

МОНОТОННОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ НА КОНЕЧНЫХ РЕШЕТКАХ

А. О. ЗАДОРЖНЮК¹⁾

¹⁾ЭПAM Системз, ул. Академика Купревича, 1, корп. 1, 220141, г. Минск, Беларусь

Рассматриваются два способа упорядочить вершины графа относительно некоторой его фиксированной вершины, связанных со случайными блужданиями на нем. Первый способ – порядок вершин в соответствии с вероятностью того, что случайное блуждание фиксированной длины закончится в каждой из них. Исследуемое в этой части блуждание является «ленивым», т. е. вместо очередного шага может оставаться на месте. Выделен класс графов, для которых такой порядок совпадает со слабым порядком по геодезическим расстояниям до соответствующих вершин. Приведены примеры представителей данного класса – n -мерные решетки. Второй способ упорядочивания – резисторные расстояния до выбранной вершины. Для класса графов установлена пара вершин, между которыми достигается максимальное по всему графу резисторное расстояние. Приведены примеры представителей этого класса, включая n -мерные решетки.

Ключевые слова: случайные блуждания; резисторное расстояние; решетки.

Благодарность. Автор выражает благодарность заведующему кафедрой высшей математики БГУ М. М. Васильковскому за постановку задачи и участие в обсуждении, а также рецензенту за выявление существенных недостатков статьи.

MONOTONICITY OF RANDOM WALKS' STATES ON FINITE GRIDS

A. O. ZADOROZHNUYK^a

^aEPAM Systems, 1 Akademika Kupreviča Street, 1 building, Minsk 220141, Belarus

In this paper two ways to order the nodes of a graph with respect to an arbitrary node are considered, both connected to random walks on the graph. The first one is the order according to probabilities of states of a random walk of fixed length started in that arbitrary node. The walks considered here are lazy walks – instead of making a step they are allowed to stay in the same node. A class of graphs, where such order corresponds to the weak order by geodesic distances, was found. Square and toric n -dimensional grids are shown to be instances of this class. The second way of ordering is resistance distance to a fixed node. For another class of graphs, a pair of vertices with maximal resistance distance between them is established. Grids are again shown to be an example of graphs belonging to this class.

Keywords: random walks; resistance distance; grids.

Acknowledgements. The author is grateful to the head of the department of higher mathematics of the Belarusian State University M. M. Vaskouski for stating the problem and taking part in the discussion, as well as to the reviewer for pointing out significant flaws in this work.

Образец цитирования:

Задорожнюк АО. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;1:38–45.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-38-45>

For citation:

Zadorozhnyuk AO. Monotonicity of random walks' states on finite grids. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;1:38–45. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-38-45>

Автор:

Анна Олеговна Задорожнюк – системный аналитик.

Author:

Anna O. Zadorozhnyuk, system analyst.
a_zadorozhnyuk@mail.ru

Введение

Резисторное расстояние – метрика на графе, полезная для описания его кластерной структуры при анализе распространения информации [1; 2]. Его можно сопоставить с сопротивлением электрической цепи, соответствующей графу, где каждое ребро – это резистор. В отличие от геодезического расстояния резисторное расстояние зависит в большей степени от количества разных путей между вершинами, и геодезические расстояния мало что позволяют сказать о резисторных расстояниях. Однако для их исследования оказываются полезными изопериметрические неравенства [1; 3; 4].

Резисторные расстояния в графе можно анализировать не только путем соотнесения их со значениями сопротивлений в соответствующей электрической цепи, но и с помощью случайных блужданий. Так, резисторное расстояние между парой вершин пропорционально времени доступа – количеству шагов, которое сделает блуждание, прежде чем первый раз попадет из одной вершины в другую.

Случайные блуждания на графах Кэли симметрической группы и групп Коксетера были исследованы М. Бернштейн [5] и Г. Уайтом [6] соответственно. В частности, ими определено, как упорядочены вероятности того, что блуждание на n -м шаге окажется в каждой из вершин. На основе использовавшегося в указанных работах метода в настоящей статье устанавливается упорядоченность для другого класса графов, представителями которого являются в том числе решетки.

