УДК 515.12

ФУНКТОРИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА Ω-НАСЫЩЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. БЕДРИЦКИЙ[1)], *В. Л. ТИМОХОВИЧ*[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматриваются насыщения типа Ω топологического пространства X, которые канонически вкладываются в волмэновское расширение ωX и являются ослаблением понятия счетнокомпактификации в смысле Мориты. Находятся необходимые и достаточные условия существования непрерывного продолжения отображения $X \xrightarrow{f} Y$ на Ω-насыщения пространств X и Y, а также довольно обширные категории, на которых определены возникающие при этом ковариантные функторы.

Ключевые слова: насыщение топологического пространства; счетнокомпактификация в смысле Мориты; компактификация Волмэна.

FUNCTOR PROPERTIES OF THE Ω-SATURATION OF A TOPOLOGICAL SPACE

A. S. BIADRYTSKI[a], *V. L. TIMOKHOVICH*[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Herein, we consider the Ω-saturations of a topological space X, which are canonically embedded in the Wallman extension ωX and are a weakening of the concept of the countably-compactification in the Morita sense. We find necessary and sufficient conditions of the continious extension of a map $X \xrightarrow{f} Y$ to Ω-saturations of the spaces X and Y, as well as sufficiently wide categories on which the covariant functors arising in this case are defined.

Keywords: saturation of a topological space; countably-compactification in the Morita sense; Wallman compactification.

Образец цитирования:
Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. Функториальные свойства Ω-насыщения топологического пространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:31–37.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-31-37

For citation:
Biadrytski AS, Timokhovich VL. Functor properties of the Ω-saturation of a topological space. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:31–37. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-31-37

Авторы:
Александр Сергеевич Бедрицкий – магистрант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.
Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:
Aliaksandr S. Biadrytski, master's degree student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
abedr@vk.com
Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
timvlaleo@gmail.com

Введение

Понятие насыщения топологического пространства, представляющее собой некое ослабление понятия счетнокомпактификации в смысле Мориты, появилось в работе [1]. Известно, что гипотеза о счетнокомпактифицируемости M-пространства Мориты [2] (счетно-компактное расширение Y пространства X называется его счетнокомпактификацией, если в Y замкнуто любое замкнутое в X счетно-компактное множество [3]) не оправдалась (даже не все нормальные локально компактные M-пространства счетно-компактифицируемы [4]). Тем не менее исследование расширений топологического пространства, являющихся счетнокомпактификациями, либо близких к ним расширений, в частности насыщений с теми или иными свойствами, представляет определенный интерес. Предлагаемая работа примыкает непосредственно к публикации [5], где исследуются насыщения конкретного типа (Ω), для которых находятся необходимые и достаточные условия их счетнокомпактности (т. е. решается задача о счетнокомпактифицируемости). В настоящей статье для непрерывного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ (пространство Y регулярно) устанавливаются необходимые и достаточные условия существования непрерывного продолжения $S \xrightarrow{\tilde{f}} E$, где S и E – Ω-насыщения (см. определение 1) пространств X и Y соответственно (см. теоремы 2 и 3). Далее показывается, что Ω-насыщения и непрерывные продолжения отображений определяют ковариантные функторы из некоторых топологических категорий в категорию TOP всех топологических пространств и непрерывных отображений (см. теорему 4). В части использования в основных построениях конструкции волмэновского расширения ωX, а также определения рассмотренных классов отображений данная работа примыкает к статье Д. Харриса [6].

Понятия и обозначения

Под пространством понимается произвольное топологическое T_1-пространство, если это не оговорено особо. Пусть X и S – пространства, $A \subset X$. Введем следующие обозначения: $\left[A\right]_X$ – замыкание множества A в пространстве X; $Cov\left(A,\ X\right)$ – семейство всех покрытий множества A открытыми в X множествами, $Cov\left(X\right) = Cov\left(X,\ X\right)$; $\mathbb{N}$ – натуральный ряд. Будем писать $A \underset{\text{op}}{\subset} X$ $\left(A \underset{\text{cl}}{\subset} X\right)$, если A открыто (замкнуто соответственно) в X. Множество A назовем дискретом в пространстве X, если A счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в X. Семейство всех дискретов в пространстве X обозначим через Δ (Δ_X при необходимости уточнения). Подсемейство $\beta \subset \Delta$ назовем Δ-базой в пространстве X, если для любого $A \in \Delta$ можно выбрать $B \in \beta$ так, чтобы $B \subset A$. Через δ (δ_X при необходимости уточнения) обозначим семейство всех дискретов $A \in \Delta$, допускающих раздутие до дискретного семейства окрестностей своих точек, Δ-базу β будем именовать δ-базой, если $\beta \subset \delta$. Пространство X называется δ-хаусдорфовым [7], если оно хаусдорфово и семейство δ является Δ-базой.

