле

$$L = \sqrt[3]{V}. \quad (9)$$

Тогда значения We и Bo вычисляются по формулам (5), а параметр X – из условия $v = 1$.

В связи с тем, что при $t = 0$ согласно уравнениям (4) и условиям (6) имеет место неопределенность типа $0 : 0$, стандартные численные методы, такие как методы Рунге – Кутты, без дополнений не подходят для решения данной системы. Обозначим $c = \frac{b}{r}$. Тогда система (4) примет вид

$$r' = a, \quad z' = cr, \quad a' = (H_0(r, z) + c)cr, \quad c' = -(H_0(r, z) + 2c)\frac{a}{r}, \quad (10)$$

где $H_0(r, z)$ определяется таким же образом, как и в системе (4). Граничные условия (6) для начала кривой Λ из предположения о конечности $c'(0)$ заменятся на

$$r(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad a(0) = 1, \quad c(0) = \frac{X}{2}. \quad (11)$$

Как условие для конца кривой Λ примем первое равенство (7).

В работах [10; 11] первым шагом является построение многочленов Тейлора функций $r(t)$, $z(t)$, $a(t)$, $c(t)$ различных порядков в окрестности $t = 0$. Оно выполняется путем последовательного дифференцирования уравнений (10) в предположении конечности производных всех порядков $c(t)$ при $t = 0$. Со второго шага итерационного процесса используются другие алгоритмы определения приближенных значений функций в узлах сетки. При этом длина первого шага должна быть достаточно большой, чтобы в ходе дальнейшего расчета исключить деление на очень маленькое значение. В настоящем исследовании будем использовать алгоритм, не требующий отдельного подхода к первой итерации. Рассмотрим следующую задачу Коши, представляющую собой более общий случай системы (10), (11):

$$x'_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n) + g_i(x_1, \dots, x_{n+1})x_1 = F_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$x'_{n+1}(t) = \frac{f_{n+1}(x_1, \dots, x_n) - f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}}{x_1}, \quad (12)$$

$$x_i(0) = X_i, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad X_1 \geq 0, \quad (13)$$

где $f_i(x_1, \dots, x_n)$ при $i = 1, \dots, n+2$, $g_j(x_1, \dots, x_{n+1})$ при $j = 1, \dots, n$ – достаточно гладкие функции относительно своих аргументов, чтобы решение системы (12), (13) являлось бесконечно гладким на всей области определения ($0 \leq t \leq t_{\text{end}}$). При этом пусть при $0 \leq t \leq t_{\text{end}}$ выполняется неравенство $x_1(t) \geq X_1$ и существует значение $\varepsilon \ll 1$ такое, что $f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)h + x_1 \geq (1 - \varepsilon)h$ для любого положительного h . Вторые производные функций $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) определяются по формулам

$$x''_i(t) = F_1 g_i + (f_{n+1} - f_{n+2})\partial_{n+1} g_i + \sum_{j=1}^n (\partial_j f_i + x_1 \partial_j g_i) F_j = 2G_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где f_i , g_j и F_j соответствуют $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $g_j(x_1, \dots, x_{n+1})$ и $F_j(x_1, \dots, x_{n+1})$ при $i = 1, \dots, n+2$ и $j = 1, \dots, n$; ∂_k – частная производная по k -му аргументу. Для двух произвольных точек $t = t_0$ и $t = t_1$, где $0 \leq t_0 < t_1 \leq t_{\text{end}}$ и $t_1 - t_0 = h \ll 1$, введем обозначения $x_i^0 = x_i(t_0)$, $x_i^1 = x_i(t_1)$, $x_i^{\frac{1}{2}} = x_i\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)$ ($i = 1, \dots, n+1$). Пусть

$$y_i^1 = P_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0; h), \quad y_i^{\frac{1}{2}} = P_i\left(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0; \frac{h}{2}\right),$$

$$P_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0; h) = x_i^0 + F_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)h + G_i(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)h^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

С учетом формул (12), (14), (15) из теоремы Тейлора получим

$$x_i^1 = y_i^1 + O(h^3), \quad x_i^{\frac{1}{2}} = y_i^{\frac{1}{2}} + O(h^3), \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

$$x_{n+1}^0 = x_{n+1}^1 + \left(f_{n+2}(x_1^1, \dots, x_n^1) x_{n+1}^1 - f_{n+1}(x_1^1, \dots, x_n^1) \right) \frac{h}{x_1^1} + O(h^2). \quad (17)$$

Из выражений (16) и (17) с учетом ограничения, наложенного на функцию $f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)$, следует:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= p_{n+1}^1 + u(t_0)h^2 + O(h^3), \quad x_{n+1}^{\frac{1}{2}} = p_{n+1}^{\frac{1}{2}} + u(t_0)\frac{h^2}{4} + O(h^3), \\ p_{n+1}^1 &= P_{n+1}(y_1^1, \dots, y_n^1, x_{n+1}^0; h), \quad p_{n+1}^{\frac{1}{2}} = P_{n+1}\left(y_1^{\frac{1}{2}}, \dots, y_n^{\frac{1}{2}}, x_{n+1}^0; \frac{h}{2}\right), \\ x_{n+1}^1 &= P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, x_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) + u\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{4} + O(h^3), \\ P_{n+1}(y_1^1, \dots, y_n^1, x_{n+1}^0; h) &= \frac{x_{n+1}^0 y_1^1 + f_{n+1}(y_1^1, \dots, y_n^1)h}{y_1^1 + f_{n+2}(y_1^1, \dots, y_n^1)h}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $u(t_0)$ – функция ошибки второго порядка малости. Предположим, что она обладает следующим свойством: $u(t_0 + \Delta) = u(t_0) + O(\Delta)$ для любого $\Delta \ll 1$. С учетом этого, а также с учетом второго равенства из (18) пятое выражение из (18) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, p_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) + S(y_1^1, \dots, y_n^1; h)u(t_0)\frac{h^2}{4} + O(h^3), \\ S(y_1^1, \dots, y_n^1; h) &= 1 + \frac{y_1^1}{y_1^1 + f_{n+2}(y_1^1, \dots, y_n^1)\frac{h}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сопоставив выражения для x_{n+1}^1 из формул (18), (19), найдем $u(t_0)h^2$ и получим