Что касается монотонности резисторных расстояний, то для ее исследования, как правило, не подходят точные формулы, хотя они и известны [7]. Знание формулы для точного значения оказывается полезным в редких случаях, таких как графы химических соединений [8; 9]. В [10] для класса графов определяется вершина с максимальным резисторным расстоянием относительно заданной вершины. В настоящей работе этот подход адаптируется так, чтобы параметрами были сразу две вершины вместо одной, и определяются пары вершин графа с максимальным сопротивлением между ними.

Случайные блуждания и слабый порядок

Случайное блуждание на графе – процесс перемещения по вершинам графа. Начавшись в некоторой вершине, блуждание на каждом шаге переходит в одну из смежных с текущей вершин с вероятностью, пропорциональной весу соединяющего их ребра. В данной статье рассматриваются невзвешенные графы, поэтому переходы в каждую из соседних вершин равновероятны. Блуждания, которые исследуются далее, называются «ленивыми», поскольку на каждом шаге они могут остаться в текущей вершине с той же вероятностью, что и совершить переход в каждую из соседних вершин.

Введем частичный (слабый) порядок на графе G относительно некоторой его вершины v : будем говорить, что $w \leq_v u$, если существует кратчайший путь из v в u , который содержит w .

Как показано в [6], для графов Кэли групп Коксетера верно следующее: для любого n и любых вершин $w \leq_e w'$ вероятность того, что блуждание длины n , начавшееся в e , закончится в w , не меньше, чем вероятность того, что оно закончится в w' . Для доказательства данного факта рассматриваются блуждания длины n , заканчивающиеся в каждой из двух смежных вершин, и строится инъекция множества путей до большей вершины во множество путей до меньшей вершины. Эту же идею мы применим в настоящей статье для исследования блужданий на решетках, но не ограничиваясь инъекциями, для построения которых используются свойства графов Кэли.

Граф G будем называть монотонным, если для любой его вершины v выполняется условие: для $\forall n \in \mathbb{N}$ и любых двух смежных вершин $w \leq_v u$ существует инъекция множества $P(u)$ путей длины n между v и u во множество путей $P(w)$ длины n между v и w , обладающая следующим свойством: если в пути $p(u) \in P(u)$ равны i -я и $(i+1)$ -я вершины, то и в соответствующем ему пути $p(w) \in P(w)$ эти вершины равны.

Теорема 1. Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$, где все графы G_i монотонны. Тогда для любых $v \in G$, $n \in \mathbb{N}$ и таких $w, w' \in G$, что $w \leq_v w'$, вероятность того, что случайное блуждание длины n заканчивается в w' , не больше, чем вероятность того, что оно заканчивается в w .

Доказательство. Введем координаты на графе G (каждому G_i будет соответствовать одно измерение). Вершины графов G_i пронумеруем произвольно (нам достаточно просто отличать их друг от друга). Таким образом, вершина $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ является произведением вершин с номерами x_i из графов G_i .

Заметим, что расстояния в G выражаются через расстояния в G_i : $d_G(x, y) = \sum_{i=1}^m d_{G_i}(x_i, y_i)$.

Начнем с рассмотрения случая, когда w и w' смежны. Их координаты совпадают во всех измерениях, кроме одного. Обозначим их $(w_1, \dots, w_k, \dots, w_m)$ и $(w_1, \dots, w'_k, \dots, w_m)$. Блуждание $v, a'_2, \dots, a'_{n-1}, w'$ на графе G будем рассматривать покоординатно. Так, его компонента, относящаяся к k -й координате, – это блуждание длины n в монотонном графе G_k , заканчивающееся в w'_k . Для таких блужданий существует

инъекция во множество блужданий длины n , заканчивающихся в w_k . Тогда, чтобы получить инъекцию для блужданий в графе G , все координаты вершин в них, кроме k -й координаты, оставляем нетронутыми, а для k -х координат применяем упомянутую инъекцию на графе G_k . Убедимся, что полученные таким образом последовательности $v, a_2, \dots, a_{n-1}, w$ неразрывны и могут считаться блужданиями. Каждая пара соседних вершин a'_i, a'_{i+1} блуждания отличается максимум одной координатой. Если это k -я координата или $a'_i = a'_{i+1}$, то смежность a_i, a_{i+1} следует из смежности $a_{i,k}, a_{i+1,k}$ в графе G_k . Если же a'_i, a'_{i+1} отличаются какой-то другой j -й координатой, то они и продолжают отличаться только ею, потому что мы потребовали от инъекции на графе G_k , чтобы из $a'_{i,k} = a'_{i+1,k}$ следовало $a_{i,k} = a_{i+1,k}$.