Пусть $X \subset S$ (т. е. X – подпространство в S). Если $U \underset{\text{op}}{\subset} X$ и α – семейство некоторых открытых в X множеств, то положим, что $\hat{U} = \cup\left\{G \underset{\text{op}}{\subset} S \middle| G \cap X = U\right\}$ и $\hat{\alpha} = \left\{\hat{U} \middle| U \in \alpha\right\}$. Пространство S называется насыщением пространства X [1], если S – расширение для X (т. е. $\left[X\right]_S = S$), любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет в S предельную точку и любое замкнутое в X счетно-компактное множество замкнуто и в S.

В волмэновском компактном расширении ωX нарост $\left[F\right]_{\omega X} \setminus F$ множества $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ обозначим через F^*. Напомним, что нарост $X^* = \omega X \setminus X$ образуют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых в X множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры, а базу топологии в ωX – множества вида $W\left(U\right) = U \cup \left\{\xi \in X^* \middle| U \supset F \text{ для некоторого } F \in \xi\right\}$, где $U \underset{\text{op}}{\subset} X$. Если $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ и $F \subset U \underset{\text{op}}{\subset} X$, то $\left[F\right]_{\omega X} \subset W\left(U\right)$ и $W\left(U\right) = \hat{U}$ (т. е. $W\left(U\right) = \cup\left\{G \underset{\text{op}}{\subset} \omega X \middle| G \cap X = U\right\}$); $W\left(U_1 \cup \ldots \cup U_n\right) = W\left(U_1\right) \cup \ldots \cup W\left(U_n\right)$, где $U_i \underset{\text{op}}{\subset} X$, $1 \le i \le n$ (подробнее см. [8, с. 270–272]).

Предварительные рассмотрения

Рассмотрим волмэновское расширение ωX пространства X, при этом X не счетно-компактно, β – Δ-база в X. Положим, что

$$s_\beta X = X \cup \left\{\xi \in X^* \middle| \xi \cap \beta \ne \varnothing\right\}.$$

Ясно, что $s_\beta X$ – расширение для X, $X \subset s_\beta X \subset \omega X$,

$$s_\beta X = X \cup \left(\cup\left\{A^* \middle| A \in \beta\right\}\right).$$

Расширение $s_\beta X$ определено в работе [5] (там оно обозначено через Y_β). В ней же указаны основные свойства этого расширения.

Предложение 1 [5]. *Пусть $S = s_\beta X$. Тогда S – насыщение пространства X, причем выполняются условия: 1) множества $\hat{U}$, где $U \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, образуют базу топологии пространства S; 2) если $A \in \beta$, то $[A]_S = [A]_{\omega X}$ и $[A]_S$ компактно; 3) если $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ и $F \subset U \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, то $[F]_S \subset \hat{U}$; 4) $\widehat{U_1 \cup \ldots \cup U_n} = \hat{U}_1 \cup \ldots \cup \hat{U}_n$ и $[F_1 \cap \ldots \cap F_n]_S = [F_1]_S \cap \ldots \cap [F_n]_S$, где $U_i \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, $F_i \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, $1 \le i \le n$, $n \in \mathbb{N}$; 5) если пространство X регулярно, то пространство S хаусдорфово.*

Условие 5) предложения 1 дополняют предложения 2 и 3.