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= y_{n+1}^1 + O(h^3), \\ y_{n+1}^1 &= p_{n+1}^1 + 4 \frac{P_{n+1}\left(y_1^1, \dots, y_n^1, p_{n+1}^{\frac{1}{2}}; \frac{h}{2}\right) - p_{n+1}^1}{4 - S(y_1^1, \dots, y_n^1; h)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно формулам (16) и (20) полученные значения y_i^1 приближают точные значения x_i^1 ($i = 1, \dots, n+1$) с погрешностью порядка h^3 . Алгоритм их определения может быть использован для численного решения системы (12), (13) с ошибкой третьего порядка малости на каждом шаге. Такой итерационный процесс заключается в определении набора точек $t = t_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0, t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$) и последовательном нахождении значений y_i^k ($i = 1, \dots, n+1$), аппроксимирующих $x_i(t_k)$: $y_i^0 = X_i$ ($i = 1, \dots, n+1$), y_i^{k+1} определяются из y_i^k по формулам

$$\begin{aligned} y_i^{k+1} &= P_i(y_1^k, \dots, y_{n+1}^k; h_k), \quad y_i^{k+\frac{1}{2}} = P_i\left(y_1^k, \dots, y_{n+1}^k; \frac{h_k}{2}\right), \quad i = \overline{1, n}; \\ p_{n+1}^{k+1} &= P_{n+1}(y_1^{k+1}, \dots, y_n^{k+1}, y_{n+1}^k; h_k), \quad p_{n+1}^{k+\frac{1}{2}} = P_{n+1}\left(y_1^{k+\frac{1}{2}}, \dots, y_n^{k+\frac{1}{2}}, y_{n+1}^k; \frac{h_k}{2}\right), \\ y_{n+1}^{k+1} &= p_{n+1}^{k+1} + 4 \frac{P_{n+1}\left(y_1^{k+1}, \dots, y_n^{k+1}, p_{n+1}^{k+\frac{1}{2}}; \frac{h_k}{2}\right) - p_{n+1}^{k+1}}{4 - S(y_1^{k+1}, \dots, y_n^{k+1}; h_k)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $h_k = t_{k+1} - t_k$.

Системы (10), (11) представляют собой частный случай системы (12), (13). Тогда согласно формулам (15), (18) функции P_i имеют вид

$$\begin{aligned} P_r(r, z, a, c; h) &= r + ah + 0,5(H_0(r, z) + c)rch^2, \\ P_z(r, z, a, c; h) &= z + rch - 0,5(H_0(r, z) + c)ah^2, \\ P_a(r, z, a, c; h) &= a + (H_0(r, z) + c)rch + \\ &+ 0,5h^2(rc(\partial_1 H_0(r, z)a + \partial_2 H_0(r, z)rc) - a(H_0^2(r, z) + 3H_0(r, z)c + 3c^2)), \\ P_c(r, z, a, c; h) &= (rc - H_0(r, z)ah)(r + 2ah)^{-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где ∂_1 и ∂_2 – частные производные по первому и второму аргументам соответственно. Пусть для некоторой последовательности точек $t = t_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0, t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$) значения r_k, z_k, a_k, c_k аппроксимируют $r(t_k), z(t_k), a(t_k)$ и $c(t_k)$ соответственно. Величины r_k, z_k, a_k, c_k будем определять по алгоритму (21) с учетом формулы (22). Тогда итерационный процесс запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \{t_0; r_0; z_0; a_0; c_0\} &= \left\{0; 0; 0; 1; \frac{X}{2}\right\}, t_{k+1} = t_k + h_k, r_{k+1} = P_r(r_k, z_k, a_k, c_k; h_k), \\ r_{k+\frac{1}{2}} &= P_r\left(r_k, z_k, a_k, c_k; \frac{h_k}{2}\right), z_{k+1} = P_z(r_k, z_k, a_k, c_k; h_k), \\ z_{k+\frac{1}{2}} &= P_z\left(r_k, z_k, a_k, c_k; \frac{h_k}{2}\right), a_{k+1} = P_a(r_k, z_k, a_k, c_k; h_k), \\ a_{k+\frac{1}{2}} &= P_a\left(r_k, z_k, a_k, c_k; \frac{h_k}{2}\right), p_{k+1} = P_c(r_{k+1}, z_{k+1}, a_{k+1}, c_k; h_k), \\ p_{k+\frac{1}{2}} &= P_c\left(r_{k+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}, a_{k+\frac{1}{2}}, c_k; \frac{h_k}{2}\right), c_{k+\frac{1}{2}} = P_c\left(r_{k+1}, z_{k+1}, a_{k+1}, p_{k+\frac{1}{2}}; \frac{h_k}{2}\right), \\ c_{k+1} &= p_{k+1} + 4(r_{k+1} + a_{k+1}h_k)(2r_{k+1} + 3a_{k+1}h_k)^{-1}\left(c_{k+\frac{1}{2}} - p_{k+1}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Проведем сравнение описанного алгоритма со стандартным методом расчета с таким же ожидаемым порядком погрешности. Разложение решения в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$ при $h \ll 1$ дает

$$\begin{aligned} r(h) &= h + O(h^3), z(h) = X \frac{h^2}{4} + O(h^3), a(h) = 1 - X^2 \frac{h^2}{8} + O(h^3), \\ c(h) &= \frac{X}{2} + \left(\text{Bo} \frac{X}{2} - \text{We}\right) \frac{h^2}{8} + O(h^3). \end{aligned} \quad (24)$$

