УДК 517.518.126+519.216.71

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ ГУБИНЕЛЛИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДУБА – МЕЙЕРА ДЛЯ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуются свойства производных Губинелли высших порядков от управляемых грубых траекторий, имеющих произвольный положительный показатель Гёльдера. Используется понятие (α, β)-грубого отображения, на основе которого даются достаточные условия, обеспечивающие единственность производных Губинелли высших порядков. С помощью теоремы о единственности производных Губинелли высших порядков доказывается аналог теоремы Дуба – Мейера для грубых траекторий с произвольным положительным показателем Гёльдера. В заключительной части показывается, что закон локального повторного логарифма для дробного броуновского движения обеспечивает применимость основных результатов настоящей статьи к интегрированию по многомерному дробному броуновскому движению с произвольным индексом Херста. Приводятся примеры, демонстрирующие связь грубых потраекторных интегралов с интегралами Ито и Стратоновича.

Ключевые слова: грубые траектории; производная Губинелли; разложение Дуба – Мейера; дробное броуновское движение.

Образец цитирования:
Васьковский ММ. Единственность производных Губинелли высших порядков и аналог теоремы Дуба – Мейера для грубых траекторий с произвольным положительным показателем Гёльдера. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:6–14.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-6-14

For citation:
Vaskouski MM. On the uniqueness of higher order Gubinelli derivatives and an analogue of the Doob – Meyer theorem for rough paths of the arbitrary positive Holder index. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:6–14. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-6-14

Автор:
Максим Михайлович Васьковский – доктор физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Maksim M. Vaskouski, doctor of science (physics and mathematics), docent; head of the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
vaskovskii@bsu.by
https://orcid.org/0000-0001-5769-3678

ON THE UNIQUENESS OF HIGHER ORDER GUBINELLI DERIVATIVES AND AN ANALOGUE OF THE DOOB – MEYER THEOREM FOR ROUGH PATHS OF THE ARBITRARY POSITIVE HOLDER INDEX

M. M. VASKOUSKI [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In this paper, we investigate the features of higher order Gubinelli derivatives of controlled rough paths having an arbitrary positive Holder index. There is used a notion of the (α, β)-rough map on the basis of which the sufficient conditions are given for the higher order Gubinelli derivatives uniqueness. Using the theorem on the uniqueness of higher order Gubinelli derivatives an analogue of the Doob – Meyer theorem for rough paths with an arbitrary positive Holder index is proved. In the final section of the paper, we prove that the law of the local iterated logarithm for fractional Brownian motion allows using all the main results of this paper for integration over the multidimensional fractional Brownian motions of the arbitrary Hurst index. The examples demonstrating the connection between the rough path integrals and the Ito and Stratonovich integrals are represented.

Keywords: rough paths; Gubinelli derivative; Doob – Meyer expansion; fractional Brownian motion.

Введение

В 1998 г. в работе Т. Лайонса [1] был предложен принципиально новый подход к интегрированию по отображениям, не имеющим конечной вариации. Данный подход основан на включении в интегральные суммы дополнительных членов, соответствующих тейлоровским разложениям высших порядков, а разработанная Т. Лайонсом теория впоследствии получила название теории грубых траекторий (*rough path theory*). Теория грубых траекторий вызывает большой интерес у математиков и физиков, поскольку имеет глубокие приложения в стохастическом анализе и квантовой теории поля [2]. В отличие от Т. Лайонса, который строил теорию грубых траекторий, опираясь на понятие абстрактных тейлоровских разложений в соответствующих тензорных алгебрах, М. Губинелли [3] предложил альтернативный подход, основанный на понятии управляемой грубой траектории. Функциональный вариант теории грубых траекторий, разработанный М. Губинелли, с одной стороны, позволил существенно упростить техническую часть теории грубых траекторий, а с другой стороны, дал возможность строить теорию интегрирования без привязки к соответствующим дифференциальным уравнениям. На основе теории грубых траекторий М. Хайрер построил теорию регулярностных структур, с помощью которой получил новые глубокие результаты в теории стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Следует отметить, что вклад и результаты М. Хайрера были удостоены премии Филдса в 2014 г.