Для несмежных вершин $w \leq_v w'$ инъекцию получим как композицию всех инъекций на кратчайшем пути из w' в w .

В качестве примера монотонных графов приведем C_m и P_m . В данном случае пронумеровать вершины, задавая координаты, для удобства можно по порядку, а не случайным образом. Будем рассматривать только отображения для смежных пар вершин, поскольку остальные являются их композицией. Не теряя общности, будем считать, что вершина, из которой начинается блуждание в C_m , имеет координату 0, и мы отображаем множество блужданий $P(x+1)$ во множество $P(x)$. Также будем полагать, что вершина белая, если она ближе к x , чем к $x+1$, и черная, если наоборот. Тогда, если m четное, есть два ребра, соединяющих вершины разных цветов: $(x, x+1)$ и $\left(x + \frac{m}{2}, x + 1 + \frac{m}{2}\right)$. Будем называть эти ребра

серыми. Если же m нечетное, то вместо ребра $\left(x + \frac{m}{2}, x + 1 + \frac{m}{2}\right)$ имеем серую вершину $x + \frac{m+1}{2}$. Для блуждания $0, a_2, \dots, a_{n-1}, x+1$ строим отображение следующим образом. Находим последнюю такую вершину a_j , что она либо сама является серой, либо лежит на белом конце серого ребра. Для $i \leq j$ задаем отображение как $l(a_i) = a_i$, а для $i > j$ — как $l(a_i) = (2x - a_i + 1) \bmod m$. Можно убедиться, что данное отображение меняет местами концы серых ребер, а также вершины, смежные с серой вершиной. Поэтому a_j смежна с $l(a_{j+1})$ (или равна ей), и в результате мы действительно получим случайное блуждание длины n , которое заканчивается в вершине $(2x - (x+1) + 1) \bmod m = x$.

Теперь рассмотрим P_m . Пусть вершина, где начинается блуждание, имеет номер k . Не теряя общности, будем строить отображение множества блужданий $P(x+1)$ во множество $P(x)$, где $x \geq k$. В данном случае мы имеем единственное серое ребро — $(x, x+1)$. В блуждании $0, a_2, \dots, a_{n-1}, x+1$ определим последнюю вершину $a_j = x$, являющуюся белым концом серого ребра. Для $i \leq j$ зададим отображение как $l(a_i) = a_i$, для $i > j$ — как $l(a_i) = a_i - 1$. Получившийся путь остается непрерывным, так как $l(a_{j+1}) = l(x+1) = x = l(a_j)$.

Имея эти отображения, мы можем использовать теорему 1 на произведениях циклов и цепей. В частности, заключаем следующее.

Следствие 1. Пусть граф G — m -мерная решетка (торическая в случае произведения циклов или квадратная в случае произведения цепей). Для любых $v \in G$, $n \in \mathbb{N}$ и таких $w, w' \in G$, что $w \leq_v w'$, вероятность того, что случайное блуждание длины n заканчивается в w' , не больше, чем вероятность того, что оно заканчивается в w .

Была предпринята попытка доказать аналогичное свойство для треугольной решетки (рис. 1), но, как оказалось, она не обладает подобной монотонностью.

Вычисления на решетке для $n = 5$, например, показывают, что блуждание, начавшееся в вершине v , отмеченной выколотой точкой (рис. 2), через три шага будет в вершине w с вероятностью $\approx 0,124$, а в самой вершине v с вероятностью $\approx 0,118$, в то время как $v \leq_v w$.