Первый шаг вспомогательного расчета будем осуществлять исходя из формул (24). Все последующие шаги выполним с помощью исправленного метода Эйлера, который также имеет второй порядок точности на каждом шаге. Таким образом, введенные значения t_k, r_k, z_k, a_k, c_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) будут определяться согласно следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \{t_1; r_1; z_1; a_1; c_1\} &= \left\{h_0; h_0; X \frac{h_0^2}{4}; 1 - X^2 \frac{h_0^2}{8}; \frac{X}{2} + \left(\text{Bo} \frac{X}{2} - \text{We}\right) \frac{h_0^2}{8}\right\}, \\ x_k &= \{r_k; z_k; a_k; c_k\}, s_{1k} = f(x_k), s_{2k} = f(x_k + s_{1k}h_k), x_{k+1} = x_k + (s_{1k} + s_{2k})\frac{h_k}{2}, \\ t_{k+1} &= t_k + h_k, f(\{r; z; a; c\}) = \left\{a; cr; (H_0(r, z) + c)cr; -(H_0(r, z) + 2c)\frac{a}{r}\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Результаты и их обсуждение

Ошибкой вычислений ($\Delta_{\text{err}}(t)$) для аппроксимации кривой Λ будем называть величину $rc - r(0,5X - 0,125\text{We}r^2)$, если $\text{Bo} = 0$, или величину $a^2 + c^2r^2 - 1$ в противном случае. Если $r(t)$, $z(t)$, $a(t)$ и $c(t)$ – точное решение, то $\Delta_{\text{err}}(t) \equiv 0$. Расхождением результатов, полученных двумя различными способами, назовем функцию $\Delta_{\text{dif}}(t)$, определенную при натуральном параметре t от 0 до минимального значения из двух рассчитанных значений t_{end} и равную для каждого конкретного t из этого промежутка расстоянию между точками $(r(t), z(t))$ двух полученных кривых. Показатели ошибки вычислений $\lambda(\Delta_{\text{err}}(t))$ и расхождения результатов $\lambda(\Delta_{\text{dif}}(t))$ определим с помощью функционала λ , который необходим для более удобного отображения накопления погрешности на всей области определения:

$$\lambda(\Delta(t)) = \lg \left(10^{10} \int_0^t |\Delta(t)| dt + 1 \right), \quad \int_0^t |\Delta(t)| dt = 10^{-10} (10^{\lambda(\Delta(t))} - 1).$$

На рис. 1 изображены $\lambda(\Delta_{\text{err}}(t))$ и $\lambda(\Delta_{\text{dif}}(t))$ при использовании различных алгоритмов и плотностей сеток. Черные линии относятся к ошибкам вычислений, красные – к расхождению полученных результатов. Все графики соответствуют $X = 0,8$; $\text{We} = 0,8$.

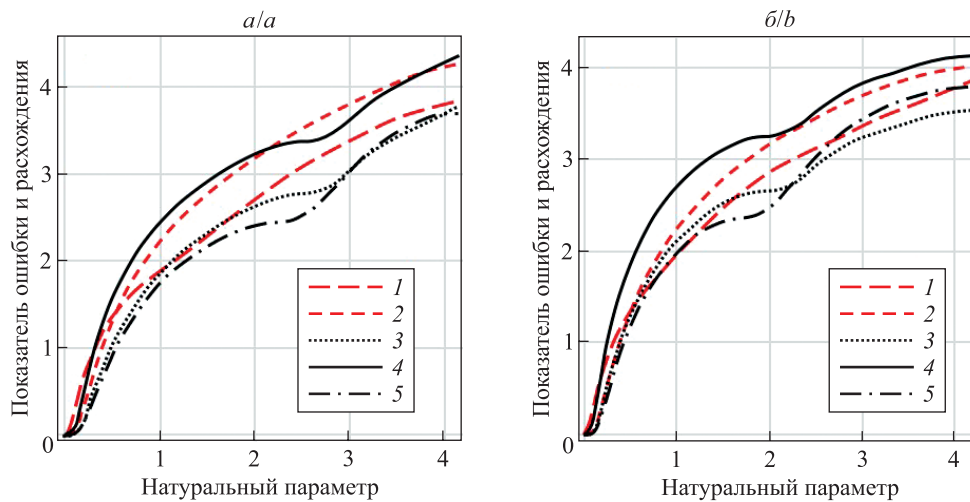


Рис. 1. Оценка накопления погрешности в ходе итерационного процесса при числах Бонда, равных 1 (а) и 0 (б). Показатели расхождения результатов, полученных с помощью алгоритма (23) с шагами 0,001 и 0,0005 (1); алгоритмов (23) и (25) с шагом 0,001 (2). Показатель ошибки вычислений при использовании алгоритма (23) с шагом 0,0005 (3); алгоритма (23) с шагом 0,001 (4); алгоритма (25) с шагом 0,001 (5)