Теория грубых траекторий имеет наиболее значительные применения в теории стохастических дифференциальных уравнений, в том числе для исследования стохастических дифференциальных уравнений, управляемых антиперсистентными дробными броуновскими движениями. Первые работы, посвященные таким приложениям теории грубых траекторий, принадлежат Л. Кутэн, Ж. Кьяну, Ф. Бадуэну [4; 5]. В дальнейшем эти результаты уточнялись и обобщались [6–10]. В частности, в статье [4] показано, что стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями с показателями Херста, меньшими $\frac{1}{4}$, не могут быть исследованы в рамках теорий грубых траекторий, разработанных Т. Лайонсом и М. Губинелли, так как кусочно-линейные аппроксимации для таких дробных броуновских движений не являются сходящимися по вероятности. В статьях [11; 12] была развита теория грубых траекторий Губинелли и с ее помощью исследованы стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями с произвольным положительным показателем Херста. При этом ключевую роль играют свойства производных Губинелли высших порядков. В сущности, производные Губинелли от функции Y относительно α-гёльдеровской функции X определяются не единственным образом. Отмеченная неединственность, как правило, не вносит неопределенности в случае, когда теория грубых траекторий применяется к исследованию проблем однозначной разрешимости, устойчивости дифференциальных уравнений, поскольку выбор производных Губинелли осуществляется в соответствии со стандартными правилами замен переменных в дифференциальных уравнениях [11]. Тем не менее в отрыве от теории дифференциальных уравнений неединственность производных Губинелли приводит к неоднозначности определения грубого потраекторного интеграла.

В настоящей статье исследуется проблема неединственности производных Губинелли высших порядков. Автором вводится понятие (α, β)-грубого отображения X (определение 1) и при определенных соотношениях между α и β устанавливается единственность производных Губинелли высших порядков от функции Y относительно отображения X (теорема 1). С помощью данного результата в статье получен аналог теоремы Дуба – Мейера для грубых траекторий произвольного положительного индекса Гёльдера (теорема 2). В заключительной части работы демонстрируется, что, в частности, представленные результаты применимы в случае, когда интегрирование происходит по многомерному дробному броуновскому движению, имеющему произвольный положительный показатель Херста.

Основные результаты

Определение грубых траекторий. Зафиксируем произвольные $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^{\alpha}([0, T], V)$ и $C_2^{\alpha}([0, T], V)$ обозначим множества функций $f : [0, T] \to V$ и $g : [0, T]^2 \to V$ соответственно, таких, что величины

$$\|f\|_{\alpha} := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|f_t - f_s|}{|t - s|^{\alpha}}, \ \|g\|_{\alpha, 2} := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|g_{s, t}|}{|t - s|^{\alpha}}$$

являются конечными. Далее для функции двух переменных $g_{s, t}$ будем писать $\|g\|_{\alpha}$ вместо $\|g\|_{\alpha, 2}$, а для функции одной переменной f_t через $f_{s, t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Положим $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$. Через $\mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$ обозначим множество α-непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий, т. е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0, T], V^{\otimes i})$ для любого $i = 1, \ldots, n$ и для всех $s, u, t \in [0, T]$ выполняется следующее тождество Чена: $\mathbf{X}_{s, t} = \mathbf{X}_{s, u} \odot \mathbf{X}_{u, t}$, где $(\mathbf{X}_{s, u} \odot \mathbf{X}_{u, t})^i = \sum_{j = 0}^{i} \mathbf{X}_{s, u}^{j} \otimes \mathbf{X}_{u, t}^{i - j}$. Отметим, что операция $\odot$ задает умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i = 0}^{n} V^{\otimes i}$, где $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X} : [0, T]^2 \to T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0, t}$, $t \in [0, T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s, t} = (\mathbf{X}_{0, s})^{-1} \odot \mathbf{X}_{0, t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0, t}$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$ является грубой траекторией над $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$, если $\mathbf{X}_{0, t}^1 = X_t$ для любого $t \in [0, T]$.

Замечание 1. В сущности, грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ над $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ определяется не единственным образом (см. [2, гл. 3]). Вопросы существования грубых траекторий над произвольной функцией $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ рассматривались в статье [13].

Определение слабоуправляемых грубых траекторий. Пусть $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X, а W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^{\alpha}([0, T], W)$ слабо управляется грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, если существуют функции $Y^{(1)} : [0, T] \to L(V, W), \ldots, Y^{(n-1)} : [0, T] \to L(V^{\otimes n - 1}, W)$ такие, что

$$Y_{s, t} = Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-1} + R_{s, t}^{Y, n},$$

$$Y_{s, t}^{(1)} = Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-2} + R_{s, t}^{Y, n-1}, \ldots,$$

$$Y_{s, t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + R_{s, t}^{Y, 2},$$

$$Y_{s, t}^{(n-1)} = R_{s, t}^{Y, 1},$$

а для каждого из остаточных членов $R^{Y, i}$, $i = 1, \ldots, n$, величина $\|R^{Y, i}\|_{i\alpha}$ является конечной. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть производной Губинелли порядка i от Y.