Предложение 2 [5]. *Если насыщение $s_\beta X$ регулярно (для некоторой Δ-базы β), то пространство X δ-хаусдорфово и β является δ-базой. Обратно, если пространство X регулярно и δ-хаусдорфово, то насыщение $s_\beta X$ регулярно для любой δ-базы β.*

Предложение 3 [5]. *Пусть пространство X вполне регулярно и δ-хаусдорфово. Тогда насыщение $s_\beta X$ вполне регулярно для любой δ-базы β.*

Определение 1 [5]. Пусть S – некоторое расширение пространства X и выполняются условия: 1) для любой точки $z \in S \backslash X$ найдется дискрет $A \in \beta$ такой, что $z \in [A]_S$, и обратно, $[A]_S \cap (S \backslash X) \ne \varnothing$ для любого $A \in \beta$; 2) если $B \subset A \in \beta$ и $B \subset U \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, то $[B]_S \subset \hat{U}$ (или, другими словами, если $A \in \beta$ и $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, то $[F]_S \cap [A \backslash F]_S = \varnothing$); 3) множества $\hat{U}$, где $U \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, образуют базу топологии пространства S. Тогда S называется ω-насыщением (или насыщением типа ω) пространства X, а Δ-база β – ω-допустимой для S. Если, кроме того, компактны все множества $[A]_S$, где $A \in \beta$, то S называется Ω-насыщением (или насыщением типа Ω) пространства X, а Δ-база β – Ω-допустимой для S.

Любое ω-насыщение действительно является насыщением, и если оно регулярно, то условие 3) определения 1 выполнятся автоматически (см. [5]).

Ясно, что все насыщения вида $s_\beta X$ представляют собой Ω-насыщения и любая Δ-база β Ω-допустима для $s_\beta X$. Обратно, любое ω-насыщение S пространства X реализуется в некотором Ω-насыщении $s_\beta X$ следующим образом.

Теорема 1 [5]. *Для любого ω-насыщения S пространства X с ω-допустимой Δ-базой β существует каноническое (т. е. тождественное на X) вложение пространства S в $s_\beta X$ (т. е. $X \subset S \subset s_\beta X$), причем если S – Ω-насыщение, а Δ-база β Ω-допустима, то S и $s_\beta X$ канонически гомеоморфны (т. е. $S = s_\beta X$).*

Таким образом, можно считать, что ω-насыщение S получается в результате некоторой «порчи» нароста $s_\beta X \backslash X$, а именно «выкалывания» отдельных ультрафильтров из наростов $A^* = [A]_{\omega X} \backslash A$ для определенных дискретов $A \in \beta$ (см. пример в работе [5]).

Следствие. *Для любого ω-насыщения выполняются условия 3)–5) из предложения 1.*

Понятие ω-насыщения позволяет уточнить предложение 2.

Предложение 4. *Если некоторое ω-насыщение S пространства X регулярно, то пространство X δ-хаусдорфово и для S существует ω-допустимая δ-база.*

Доказательство. Пусть β – некоторая ω-допустимая Δ-база для S. Считаем, что $S \subset s_\beta X$ (см. теорему 1). Произвольному ультрафильтру $\xi \in S \backslash X$ поставим в соответствие дискрет $A_\xi \in \xi \cap \beta$, который раздуем до дизъюнктного семейства $\{V_a \mid a \in A_\xi\}$, где $a \in V_a \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, $a \in A_\xi$ (что возможно в силу регулярности X). Исходя из регулярности S и соотношений $\xi \in [A_\xi]_S \subset \hat{V}$, где $V = \cup\{V_a \mid a \in A_\xi\}$, найдется $W \underset{\mathrm{op}}{\subset} X$, для которого $\xi \in \hat{W}$ и $[W]_S \subset \hat{V}$ (отсюда следует, что $[W]_X \subset V$). Введем обозначение $B_\xi = A_\xi \cap W$. Заметим, что $B_\xi \in \xi$ и дискрет B_ξ раздувается до дискретного семейства $\{W_b \mid b \in B_\xi\}$, где $W_b = W \cap V_b$, $b \in B_\xi$ (в силу указанного выше соотношения $[W]_X \subset V$). Далее положим, что $\beta' = \{B \in \Delta \mid B \subset B_\xi \text{ для некоторого } \xi \in S \backslash X\}$. Легко проверить, что β' – δ-база, ω-допустимая для S, а ее наличие очевидно влечет δ-хаусдорфовость пространства X. Предложение доказано.

Пусть далее $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, $S = s_\beta X$.

Определение 2 [5]. Покрытие $\alpha \in Cov(X)$ называется β-крупным, если любой дискрет $A \in \beta$ покрывается конечным число элементов α.

Множество всех β-крупных покрытий пространства X обозначим (как и в работе [5]) через $BCov_\beta(X)$.