Fig. 1. Estimation of error accumulation during the iterative process with Bond numbers equal to 1 (a) and 0 (b). Indicators of difference of results obtained using algorithm (23) with steps 0.001 and 0.0005 (1); algorithms (23) and (25) with steps 0.001 (2). Calculation error indicator when using algorithm (23) with steps 0.0005 (3); algorithm (23) with steps 0.001 (4); algorithm (25) with steps 0.001 (5)

Сравнение сплошных и пунктирных графиков показывает, что соответствующая им ошибка расчета обусловлена в первую очередь погрешностью алгоритма, а не машинным округлением, поскольку увеличение числа итераций привело к уменьшению ошибки, а не к росту. При этом сокращение длины шага в 2 раза вызвало уменьшение ошибки $\Delta_{\text{err}}(t)$ приблизительно в 4 раза, поскольку величина $\lambda(\Delta_{\text{err}}(t))$ на основной части кривой Λ уменьшилась примерно на $\lg(4) \approx 0,6$. Такой эффект от уменьшения шага согласуется со вторым порядком ожидаемой накапливающейся погрешности при больших значениях параметра t . Анализ сплошных и штрихпунктирных графиков позволяет сделать вывод о схожей точности методов расчета по схемам (25) и (23). При этом алгоритм (21), частным случаем которого является схема (23), не требует предварительной оценки значения X_1 , за исключением проверки выполнения условия, наложенного на функции $f_{n+2}(x_1, \dots, x_n)$ и $x_1(t)$, и может быть использован без изменений как при $X_1 = 0$, так и при $X_1 > 0$. В то же время использование, например, методов Рунге – Кутты подразумевает отдельные подходы к различным значениям начальных параметров X_i ($i = 1, \dots, n+1$). Это выражается

в необходимости не только различать случаи $X_1 = 0$ и $X_1 > 0$, но и соотносить величину шага со значением X_1 или переходить к новым начальным условиям, если $X_1 \ll 1$. В качестве примера рассмотрим систему (10) при входных параметрах $Bo \neq 0$, $r(0) = r_0 > 0$, $z(0) = 0$, $a(0) = \left(1 - (r_0 c_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $c(0) = c_0$, где $0 < h \ll 1$ – длина шага, используемого при численном расчете, а r_0 и c_0 – произвольные числа, $|r_0 c_0| \ll 1$. Данная задача рассматривается в отрыве от физического смысла для демонстрации особенностей использования различных численных методов и областей их применения. Ошибка Δ_{err} при использовании схемы (21) для решения этой системы имеет порядок $\left(c_0 - \frac{X}{2}\right)^2 h^2$, т. е. не зависит от r_0 , и для достижения оптимальной точности длину шага не нужно соотносить со значением $r(t)$. Кроме того, результаты моделирования демонстрируют, что такая ошибка сохраняется и при $r_0 = 0$, когда методы Рунге – Кутты не применимы. Использование исправленного метода Эйлера для описанной задачи при $h \geq r_0$ дает ошибку $\Delta_{\text{err}} \sim \left(c_0 - \frac{X}{2}\right)^2 \frac{h^4}{r_0^2}$, что больше ожидаемой погрешности данного метода, поэтому при выборе шага необходимо учитывать не только $\left(c(t) - \frac{X}{2}\right)$, но и $r(t)$, чтобы значение $\left(c(t) - \frac{X}{2}\right)h$ нигде не оказалось намного больше, чем $r(t)$. Если r_0 не превышает допустимую погрешность, то более оптимальным является переход к начальным условиям (11) и алгоритму (25). Таким образом, алгоритм (21) для рассматриваемого класса систем дифференциальных уравнений является более универсальным и простым в применении, чем методы Рунге – Кутты.

В дальнейших вычислениях будем использовать переменный шаг, определяемый следующим образом. Перед началом расчета конкретной кривой задается некоторое малое число h_c , а в ходе итерационного процесса по алгоритму (23) каждой новой k -й точке в соответствие ставится приближенная кривизна $K_k = |H_0(r_k, z_k) + c_k|$ аппроксимации Λ в этой точке. После этого находится значение h_k : если $K_k \leq 1$, то $h_k = h_c$, в противном случае $h_k = h_c K_k^{-1}$. Это число h_c в дальнейшем будем называть характерным шагом сетки.

Воспроизведение с помощью алгоритма (23) представленных в работе [9] результатов моделирования равновесных меридианных кривых и сравнение полученных характеристик слоев при $\theta = \frac{\pi}{4}$ демонстрируют хорошее согласование используемых методов.

Из вида системы (4) следует, что при $Bo \neq 0$, $We \neq 0$ форма кривой Λ без учета масштаба определяется только значениями $S_1 = \frac{Bo^3}{We^2}$ и $S_2 = \frac{X \cdot Bo}{We}$, которые будем называть первым и вторым параметрами формы соответственно. Таким образом, можно ввести понятия базисных кривых Λ и капель при $Bo = We$, когда $S_1 = Bo$ и $S_2 = X$. Тогда кривая, подобная некоторой базисной, соответствующая другим числам Bo и We , но тем же значениям S_1 и S_2 , получается из данной базисной кривой путем гомотетии относительно точки O с коэффициентом $\frac{Bo}{We} = \frac{1}{Fr}$, где Fr – число Фруда.