Замечание 2. В сущности, производные Губинелли от $Y_t \in C^{\alpha}([0, T], W)$ относительно грубой траектории $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ определяются не единственным образом. Действительно, если положить $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathbf{X}_t = \left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$, $Y_t \equiv 0$, то в качестве производной Губинелли $Y^{(1)}$ можно выбрать любую функцию из $C^{1/2}([0, T], \mathbb{R})$. Как будет показано далее (см. теорему 1), неединственность производных Губинелли является следствием избыточной гладкости отображения X. Для показателей Гёльдера $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ понятие управляемой грубой траектории впервые введено в статье [3]. Отметим, что любая управляемая грубая траектория в смысле работы [3] является слабоуправляемой грубой траекторией в смысле введенного выше определения, но не наоборот.

Так как пространство $C^{\alpha}([0, T], W)$ банахово, то множество

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], W) = \left\{\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) : Y \in C^{\alpha}([0, T], W), \sum_{i=1}^{n} \left\|R^{Y, i}\right\|_{i\alpha} < \infty\right\}$$

также образует банахово пространство относительно нормы [11]

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} := \sum_{i=0}^{n-1} \left|Y_0^{(i)}\right| + \left\|\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right)\right\|_{\mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}},$$

где $Y_t^{(0)} = Y_t$, $\left\|\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right)\right\|_{\mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \left\|R^{Y, i}\right\|_{i\alpha}$.

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $Y \in C^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, V, W – конечномерные евклидовы пространства. Возьмем некоторые $s, t \in [0, T]$, $s < t$, через P обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s, t]$. Грубым потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r$ будем называть следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s, t]$):

$$\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r := \lim_{\operatorname{diam}(P) \to 0} \sum_{[u, v] \in P} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u, v}^{i+1}.$$

Замечание 3. Неоднозначность определения грубой траектории над X приводит к неоднозначности определения грубого потраекторного интеграла. Если X_t – стандартный винеровский процесс, а $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, то в зависимости от способа выбора $\mathbf{X}$, в частности, можем получить интеграл Ито или интеграл Стратоновича [2, гл. 5]. Другой источник неоднозначности определения интеграла состоит в неединственности определения производных Губинелли от $Y \in C^{\alpha}([0, T], L(V, W))$ относительно фиксированной грубой траектории $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$. Как будет доказано далее (см. теорему 2), использование разных наборов производных Губинелли от Y приводит к различным значениям интеграла.

Предложение 1 [11]. *Пусть* $\alpha \in (0, 1]$, $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, *V, W – конечномерные евклидовы пространства. Тогда для любых* $s, t \in [0, T]$ *интеграл* $\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r$ *корректно определен и существует постоянная* $C = C(\alpha)$ *такая, что для любых* $s, t \in [0, T]$ *выполняется оценка*

$$\left|\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-1} Y_s^{(i)} \mathbf{X}_{s, t}^{i+1}\right| \le C \sum_{i=1}^{n} \left\|\mathbf{X}^{n+1-i}\right\|_{(n+1-i)\alpha} \left\|R^{Y, i}\right\|_{i\alpha} |t - s|^{(n+1)\alpha}.$$

Определение 1. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1]$, $\alpha < \beta$, V – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что отображение $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ является (α, β)-грубым, если существует всюду плотное в $[0, T]$ множество S такое, что для любых $s \in S$, $v^* \in V^* \setminus \{0\}$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, X_{s, t} \right\rangle\right|}{|t - s|^{\beta}} = \infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$. *Предположим, что отображение* $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ *является* $(\alpha, 2\alpha)$*-грубым,* $\mathbf{X} = \left(1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n\right) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $\left(\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \ldots, \tilde{Y}^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$. *Если* $Y_t = \tilde{Y}_t$ *для любого* $t \in [0, T]$, *то* $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$ *для всех* $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует всюду плотное в $[0, T]$ множество S такое, что для любых $s \in S$, $v^* \in V^* \setminus \{0\}$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, X_{s, t} \right\rangle\right|}{|t - s|^{2\alpha}} = \infty. \tag{1}$$