Экстремальность резисторных расстояний

Резисторное расстояние — метрика, значение которой соответствует сопротивлению между вершинами в электрической цепи, построенной по образу графа, где ребра — единичные резисторы, одна из двух рассматриваемых вершин — источник, а другая — сток. Законы Кирхгофа позволяют построить систему уравнений для потенциалов в вершинах графа, решив которую по закону Ома можно найти и само сопротивление. Впрочем, даже для относительно небольших графов вычисление значений сопротивлений с помощью этой системы — достаточно трудоемкий процесс, и при исследовании свойств резисторного расстояния часто оказывается удобнее обходиться без него.

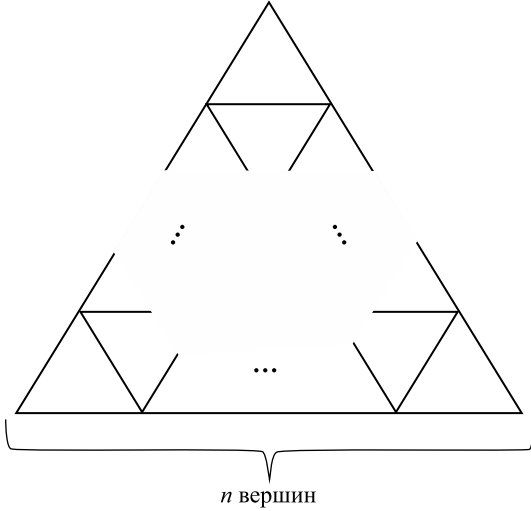


Рис. 1. Треугольная решетка
Fig. 1. Triangular grid

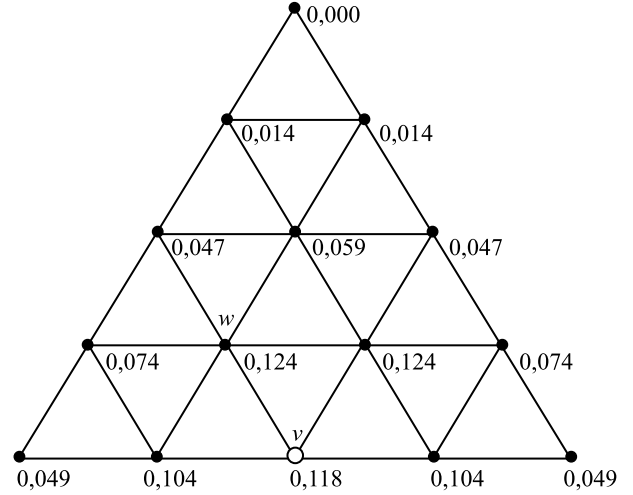


Рис. 2. Вероятности достижения каждой из вершин блужданием длины 3
Fig. 2. Probabilities for each node to be reached by a random walk of length 3

Сопротивление связано со случайными блужданиями. Величина, равная математическому ожиданию числа шагов, которое потребуется «неленивому» блужданию, начавшемуся в вершине a , чтобы впервые достигнуть вершины b , называется временем доступа, она пропорциональна резисторному расстоянию $R(a, b)$ с коэффициентом, равным числу ребер в графе.

Начнем с исследования положения в графе вершин, сопротивление между которыми максимально. Ниже будет продемонстрировано, что максимальное сопротивление достигается между наиболее удаленными друг от друга вершинами для таких графов, как, например, решетки и торы. Интуитивно может показаться, что тот же принцип будет действовать в общем случае, но это не так. Например, рассмотрим граф на рис. 3. Его диаметр 4, и единственная пара вершин с таким расстоянием между ними – это v и u . Сопротивление $R(u, v) \approx 0,44$, в то время как $R(x, w) \approx 0,56$, а $R(x, y) \approx 1,11$.