На рис. 2 изображена зависимость безразмерной высоты базисной капли от S_2 при различных значениях S_1 и краевом угле $\theta = \pi$. Графики безразмерной высоты капли в центре (z_c) изображены черными линиями, графики максимальной безразмерной высоты капли ($z_m = z_{\text{max}} + z_c$) при $S_2 > 0$ – красными. Если $S_2 \leq 0$, то эти высоты совпадают. Здесь z_{max} – максимальное значение $z(t)$ при t от 0 до t_{end} . Как видно из графиков, при увеличении S_2 до некоторого значения $S_{20}(S_1, \theta) < 0$ безразмерная высота базисной капли также растет. Дальнейшее увеличение S_2 приводит к падению высоты, при этом при меньших значениях S_1 это падение происходит быстрее. Уменьшение S_1 также приводит к росту высоты базисной капли при достаточно малых S_2 и к уменьшению значений $S_2 = S_{21}(S_1, \theta)$, при которых происходит касание подложки и свободной поверхности капли в центре. Величину $S_{21}(S_1, \theta)$ будем называть первой критической формой. Можно выделить и вторую критическую форму $S_2 = S_{22}(S_1)$ – наименьшее значение S_2 , при котором граничное условие (7) не выполняется, поскольку на кривой Λ возникает точка, где $b = 1$. Для таких кривых Λ определим t_{end} как наименьшее значение натурального параметра t , при котором $b(t_{\text{end}}) = 1$. На рис. 3 изображены зависимости $S_{22}(S_1)$ (сплошной график), $S_{21}(S_1, \pi)$ (штриховой график), $S_{21}\left(S_1, \frac{\pi}{2}\right)$ (пунктирный график).

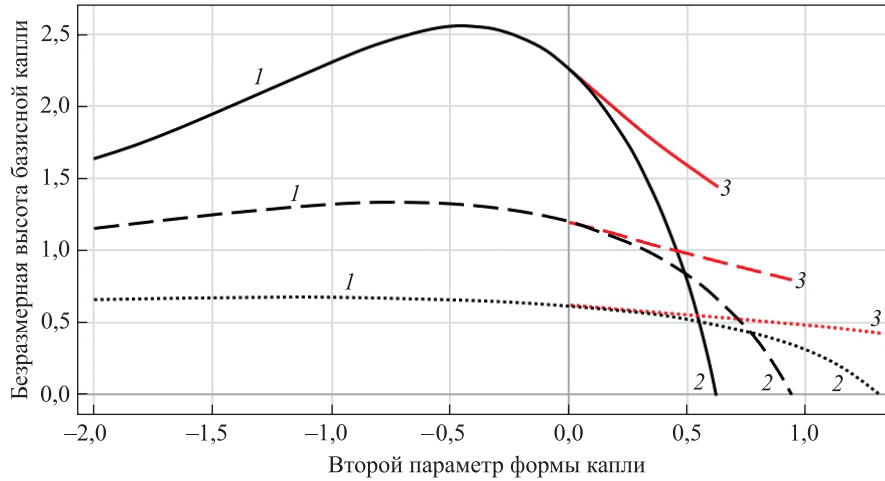


Рис. 2. Зависимость безразмерной высоты базисной капли от второго параметра формы в ее центре (1, 2), в наивысшей точке (1, 3). Сплошные линии соответствуют первому параметру формы 1/5, штриховые линии – первому параметру формы 1, пунктирные линии – первому параметру формы 5

Fig. 2. The dependence of the dimensionless height of a base drop on the second shape parameter in its center (1, 2), at the highest point (1, 3). Solid lines correspond to the first shape parameter equal to 1/5, dashed lines – to the first shape parameter equal to 1, dotted lines – to the first shape parameter equal to 5

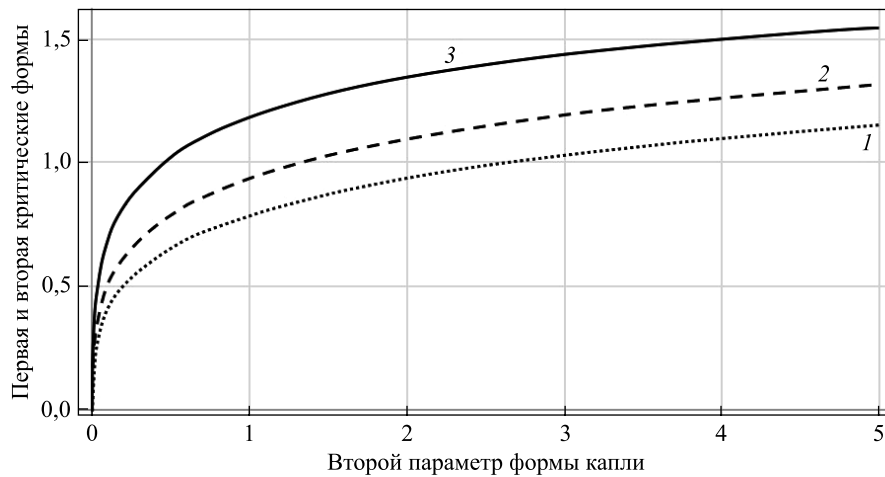


Рис. 3. Зависимость критических значений второго параметра формы капли от первого параметра: 1 – первая критическая форма при краевом угле 90°; 2 – первая критическая форма при краевом угле 180°; 3 – вторая критическая форма

Fig. 3. The dependence of the critical values of the second shape parameter of a drop on the first parameter: 1 – the first critical shape when the contact angle is 90°; 2 – the first critical shape when the contact angle is 180°; 3 – the second critical shape