Покажем, что для всех $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n - 1$ выполняется равенство $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$. Докажем утверждение индукцией по i. Пусть $i = 1$. Зафиксируем произвольное $s \in S$. Так как

$$Y_{s, t} = Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-1} + R_{s, t}^{Y, n} = Y_s^{(1)} X_{s, t} + O\left(|t - s|^{2\alpha}\right),$$

$$Y_{s, t} = \tilde{Y}_s^{(1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + \tilde{Y}_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-1} + R_{s, t}^{\tilde{Y}, n} = \tilde{Y}_s^{(1)} X_{s, t} + O\left(|t - s|^{2\alpha}\right),$$

то из соотношения (1) вытекает, что $Y_s^{(1)} = \tilde{Y}_s^{(1)}$. Поскольку функции $Y_t^{(1)}, \tilde{Y}_t^{(1)}$ непрерывны на отрезке $[0, T]$, то из равенства $Y_s^{(1)} = \tilde{Y}_s^{(1)}$ для всех $s \in S$ следует, что $Y_t^{(1)} = \tilde{Y}_t^{(1)}$ для любого $t \in [0, T]$. Предположим, что $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$ для всех $t \in [0, T]$, $i \le k < n - 1$. Докажем, что $Y_t^{(k+1)} = \tilde{Y}_t^{(k+1)}$ для любого $t \in [0, T]$. Зафиксируем произвольное $s \in S$. Так как

$$Y_{s, t}^{(k)} = Y_s^{(k+1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-k-1} + R_{s, t}^{Y, n-k} = Y_s^{(k+1)} X_{s, t} + O\left(|t - s|^{2\alpha}\right),$$

$$Y_{s, t}^{(k)} = \tilde{Y}_s^{(k+1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \ldots + \tilde{Y}_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-k-1} + R_{s, t}^{\tilde{Y}, n-k} = \tilde{Y}_s^{(k+1)} X_{s, t} + O\left(|t - s|^{2\alpha}\right),$$

то из соотношения (1) вытекает, что $Y_s^{(k+1)} = \tilde{Y}_s^{(k+1)}$. Из непрерывности функций $Y_t^{(k+1)}, \tilde{Y}_t^{(k+1)}$ на отрезке $[0, T]$ следует, что $Y_t^{(k+1)} = \tilde{Y}_t^{(k+1)}$ для любого $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$. *Предположим, что отображение* $X \in C^{\alpha}([0, T], V)$ *является* $(\alpha, 2\alpha)$*-грубым,* $\mathbf{X} = \left(1, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n\right) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $\left(\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \ldots, \tilde{Y}^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$, $Z, \tilde{Z} \in C([0, T], W)$. *Если для любого* $t \in [0, T]$ *выполняется равенство*

$$\int_0^t Y_r \, d\mathbf{X}_r + \int_0^t Z_r \, dr = \int_0^t \tilde{Y}_r \, d\mathbf{X}_r + \int_0^t \tilde{Z}_r \, dr,$$

то $Y_t^{(i)} = \tilde{Y}_t^{(i)}$, $Z_t = \tilde{Z}_t$ *для всех* $t \in [0, T]$, $i = 0, \ldots, n - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\left(Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$. Докажем, что и элемент $\left(\int_0^{\bullet} Y_r \, d\mathbf{X}_r, Y, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-2)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], L(V, W))$.

Имеем

$$\left\|\left(\int_0^{\bullet} Y_r\,d\mathbf{X}_r,\ Y,\ Y^{(1)},\ \dots,\ Y^{(n-2)}\right)\right\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}} = \sup_{s\neq t}\frac{\left|Y^{(n-2)}_{s,t}\right|}{|t-s|^{\alpha}} +$$

$$+\sum_{k=3}^{n}\sup_{s\neq t}|t-s|^{-(k-1)\alpha}\left|Y^{(n-k)}_{s,t}-\sum_{i=1}^{k-2}Y^{(n-k+i)}_s\mathbf{X}^i_{s,t}\right| + \sup_{s\neq t}|t-s|^{-n\alpha}\left|\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-2}Y^{(i)}_s\mathbf{X}^{i+1}_{s,t}\right|.$$