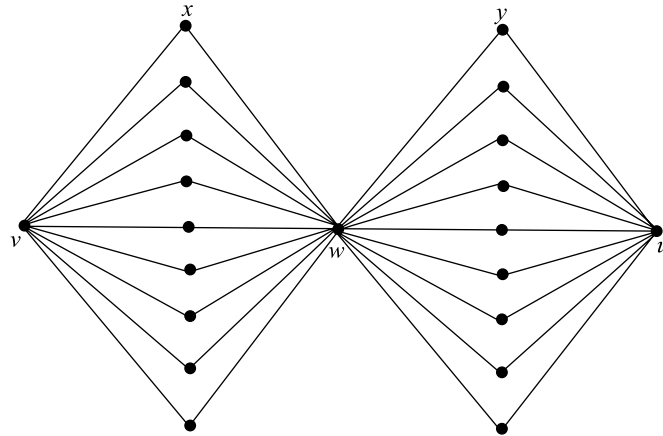


Рис. 3. Пример пары вершин с максимальным расстоянием и не максимальным сопротивлением
Fig. 3. Example of a pair of nodes with maximal distance but not maximal resistance between them

Вернемся к торам и решеткам, для которых интуитивное предположение оказывается верным. На графе $G(V, E)$, содержащем N вершин, введем функцию

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{(v_i, v_j) \in E} (x_i - x_j)^2$$

(значение x_i соответствует вершине v_i). Согласно [10]

$$\frac{1}{R(a, b)} = \inf_{x_i \in \mathbb{R}, x_a = 1, x_b = 0} f(x_1, \dots, x_N).$$

Причем инфимум в левой части достигается в стационарной точке функции f , координаты которой являются потенциалами в соответствующих вершинах сети.

Граф H , для которого существует такой порядок $(v_1, \dots, v_N)$ вершин, что для любого набора чисел $x_1 \leq \dots \leq x_N$ и любой его перестановки σ

$$f(x_1, \dots, x_N) \leq f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}),$$

будем называть упорядоченным. Следующая теорема – улучшенная версия теоремы 4 работы [10]: в ней сопротивление максимизируется сразу по двум вершинам упорядоченного графа, а не по одной.

Теорема 2. Пусть граф H упорядоченный. Тогда для любого связного графа G резисторное расстояние $R((a, v_i), (b, v_j))$ в графе $G \times H$ максимально при $i = 1, j = N$.

Доказательство. Пусть $\{u'_w\}_{w \in G \times H}$ – потенциалы в вершинах при условии, что потенциал в источнике (a, v_i) равен нулю, а потенциал в стоке (b, v_j) равен единице. Тогда если нам удастся показать, что система потенциалов $\{u_w\}_{w \in G \times H}$, где $u_{(a, v_1)} = 0$, а $u_{(b, v_N)} = 1$, такова, что $f(\{u_w\}_{w \in G \times H}) \leq f(\{u'_w\}_{w \in G \times H})$, то и теорема будет доказана.

Заметим, что, поскольку в точках-потенциалах достигается инфимум f , необязательно нужно использовать реальные значения потенциалов, достаточно придумать любой набор чисел $\{x_w\}_{w \in G \times H}$, соответствующих вершинам, где 0 и 1 соответствуют (a, v_1) и (b, v_N) , для которого выполнялось бы неравенство $f(\{x_w\}_{w \in G \times H}) \leq f(\{u'_w\}_{w \in G \times H})$.

Для каждой вершины $(c, v_k) \in G \times H$ зададим потенциалы $u_{(c, v_1)}, \dots, u_{(c, v_N)}$ как $u'_{(c, v_1)}, \dots, u'_{(c, v_N)}$, упорядоченные по возрастанию. Заметим, что при этом действительно получается $u_{(a, v_1)} = 0$, а $u_{(b, v_N)} = 1$. Покажем, что по сравнению с предыдущей системой значение f не увеличилось.

Рассмотрим граф H , ассоциированный с вершиной $c \in G$. Числа в нем теперь упорядочены в соответствии с порядком, заданным на самом графе, а значит, f на нем не превосходит f исходного графа.

Далее перейдем к ребрам, соединяющим два графа H в $G \times H$. Воспользуемся трансервенством: для наборов $x_1 \leq \dots \leq x_N$ и $y_1 \leq \dots \leq y_N$ и перестановки N чисел σ верно

$$\sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^N (x_k - y_{\sigma(k)})^2.$$

После произведенного нами упорядочивания числа в вершинах любых двух графов H из $G \times H$ представляют собой как раз такие односторонние наборы, а значит, f на них не больше, чем f исходного графа. Итак, требуемая система построена. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы может быть доказан и более общий результат (более слабая версия также приведена в [10]).