Можно видеть, что по мере увеличения S_2 первым достигается $S_{21}(S_1, \theta)$, а затем $S_{22}(S_1)$. Из определения $S_{21}(S_1, \theta)$ и характера зависимости высоты z_c базисной капли от S_2 следует, что если $\theta_1 < \theta_2$, то $S_{21}(S_1, \theta_1) < S_{21}(S_1, \theta_2)$. Пусть для конкретных значений We, Bo касанию свободной поверхности и подложки в центре капли соответствует $X = X_{01}(We, Bo, \theta)$, а $X_{02}(We, Bo)$ является точной нижней гранью множества значений X , при которых в одной из точек кривой Λ достигается равенство $b = 1$. Тогда при $Bo \neq 0, We \neq 0$ $X_{01}(We, Bo, \theta) = S_{21}\left(\frac{Bo^3}{We^2}, \theta\right) \cdot \frac{We}{Bo}$, $X_{02}(We, Bo) = S_{22}\left(\frac{Bo^3}{We^2}\right) \cdot \frac{We}{Bo}$. Кроме того, можно точно установить, что $X_{02}(0, Bo) = 0$ и $X_{02}(We, 0) = 3\left(\frac{We}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ [1]. Значение $X_{01}(0, Bo, \theta)$ не определено ввиду отсутствия прогиба. На рис. 4 изображены кривые, полученные преобразованием

$(r(t), z(t)) \rightarrow (r(t), z(t) - z(t_{\text{end}}))$ из кривых Λ , рассчитанных для $X = 0,995 X_{01}(\frac{1}{5}, 3, \pi)$ (штриховая линия), $X = X_{01}(\frac{1}{5}, 3, \pi)$ (сплошная линия), $X = 0,9995 X_{02}(\frac{1}{5}, 3)$ (штрихпунктирная линия), $X = 1,0005 X_{02}(\frac{1}{5}, 3)$ (пунктирная линия). При этом $X_{01}(\frac{1}{5}, 3, \pi) \approx 0,9982$, $X_{02}(\frac{1}{5}, 3) \approx 0,1323$.

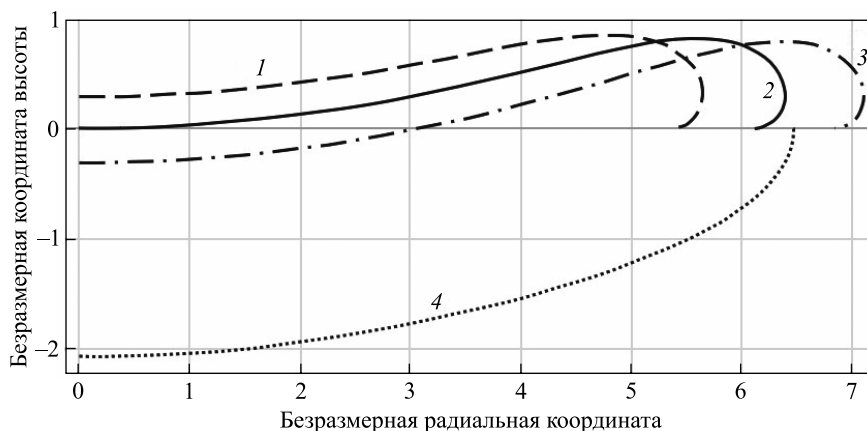


Рис. 4. Равновесные меридианные кривые при первом параметре формы, меньшем, чем первая критическая форма (1), равном ей (2), большем, чем первая критическая форма, но меньшем, чем вторая (3), большем, чем вторая критическая форма (4)

Fig. 4. Equilibrium meridian curves when the first shape parameter is smaller than the first critical shape (1), equal to it (2), larger than the first critical shape, but smaller than the second one (3), larger than the second critical shape (4)

Данные графики демонстрируют существенные различия в формах капли при малых изменениях параметра X вблизи значения $X_{02}(\text{We}, \text{Bo})$ при больших S_1 . Таким образом, при нахождении равновесных форм, близких к критическим, путем решения задачи Коши с заданным X даже незначительная погрешность данного параметра может привести к серьезным изменениям искомых форм. В таких случаях рекомендуется применять другие методы. Для проверки точности графиков, изображенных на рис. 4, все используемые значения X увеличивались на величину 0,00001. Данное изменение почти не отразилось на формах графиков, так что полученные результаты достаточно устойчивы по X для используемого алгоритма.

Если рассматривается кривая Λ , заданная некоторыми значениями S_1 , S_2 и числом Фруда $\text{Fr} = \text{Fr}_1$, то подобная ей базисная имеет те же значения S_1 , S_2 при числе Фруда $\text{Fr} = 1$. Если при этом для первой кривой выполнено $v = 1$, т. е. характеристическое расстояние определяется по формуле (9), то согласно (8) для соответствующей базисной кривой $v = \text{Fr}_1^3$. Данное свойство использовалось при построении графиков на рис. 5, на котором продемонстрированы зависимости безразмерных характерных диаметров и высот капель от числа Фруда при $v = 1$, $\theta = \pi$ и различных значениях S_1 . Безразмерный диаметр области контакта определим как $d_c = 2r_c$, безразмерный диаметр прогиба при $X > 0$ – как $d_f = 2r(t_{\text{max}})$, где t_{max} – точка максимума функции $z(t)$. Безразмерным диаметром капли d_m будем называть удвоенное максимальное значение $r(t)$ при t от 0 до t_{end} . Диаметрам элементов капли на рис. 5 соответствуют черные линии, высотам – красные. В качестве параметра кривых на рис. 5 может быть выбран S_2 . В концах всех кривых выполняется $S_2 = S_{21}(S_1, \theta)$. Соответствующее число Фруда обозначим $\text{Fr}_{21}(S_1, \theta)$. В начальных точках графиков, относящихся к величине d_f , выполняется $S_2 = 0$, $d_f = 0$. В началах остальных кривых $S_2 = -\infty$, $\text{Fr} = 0$, $d_c = 2\kappa^{-1}\sin\theta$, $z_c = z_m = \kappa^{-1}(1 - \cos\theta)$, $\kappa^3 = \frac{\pi(2 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)^2}{3}$, поскольку