Так как $Y^{(n-k)}_{s,t} = \sum_{i=1}^{k-1}Y^{(n-k+i)}_s\mathbf{X}^i_{s,t} + R^{Y,k}_{s,t}$, то из предложения 1 вытекает, что

$$\left\|\left(\int_0^{\bullet} Y_r\,d\mathbf{X}_r,\ Y,\ Y^{(1)},\ \dots,\ Y^{(n-2)}\right)\right\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}} \le \sum_{k=1}^{n-1}\sup_{s\neq t}\frac{\left|Y^{(n-1)}_s\mathbf{X}^k_{s,t}+R^{Y,k+1}_{s,t}\right|}{|t-s|^{k\alpha}} +$$

$$+\sup_{s\neq t}|t-s|^{-n\alpha}\left|\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathbf{X}^{n+1-i}\right\|_{(n+1-i)\alpha}\left\|R^{Y,i}\right\|_{i\alpha}|t-s|^{(n+1)\alpha} + Y^{(n-1)}_s\mathbf{X}^n_{s,t}\right| = O(1).$$

Аналогично получаем, что $\left(\int_0^{\bullet}\tilde{Y}_r\,d\mathbf{X}_r,\ \tilde{Y},\ \tilde{Y}^{(1)},\ \dots,\ \tilde{Y}^{(n-2)}\right)\in\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}\big([0,T],\ L(V,W)\big)$.

Таким образом,

$$\left(I,\ I^{(1)},\ \dots,\ I^{(n-1)}\right) = \left(\int_0^{\bullet}\left(Y_r-\tilde{Y}_r\right)d\mathbf{X}_r,\ Y-\tilde{Y},\ Y^{(1)}-\tilde{Y}^{(1)},\ \dots,\ Y^{(n-2)}-\tilde{Y}^{(n-2)}\right)\in\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}\big([0,T],\ L(V,W)\big).$$

Возьмем произвольные $s,\ t\in[0,T]$. Имеем

$$\int_s^t Y_r\,d\mathbf{X}_r - \int_s^t\tilde{Y}_r\,d\mathbf{X}_r = \int_s^t\left(Y_r-\tilde{Y}_r\right)d\mathbf{X}_r = \int_s^t\left(Z_r-\tilde{Z}_r\right)dr = O\big(|t-s|\big) = O\left(|t-s|^{n\alpha}\right).$$

Так как $I_{s,t} = O\left(|t-s|^{n\alpha}\right)$, то $(I,\ 0,\ \dots,\ 0)\in\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathbf{X}}\big([0,T],\ L(V,W)\big)$. В силу теоремы 1 получаем, что $I^{(1)}_t = 0$ для любого $t\in[0,T]$. Следовательно, $Y_t=\tilde{Y}_t$ для любого $t\in[0,T]$. Снова применяя теорему 1, заключаем, что $Y^{(i)}_t=\tilde{Y}^{(i)}_t$ для всех $t\in[0,T]$, $i=1,\ \dots,\ n-1$. Значит, $\int_0^t Y_r\,d\mathbf{X}_r = \int_0^t\tilde{Y}_r\,d\mathbf{X}_r$ для любого $t\in[0,T]$. Таким образом, $\int_0^t Z_r\,dr = \int_0^t\tilde{Z}_r\,dr$. Из теоремы Барроу вытекает, что $Z_t=\tilde{Z}_t$ для любого $t\in[0,T]$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть задано d-мерное дробное броуновское движение* B^H_t, $t\in[0,T]$, *с показателем Херста* $H\in(0,1)$. *Тогда для любых* $\alpha\in(0,H)$, $\beta\ge H$ *почти все траектории процесса* B^H_t *являются* (α,β)*-грубыми.*

Доказательство. Согласно закону локального повторного логарифма для дробного броуновского движения [14, гл. 1] для любого $t\in[0,T]$ имеем

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{\left|B^H_{t,t+h}\right|}{h^H\left(\ln\ln h^{-1}\right)^{1/2}} = c_H\right) = 1,$$

где c_H – положительная постоянная. Введем обозначение $\rho(h) = h^H\left(\ln\ln h^{-1}\right)^{1/2}$, $h>0$.

Зафиксируем произвольные $\alpha\in(0,H)$, $\beta\ge H$. Согласно работе [14, гл. 1] почти все траектории процесса B^H_t принадлежат $C^{\alpha}\big([0,T],V\big)$, где $V=\mathbb{R}^d$.