Определение 3. Покрытие $\alpha \in Cov(F, X)$ назовем F-β-крупным, если для каждого дискрета $A \in \beta$ пересечение $F \cap A$ покрывается конечным числом элементов α.

Совокупность всех F-β-крупных покрытий множества F обозначим через $BCov_\beta(F, X)$.

Определение 4. Множество F назовем β-компактным, если из любого покрытия $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$ выделяется конечное подсемейство, покрывающее F.

Замечание 1. Очевидно, что если множество F β-компактно и счетно-компактно, то оно компактно.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha \in Cov(F, X)$, $\hat{\alpha} = \{\hat{U} \mid U \in \alpha\}$. *Семейство* $\hat{\alpha}$ *покрывает* $[F]_S$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$.

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Покажем, что $\cup\hat{\alpha} \supset [F]_S$. Соотношение $\cup\hat{\alpha} \supset F$ очевидно. Пусть $\xi \in [F]_S \backslash F$ и $A \in \xi \cap \beta$. Тогда $F \cap A \in \xi$. Но по условию $F \cap A$ покрывается некоторыми множествами $U_1, \ldots, U_n \in \alpha$, откуда $\xi \in [F \cap A]_S \subset \widehat{U_1 \cup \ldots \cup U_n} = \hat{U}_1 \cup \ldots \cup \hat{U}_n$ и, следовательно, $\xi \in \hat{U}_i$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость. Пусть $A \in \beta$. Поскольку $[F \cap A]_S \subset [A]_S = [A]_{\omega X}$, то $[F \cap A]_S$ компактно и, следовательно, покрывается некоторыми множествами $\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_n \in \hat{\alpha}$. Но тогда и $F \cap A \subset$ $\subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Итак, $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$. Лемма доказана.

Замечание 2. Если покрытие $\alpha \in Cov(F, X)$ является F-β-крупным для некоторой Δ-базы β, Ω-допустимой для S, то оно является F-β-крупным и для любой такой Δ-базы β.

Предложение 5. *Множество* $[F]_S$ *компактно тогда и только тогда, когда множество* F β-*компактно.*

Доказательство. В силу леммы 1 необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть семейство $\hat{\alpha} = \{\hat{U} \mid U \in \alpha\}$ покрывает $[F]_S$ ($U \underset{\text{op}}{\subset} X$ для всех $U \in \alpha$). Согласно лемме 1 $\alpha \in BCov_\beta(F, X)$, и по условию F покрывается некоторыми множествами $U_1, \ldots, U_n \in \alpha$. Но тогда $[F]_S \subset \widehat{U_1 \cup \ldots \cup U_n} =$ $= \hat{U}_1 \cup \ldots \cup \hat{U}_n$. Предложение доказано.

Замечание 3 (аналогичное замечанию 2). Если множество F β-компактно для некоторой Δ-базы β, Ω-допустимой для S, то оно β-компактно и для любой такой Δ-базы β.

Продолжение отображения на Ω-насыщения

Далее рассмотрим дополнительно пространства Y и Z и непрерывные отображения $X \xrightarrow{f} Y$ и $X \xrightarrow{g} Z$, при этом Y не счетно-компактно, ν – Δ-база в Y, $E = s_\nu Y$. По-прежнему $S = s_\beta X$.

Определение 5. Скажем, что отображение f β-ν-согласованно, если множество $[f(A)]_Y$ ν-компактно для любого $A \in \beta$. Если отображение f Δ_X-Δ_Y-согласованно (δ_X-δ_Y-согласованно), то назовем его Δ-согласованным (δ-согласованным соответственно).

Определение 6. Скажем, что отображение g удовлетворяет условию (H_β), если для любых дискрета $A \in \beta$ и конечного покрытия $\vartheta \in Cov([g(A)]_Z, Z)$ можно выбрать конечное покрытие $u \in Cov(A, X)$ и каждому $U \in u$ поставить в соответствие $V_U \in \vartheta$ таким образом, что $g(U) \subset V_U$ и $[g(A' \cap U)]_Z \subset V_U$ при $A' \in \beta$ и $U \in u$.