при $\text{Fr} = 0$ и конечных значениях S_1 капля представляет собой сегмент шара радиусом $\frac{1}{\kappa}$. Согласно рис. 5 уменьшение S_1 приводит к растяжению представленных графиков вдоль оси абсцисс, т. е. к росту числа Фруда для фиксированного характерного безразмерного диаметра или высоты. На всех изображенных графиках увеличение S_2 при постоянном S_1 ведет к увеличению диаметров и уменьшению высот, при этом Fr растет до некоторого максимального значения $\text{Fr}_{\text{max}}(S_1, \theta) > \text{Fr}_{21}(S_1, \theta)$, после чего начинает убывать. Таким образом, для любых S_1 , θ существует максимальное значение числа Фруда $\text{Fr}_{\text{max}}(S_1, \theta)$, при

котором возможно равновесие капли с $\nu = 1$, причем если $Fr_{\max}(S_1, \theta) > Fr > Fr_{21}(S_1, \theta)$, то имеют место сразу две возможные формы кривой Λ при одинаковых параметрах We , Bo , θ . Это значит, что численные методы, дающие единственный ответ для каждого набора входных данных этой задачи, могут приводить к неполным решениям, если требуется найти все возможные формы равновесия, независимо от их физической устойчивости.

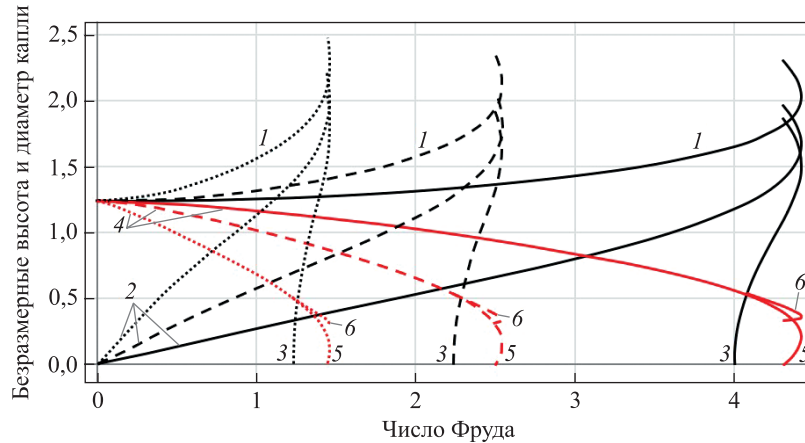


Рис. 5. Зависимость безразмерных характеристик капли от числа Фруда:
1 – безразмерный диаметр капли; 2 – безразмерный диаметр области контакта;
3 – безразмерный диаметр прогиба; 4, 5 – безразмерная высота капли в центре;
4, 6 – максимальная безразмерная высота капли. Сплошные линии соответствуют
первому параметру формы 1/5, штриховые линии – первому параметру формы 1,
пунктирные линии – первому параметру формы 5

Fig. 5. Dependence of dimensionless characteristics of a drop on the Froude number:
1 – the dimensionless diameter of the drop; 2 – the dimensionless diameter of the contact area;
3 – the dimensionless diameter of the deflection; 4, 5 – the dimensionless height of the drop in the center;
4, 6 – the maximum dimensionless height of the drop. Solid lines correspond to the first shape parameter equal to 1/5,
dashed lines – to the first shape parameter equal to 1, dotted lines – to the first shape parameter equal to 5

Увеличение We при постоянном $Bo > 0$ ведет к уменьшению S_1 и увеличению Fr . Причем расширение диапазона допустимых чисел Фруда за счет уменьшения S_1 осуществляется медленнее, чем рост Fr , в следствие чего Fr может выйти за верхнюю границу этого диапазона. Таким образом, для пары $Bo > 0$ и θ может существовать число Вебера $We_{\max}(Bo, \theta)$ такое, что при $We > We_{\max}(Bo, \theta)$ и данных Bo , θ невозможно определить кривую Λ , для которой $\nu = 1$. В работе [9] это значение $We_{\max}(Bo, \theta)$ соответствовало минимальному значению We , при котором происходила аварийная остановка программы. Покажем, что данное утверждение распространяется также на случай $Bo = 0$. Рассмотрим каплю при $Bo = 0$, $We = 1$ и некотором $X = X_1$. Пусть безразмерный объем этой капли $\nu = \nu_1$. Тогда при $\nu = 1$ капле, подобной описанной, будут соответствовать значения $We = \nu_1$, $X = X_1 \nu_1^{\frac{1}{3}}$. Из численных расчетов следует, что зависимость $X(X_1) = X_1 \nu_1^{\frac{1}{3}}(X_1)$ является монотонной, а функция $\nu_1(X_1)$ имеет максимум, достигаемый при $X_1 < X_{01}(1, 0, \theta)$, т. е. до касания подложки центральным прогибом капли. Последний факт при $\theta = \frac{\pi}{2}$ продемонстрирован также в [1]. Приведенные в [1] значение $2^{\frac{1}{3}} X_{01}\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) \approx 1,263$ и максимум $\nu_1 \approx 9,543$ при $2^{\frac{1}{3}} X_1 \approx 0,706$ совпадают с рассчитанным в рамках данной работы $X_{01}\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) \approx 1,0027$ и экстремумом $\nu_1 \approx 9,526$ при $X_1 \approx 0,558$. Таким образом, функция $We(X)$ для невесомых капель единичного безразмерного объема при фиксированном θ является однозначной и имеет максимум $We_{\max}(0, \theta)$, достигаемый при $X < X_{\max}(\theta) = X_{01}(1, 0, \theta) \nu_1^{\frac{1}{3}}(X_{01}(1, 0, \theta))$. Это значит, что при $Bo = 0$ и $We > We_{\max}(0, \theta)$ не существует равновесных форм с $\nu = 1$, а при $\nu_1(X_{01}(1, 0, \theta)) < We < We_{\max}(0, \theta)$ существуют две такие формы. Полученное значение $We_{\max}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \approx 9,526$ хорошо согласуется с критическими числами Вебера 9,526 и 9,540, приведенными в работах [8] и [9] соответственно.