Существует постоянная $\tilde{c}_H > 0$ такая, что для любых $v^* \in V^*$, $\left\|v^*\right\| = 1$, $s \in [0, T)$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t}^H \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \geq \tilde{c}_H\right) = 1. \tag{2}$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|B_{s,t}^H\right|}{\rho(t-s)} < \infty\right) = 1. \tag{3}$$

Пусть K – счетное всюду плотное множество в $U = \left\{v^* \in V^* : \left\|v^*\right\| = 1\right\}$. Тогда из равенства (2) получаем

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t}^H \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \geq \tilde{c}_H \ \ \forall v^* \in K\right) = 1. \tag{4}$$

Возьмем произвольное $v^* \in U$, существует последовательность $\left(v_n^*\right) \subset K$ такая, что $\left\|v_n^* - v^*\right\|_{V^*} \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Имеем

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v_n^*, B_{s,t}^H \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \leq \overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t}^H \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} + \left\|v_n^* - v^*\right\|_{V^*} \overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|B_{s,t}^H\right|}{\rho(t-s)}. \tag{5}$$

Таким образом, из соотношений (3)–(5) следует, что

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t}^H \right\rangle\right|}{\rho(t-s)} \geq \tilde{c}_H \ \ \forall v^* \in U\right) = 1. \tag{6}$$

Из равенства (6) вытекает, что для почти всех ω существует последовательность $t_n = t_n(\omega) \underset{n \to \infty}{\downarrow} s$ такая, что для любого $v^* \in U$

$$\frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t_n}^H \right\rangle\right|}{\rho(t_n - s)} \geq \tilde{c}_H - \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t_n}^H \right\rangle\right|}{\left|t_n - s\right|^\beta} \geq \left(\tilde{c}_H - \frac{1}{n}\right)\left|t_n - s\right|^{H-\beta}\left(\ln\ln\left|t_n - s\right|^{-1}\right)^{1/2} \underset{n \to \infty}{\to} \infty.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{\left|\left\langle v^*, B_{s,t}^H \right\rangle\right|}{\left|t - s\right|^\beta} = \infty \ \forall v^* \in U, \ \ \forall s \in [0, T) \cap \mathbb{Q}\right) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. Пусть $W_t = B_t^{1/2}$ – стандартный винеровский процесс. Положим $n = 2$, $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Согласно утверждению 1 почти все траектории процесса W_t являются $(\alpha, 2\alpha)$-грубыми. Положим $\mathbf{X} = \left(1, W, \mathbb{W}^{\text{Ito}}\right)$, где $\mathbb{W}_{s,t}^{\text{Ito}} = \int_s^t W_{s,r} \otimes dW_r$, а интегралы в правой части понимаются как интегралы Ито. Тогда $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ [2, гл. 3], кроме того, интеграл $\int_0^t Y_r \, d\mathbf{X}_r$ почти наверное совпадает с интегралом Ито в предположении, что $\left(Y, Y^{(1)}\right) \in \mathfrak{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], L(V, W))$ [2, гл. 5]. В таком случае теорема 2 превращается в известную теорему Дуба – Мейера для семимартингалов [15, гл. 1].

Замечание 5. В частном случае (когда $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$) результаты, аналогичные теоремам 1–3, ранее были доказаны в работе [2, гл. 6].

Замечание 6. Альтернативным способом исследования свойств грубых траекторий является дискретизация и изучение асимптотических свойств случайных блужданий на подходящих графах [16–18].