Теорема 2. *Пусть пространство Y регулярно. Если f допускает непрерывное продолжение* $S \xrightarrow{\tilde{f}} E$ *(т. е.* $\tilde{f}\big|_X = f$*), то* $\tilde{f}$ *единственно, отображение f* β-ν-*согласованно и удовлетворяет условию* (H_β). *Обратно, если отображение f* β-ν-*согласованно и удовлетворяет условию* (H_β), *то f допускает непрерывное продолжение* $S \xrightarrow{\tilde{f}} E$.

Доказательство. Сначала докажем первую часть теоремы. Поскольку множество $[A]_S$ компактно при $A \in \beta$, а пространство E хаусдорфово (см. предложение 1), то $[f(A)]_E = \tilde{f}([A]_S)$ и $[f(A)]_E$ компактно, откуда следует ν-компактность $[f(A)]_Y$ (см. предложение 5). Итак, β-ν-согласованность отображения f доказана. Пусть далее $A \in \beta$, $\vartheta \in Cov([f(A)]_Y, Y)$ и ϑ конечно. Рассмотрим компактное множество $[A]_S$, его образ $\tilde{f}([A]_S) = [f(A)]_E$ и семейство $\hat{\vartheta} = \{\hat{V} \mid V \in \vartheta\}$. Отметим, что $\hat{\vartheta}$ покрывает $[f(A)]_E$. Компактность $[A]_S$ позволяет выбрать множества $U_1 \underset{\text{op}}{\subset} X, \ldots, U_n \underset{\text{op}}{\subset} X$ и $V_1, \ldots, V_n \in \vartheta$ так, чтобы $\hat{U}_1 \cup \ldots \cup \hat{U}_n \supset [A]_S$ и $\tilde{f}(\hat{U}_i) \subset \hat{V}_i$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $A' \in \beta$, $1 \leq i \leq n$. Поскольку $A' \cap U_i = [A' \cap U_i]_X \subset U_i$, то $\left[A'\cap U_i\right]_S \subset \hat{U}_i$ и, следовательно, $\tilde{f}\left(\left[A'\cap U_i\right]_S\right)\subset \tilde{f}\left(\hat{U}_i\right)\subset \hat{V}_i$. А так как множество $\left[A'\cap U_i\right]_S$ компактно, то $\tilde{f}\left(\left[A'\cap U_i\right]_S\right)=\left[f\left(A'\cap U_i\right)\right]_E$. Таким образом, $\left[f\left(A'\cap U_i\right)\right]_E\subset \hat{V}_i$, что влечет соотношение $\left[f\left(A'\cap U_i\right)\right]_Y\subset V_i$. Условие $\left(H_\beta\right)$ выполняется. Единственность продолжения $\tilde{f}$ следует из хаусдорфовости пространства E (см., например, [8, с. 118]). Первая часть доказана.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Зафиксируем произвольные ультрафильтр $\xi\in S\backslash X$ и дискрет $A\in\xi\cap\beta$ и введем обозначение $F(\xi,\ A)=\cap\left\{\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E \middle| F\in\xi\right\}$. Ясно, что семейство $\left\{\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E \middle| F\in\xi\right\}$ центрированное, а в силу условия β-ν-согласованности и предложения 5 каждое множество $\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E$ компактно, откуда $F(\xi,\ A)\neq\varnothing$. Если $\xi\cap\beta\ni A'$, то $\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E\supset\left[f\left(A'\cap A\cap F\right)\right]_E\supset F(\xi,\ A')$, где $F\in\xi$, и, следовательно, $F(\xi,\ A)\supset F(\xi,\ A')$. И наоборот, $F(\xi,\ A')\supset F(\xi,\ A)$, откуда $F(\xi,\ A)=F(\xi,\ A')$, т. е. $F(\xi,\ A)$ не зависит от выбора $A\in\xi\cap\beta$. Пусть $z\in F(\xi,\ A)$. Тогда при любых $F\in\xi$ и окрестности $\hat{V}$ точки z $\left(V\underset{\text{op}}{\subset}Y\right)$ имеем $\hat{V}\cap f\left(A\cap F\right)=V\cap f\left(A\cap F\right)\neq\varnothing$, откуда следует, что $A\cap f^{-1}(V)\in\xi$. Но тогда в силу хаусдорфовости пространства E $F(\xi,\ A)=\{z\}$. Положим, что $\tilde{f}(\xi)=z$. Далее проверим непрерывность $\tilde{f}$. Пусть $x\in X$, $f(x)=y\in V\underset{\text{op}}{\subset}Y$. Выберем множества $W\underset{\text{op}}{\subset}Y$ и $U\underset{\text{op}}{\subset}X$ так, чтобы $y\in W$, $[W]_Y\subset V$, $x\in U$ и $f(U)\subset W$. Покажем, что $\tilde{f}\left(\hat{U}\right)\subset\hat{V}$. Пусть $\xi\in\hat{U}\backslash U$ и $A\in\xi\cap\beta$. Тогда $\tilde{f}(\xi)\in\left[f\left(A\cap U\right)\right]_E\subset[W]_E\subset\hat{V}$. Соотношение $\tilde{f}\left(\hat{U}\right)\subset\hat{V}$ доказано, тем самым установлена непрерывность в точках $x\in X$. Пусть теперь $\xi\in S\backslash X$, $\tilde{f}(\xi)=z\in\hat{V}$, где $V\underset{\text{op}}{\subset}Y$. По определению $\{z\}=\bigcap\limits_{F\in\xi}\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E$, где $A\in\xi\cap\beta$ (см. выше). Но тогда для некоторых $F_1,\ \ldots,\ F_n\in\xi$ выполняется включение $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\left[f\left(A\cap F_i\right)\right]_E\subset\hat{V}$ (см. [8, с. 197]). Полагаем, что $F=\bigcap\limits_{i=1}^{n}F_i$. Имеем $F\in\xi$ и $\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}\left[f\left(A\cap F_i\right)\right]_E$, откуда $\left[f\left(A\cap F\right)\right]_E\subset\hat{V}$ и, следовательно, $\left[f\left(A\cap F\right)\right]_Y\subset V$. В силу условия $\left(H_\beta\right)$ для покрытия $\vartheta\in Cov\left(\left[f(A)\right]_Y,\ Y\right)$, $\vartheta=\{V,\ W\}$, где $W=Y\backslash\left[f\left(A\cap F\right)\right]_Y$, можно подобрать конечное покрытие $u\in Cov(A,\ X)$ с указанными в определении 6 свойствами. Будем считать, что $u=\{U_1,\ \ldots,\ U_n\}\cup\{U_1'\cup\ldots\cup U_k'\}$, где $V_{U_i}=V$, $1\le i\le n$, $V_{U_j'}=W$, $1\le j\le k$. Введем обозначение $U=\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i$. Легко проверить, что $A\cap F\cap U_j'=\varnothing$ для любого $j\le k$, откуда $A\cap F\subset U$ и, следовательно, $\xi\in\hat{U}$. Очевидно также, что $f(U)\subset V$. Покажем, что $\tilde{f}\left(\hat{U}\right)\subset\hat{V}$. Если $\psi\in\hat{U}\backslash U$, то из соотношения $\hat{U}=\hat{U}_1\cup\ldots\cup\hat{U}_n$ следует, что $B\cap U_i\in\psi$ для некоторых $B\in\psi\cap\beta$ и i, $1\le i\le n$. Но по условию $\left(H_\beta\right)$. имеем $\left[f\left(B\cap U_i\right)\right]_Y\subset V$, что влечет соотношение $\tilde{f}(\psi)\in\left[f\left(B\cap U_i\right)\right]_E\subset\hat{V}$. Непрерывность $\tilde{f}$ проверена. Теорема доказана.