Заклучение

В работе разработан и апробирован алгоритм определения форм относительного равновесия невесомых и тяжелых капель при круговой области контакта с вращающейся подложкой. Проведен численный анализ погрешности предлагаемого алгоритма. Данный подход может быть применен и для более широкого спектра силовых полей, что изменит только функцию $H_0(r, z)$ в системе (10), (11), а также для иных задач вида (12), (13). Численно исследованы зависимости между различными безразмерными параметрами капли и диапазоны входных параметров, при которых существует решение поставленной задачи. Определено, что увеличение центрального прогиба вращающейся капли приводит к касанию подложки свободной поверхностью раньше, чем к невозможности удовлетворения граничного условия заданного краевого угла. Установлено, что одна и та же постановка задачи относительного равновесия капли заданной массы в размерном виде при определенных условиях может давать два различных решения или не иметь ни одного решения. При этом в сравнении с [1] данные выводы распространены на произвольные значения силы тяжести и краевого угла.

Библиографические ссылки

1. Бабский ВГ, Копачевский НД, Мышкис АД, Слобожанин ЛА, Тюпцов АД. *Гидромеханика невесомости*. Мышкис АД, редактор. Москва: Наука; 1976. 504 с.
2. Аппель П. *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости*. Идельсон НИ, переводчик. Москва: Объединенное научно-техническое издательство; 1936. 375 с.
3. Матюхин СИ, Фроленков КЮ. Форма капель жидкости, помещенных на твердую горизонтальную поверхность. *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2013;15(3):292–304.
4. Бадрафинова ЛГ. О запасе устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости. *Прикладная механика и техническая физика*. 1981;4:56–69.
5. Конон ПН, Кулаго АЕ, Ситко ГН, Конон НП. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске. *Теоретическая и прикладная механика*. 2016;31:87–94.
6. Sisoiev GM, Shkadov VYa. Helical waves in a liquid film on a rotating disk. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1990;58(4):423–426. DOI: 10.1007/BF00877348.
7. Parmar NH, Tirumkudulu MS, Hinch EJ. Coating flow of viscous Newtonian liquids on a rotating vertical disk. *Physics of Fluids*. 2009;21(10):103102. DOI: 10.1063/1.3250858.
8. Polevikov VK. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2004;4(1):66–93. DOI: 10.2478/cmam20040005.
9. Полевиков ВК, Денисенко ВМ. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле. *Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Серия 1. Физика. Математика. Механика*. 1985;2:37–41.
10. Audzeichyk YV, Konon PN, Mogilevskiy EI. Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2020;51(2):91–96 (на англ.).
11. Конон ПН, Могилевский ЕИ, Ситко ГН, Шкадов ВЯ. Равновесие капли жидкости на вращающемся диске. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 2020;4:43–50.

References

1. Babskii VG, Kopachevskii ND, Myshkis AD, Slobozhanin LA, Tyuptsov AD. *Hydro-mechanics of weightlessness*. Myshkis AD, editor. Moscow: Nauka; 1976. 504 p. Russian.
2. Appel P. *Figury ravnovesiya vrashchayushcheysya odnorodnoi zhidkosti* [Equilibrium figures of a rotating homogeneous liquid]. Idel'son NI, translator. Moscow: Ob'edinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo; 1936. 375 p. Russian.
3. Matyukhin SI, Frolenkov KYu. Shape of liquid drops on solid horizontal surface. *Condensed Matter and Interphases*. 2013; 15(3):292–304. Russian.
4. Badratina LG. [On the stability margin of the cylindrical equilibrium state of a rotating fluid]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 1981;4:56–69. Russian.
5. Konon PN, Kulago AE, Sitsko GN, Konon NP. [Experimental and theoretical study of the behaviour of a liquid layer on a rotating disk]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. 2016;31:87–94. Russian.
6. Sisoiev GM, Shkadov VYa. Helical waves in a liquid film on a rotating disk. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1990;58(4):423–426. DOI: 10.1007/BF00877348.
7. Parmar NH, Tirumkudulu MS, Hinch EJ. Coating flow of viscous Newtonian liquids on a rotating vertical disk. *Physics of Fluids*. 2009;21(10):103102. DOI: 10.1063/1.3250858.
8. Polevikov VK. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2004;4(1):66–93. DOI: 10.2478/cmam20040005.
9. Polevikov VK, Denisenko VM. [Numerical study of equilibrium forms of a drop rotating in a gravitational field]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta imeni V. I. Lenina. Seriya 1. Fizika. Matematika. Mekhanika*. 1985;2:37–41. Russian.
10. Audzeichyk YV, Konon PN, Mogilevskiy EI. Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2020;51(2):91–96.
11. Konon PN, Mogilevskii EI, Sitsko GN, Shkadov VYa. Equilibrium of a liquid drop on rotating disk. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 2020;4:43–50. Russian.