Библиографические ссылки

1. Lyons TJ. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana.* 1998;14(2):215–310. DOI: 10.4171/rmi/240.
2. Friz PK, Hairer M. *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures.* Cham: Springer; 2014. XIV, 251 p. (Universitext). DOI: 10.1007/978-3-319-08332-2.
3. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis.* 2004;216(1):86–140. DOI: 10.1016/j.jfa.2004.01.002.
4. Coutin L, Qian Z. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probability Theory and Related Fields.* 2002;122(1):108–140. DOI: 10.1007/s004400100158.
5. Baudoin F, Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions. *Stochastic Processes and their Applications.* 2007;117(5):550–574. DOI: 10.1016/J.SPA.2006.09.004.
6. Neuenkirch A, Nourdin I, Rößler A, Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques.* 2009;45(1):157–174. DOI: 10.1214/07-aihp159.
7. Васьковский ММ, Качан ИВ. Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2018;62(4):398–405. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405.
8. Vaskouski M, Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3. *Stochastic Analysis and Applications.* 2018;36(6):909–931. DOI: 10.1080/07362994.2018.1483247.
9. Васьковский ММ. Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими 1/3. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2020;56(1):36–50. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50.
10. Леваков АА, Васьковский ММ. *Стохастические дифференциальные уравнения и включения.* Минск: БГУ; 2019. 495 с.
11. Васьковский ММ. Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера. *Дифференциальные уравнения.* 2021;57(10): 1305–1317. DOI: 10.31857/S0374064121100022.
12. Васьковский ММ. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера. *Дифференциальные уравнения.* 2021;57(11):1443–1449. DOI: 10.31857/S0374064121110017.
13. Lyons T, Victoir N. An extension theorem to rough paths. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire.* 2007; 24(5):835–847. DOI: 10.1016/j.anihpc.2006.07.004.
14. Biagini F, Hu Y, Øksendal B, Zhang T. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications.* London: Springer; 2008. XII, 330 p. (Probability and its applications). DOI: 10.1007/978-1-84628-797-8.
15. Ватанабэ С, Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* Кинкладзе ГН, переводчик; Ширяев АН, редактор. Москва: Наука; 1986. 448 с.
16. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics.* 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.
17. Васьковский ММ. О случайных блужданиях на графах Кэли групп комплексных отражений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;3:51–56. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-51-56.
18. Задорожнюк АО. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:38–45. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

References

1. Lyons TJ. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana.* 1998;14(2):215–310. DOI: 10.4171/rmi/240.
2. Friz PK, Hairer M. *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures.* Cham: Springer; 2014. XIV, 251 p. (Universitext). DOI: 10.1007/978-3-319-08332-2.
3. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis.* 2004;216(1):86–140. DOI: 10.1016/j.jfa.2004.01.002.
4. Coutin L, Qian Z. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probability Theory and Related Fields.* 2002;122(1):108–140. DOI: 10.1007/s004400100158.
5. Baudoin F, Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions. *Stochastic Processes and their Applications.* 2007;117(5):550–574. DOI: 10.1016/J.SPA.2006.09.004.
6. Neuenkirch A, Nourdin I, Rößler A, Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques.* 2009;45(1):157–174. DOI: 10.1214/07-aihp159.
7. Vaskouski MM, Kachan IV. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2018;62(4):398–405. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-4-398-405.

8. Vaskouski M, Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3. *Stochastic Analysis and Applications.* 2018;36(6):909–931. DOI: 10.1080/07362994.2018.1483247.

9. Vas'kovskii MM. Mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with Hurst indices greater than 1/3. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2020;56(1): 36–50. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50.

10. Levakov AA, Vaskouski MM. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i vklyucheniya* [Stochastic differential equations and inclusions]. Minsk: Belarusian State University; 2019. 495 p. Russian.

11. Vaskouski MM. [Existence and uniqueness of solutions of differential equations weakly controlled by rough paths of arbitrary positive Holder index]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2021;57(10):1305–1317. Russian. DOI: 10.31857/S0374064121100022.

12. Vaskouski MM. [Stability of solutions of stochastic differential equations weakly controlled by rough paths of arbitrary positive Holder index]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2021;57(11):1443–1449. Russian. DOI: 10.31857/S0374064121110017.

13. Lyons T, Victoir N. An extension theorem to rough paths. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire.* 2007; 24(5):835–847. DOI: 10.1016/j.anihpc.2006.07.004.

14. Biagini F, Hu Y, Øksendal B, Zhang T. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications.* London: Springer; 2008. XII, 330 p. (Probability and its applications). DOI: 10.1007/978-1-84628-797-8.

15. Watanabe S, Ikeda N. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company; 1981. XIV, 464 p. (North-Holland mathematical library; volume 24). Co-published by the Kodansha Ltd.

Russian edition: Watanabe S, Ikeda N. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i diffuzionnye protsessy. Kinkladze GN, translator; Shiryaev AN, editor. Moscow: Nauka; 1986. 448 p.

16. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics.* 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.

17. Vaskouski MM. Random walks on Cayley graphs of complex reflection groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;3:51–56. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-51-56.

18. Zadorozhnyuk AO. Monotonicity of random walks' states on finite grids. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:38–45. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

Получена 21.11.2021 / исправлена 13.01.2022 / принята 16.06.2022.
Received 21.11.2021 / revised 13.01.2022 / accepted 16.06.2022.