Далее рассмотрим случай, когда одно из пространств счетно-компактно.

Определение 7. Отображение $X\xrightarrow{g}Z$ назовем β-*comp*-согласованным, если множество $\left[g(A)\right]_Z$ компактно для любого дискрета $A\in\beta$.

Теорема 3. *Пусть пространство Z счетно-компактно и регулярно. Если g допускает непрерывное продолжение* $S\xrightarrow{\tilde{g}}Z$, *то* $\tilde{g}$ *единственно, отображение g* β-*comp-согласованно и удовлетворяет условию* $\left(H_\beta\right)$. *Обратно, если отображение g* β-*comp-согласованно и удовлетворяет условию* $\left(H_\beta\right)$, *то g допускает непрерывное продолжение* $S\xrightarrow{\tilde{g}}Z$.

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 (с учетом замены Y, f и условия β-ν-согласованности на Z, g и условие β-*comp*-согласованности соответственно).

Функториальные свойства конструкции Ω-насыщения

Теоремы 2 и 3 позволяют обосновать следующее построение, которое дает взгляд на конструкцию Ω-насыщения с категорной точки зрения.

Определим категории П, K_Δ, K_δ и их отображения s, s_Δ, s_δ соответственно в категорию TOP всех топологических пространств и непрерывных отображений.

Объектами категории П назовем любую пару (X, β), где X – регулярное не счетно-компактное пространство, β – Δ-база в X, а также любое счетно-компактное регулярное пространство Z. Морфизмами пары (X, β) в пару (Y, ν), пары (X, β) в пространство Z, пространства Z в пару (X, β) и пространства Z в пространство Z' будем считать непрерывные отображения $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Z$, $Z \xrightarrow{h} X$ и $Z \xrightarrow{h'} Z'$ соответственно, где h и h' есть произвольные отображения, f и g удовлетворяют условию (H_β) и f β-ν-согласованно, а g β-*comp*-согласованно. Образы указанных объектов и морфизмов при отображении s – это Ω-насыщение $s_\beta X$, само пространство Z, непрерывные продолжения $s_\beta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\nu Y$ и $s_\beta X \xrightarrow{\tilde{g}} Z$ и сами отображения h и h' соответственно (т. е. $\tilde{h} = h$, $\tilde{h}' = h'$).

Объектом категории K_Δ назовем любое регулярное пространство. Если X и Y не счетно-компактны, а Z и Z' счетно-компактны, то морфизмами в K_Δ будем считать непрерывные отображения $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Z$, $Z \xrightarrow{h} X$ и $Z \xrightarrow{h'} Z'$, где h и h' есть произвольные отображения, f и g удовлетворяют условию (H_Δ) и f Δ-согласованно, а g Δ-*comp*-согласованно. Образы объектов X и Z и указанных морфизмов при отображении s_Δ – это Ω-насыщение $s_\Delta X$, само пространство Z, непрерывные продолжения $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$ и $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{g}} Z$ и сами отображения h и h' соответственно (т. е. $\tilde{h} = h$, $\tilde{h}' = h'$).

Категорию K_δ определяем, объявляя ее объектами все не счетно-компактные регулярные δ-хаусдорфовы пространства и все счетно-компактные регулярные пространства. Далее повторяем то же, что и для категории K_Δ, заменяя Δ на δ.

Замкнутость категорий П, K_Δ, K_δ относительно операции композиции морфизмов, а также выполнение соотношений вида $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ следуют непосредственно из теорем 2 и 3 (в частности, из единственности непрерывных продолжений). Таким образом, справедлива нижеприведенная теорема.

Теорема 4. *Отображения s, s_Δ и s_δ являются ковариантными функторами из категорий* П, K_Δ *и* K_δ *соответственно в категорию TOP.*

Замечание 4. Отождествив каждое не счетно-компактное пространство X категории K_Δ с парой (X, Δ), мы можем считать категорию K_Δ полной подкатегорией в П, а функтор s_Δ – сужением на K_Δ функтора s. Аналогичное утверждение справедливо для категории K_δ (с учетом замены Δ на δ).

Библиографические ссылки

1. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Мориты. *Доклады Академии наук БССР.* 1977;21(9):777–780.

2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen.* 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.

3. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A.* 1973;12(313/328):7–15.

4. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact *M*-spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology.* New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.

5. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Мориты. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:46–53. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.

6. Harris D. The Wallman compactification as a functor. *General Topology and its Applications.* 1971;1(3):273–281. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90098-5.

7. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика.* 2001;1:51–55.

8. Энгелькинг Р. *Общая топология.* Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.

References

1. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturations of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR.* 1977;21(9):777–780. Russian.

2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen.* 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.

3. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A.* 1973;12(313/328):7–15.

4. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact *M*-spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology.* New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.

5. Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:46–53. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.

6. Harris D. The Wallman compactification as a functor. *General Topology and its Applications.* 1971;1(3):273–281. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90098-5.

7. Kukrak HO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2001;1:51–55. Russian.

8. Engelking R. *General topology.* Warszawa: PWN; 1977. 626 p. (Monografie matematyczne; tom 60).

Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.

Получена 18.12.2021 / исправлена 09.11.2022 / принята 09.03.2023.
Received 18.12.2021 / revised 09.11.2022 / accepted 09.03.2023.