Теорема 3. Пусть G – декартово произведение упорядоченных графов H_i . Противоположными будем называть вершины $v = (v_1, \dots, v_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$, где существует такой порядок на каждом H_i , что v_i и w_i – первая и последняя вершины в нем соответственно. Тогда максимальное сопротивление на G достигается на паре противоположных вершин.

Доказательство. Будем рассматривать H_1 с порядком вершин $(v_{1,1}, \dots, v_{1,N})$ как H из теоремы 2, а остальную часть произведения как G . Тогда для любых i, j, a, b верно $R((v_{1,i}, a), (v_{1,j}, b)) \leq R((v_{1,1}, a), (v_{1,N}, b))$, и пара вершин с максимальным сопротивлением – это $(v_{1,1}, \dots)$ и $(v_{1,N}, \dots)$. Аналогично можно рассматривать как H любой из графов H_i . В конце концов везде будут выбраны первая и последняя (в соответствии с порядком на H_i) вершины.

Следствие 2. Если G – произведение полных графов, цепей и циклов, то максимальное сопротивление в нем достигается на паре самых удаленных друг от друга вершин.

Доказательство. Согласно [10] цепь и цикл – упорядоченные графы. Порядок вершин цепи совпадает с тем, в котором они соединены в этой цепи. Вершины цикла C_N , пронумерованные по кругу,

можно упорядочить как $(v_1, v_2, v_N, v_3, v_{N-1}, \dots)$. Для вершин полного графа подойдет любой порядок. Таким образом, противоположными в этом графе являются вершины, расстояние между которыми максимально.

Для n -мерного куба можно пойти дальше и с помощью теоремы 2 доказать монотонность сопротивлений относительно геодезических расстояний.

Утверждение. Пусть v, u, w – такие вершины n -мерного куба, что для геодезических расстояний между ними верно $d(v, u) \leq d(v, w)$. Тогда $R(v, u) \leq R(v, w)$.

Доказательство. Будем задавать вершины куба через n -мерные векторы, состоящие из нулей и единиц. Поскольку куб – вершинно-транзитивный граф, можем зафиксировать $v = (0, \dots, 0)$. Кроме того, для любых вершин u и w , находящихся на одном и том же расстоянии k от v , существует автоморфизм куба, переводящий u в w и оставляющий v на месте, – это перестановка координат вектора, задающего вершину, которая возможна благодаря тому, что количество единиц в векторах для u и w одинаково. Таким образом, $R(v, u) = R(v, w)$, если $d(v, u) = d(v, w)$, и в дальнейшем при сравнении вершин с разными расстояниями до v можно без потери общности рассматривать любую пару таких вершин.

Очевидно, что если $u = v$, то из $d(v, u) \leq d(v, w)$ следует $0 = R(v, u) \leq R(v, w)$ (как метрика, резисторное расстояние неотрицательно). Пусть теперь $d(v, u) = k$, $d(v, w) = k + 1$, $0 < k < n$. В качестве u

выберем вершину $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0, 0 \right)$, в качестве w – вершину $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0, 1 \right)$. Теперь обратимся

к теореме 2. Граф G – это $(n - 1)$ -мерный куб, который задается первыми $n - 1$ координатами, за $H = P_2$

отвечает последняя координата, $a = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right)$, $b = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1-k} \right)$. Таким образом, получаем, что

$R(v, u) \leq R(v, w)$. Учитывая, что это верно для всех k от 1 до $n - 1$, можем построить цепочку неравенств, в которой пары вершин по сопротивлениям будут упорядочены так же, как по расстояниям.

В целом, однако, резисторное расстояние является мерой скорее количества путей между вершинами, чем их длины, и подобное соответствие между ним и геодезическим расстоянием – довольно неестественное свойство. Даже для менее элементарных вариантов решеток и торов этого не наблюдается. На рис. 4 приведена развертка тора $C_5 \times C_{12}$ с сопротивлениями между одной фиксированной вершиной (выколота точка) и всеми остальными вершинами (значения округлены до третьего знака). Можно заметить, например, что вершины со значениями сопротивлений 0,742 и 0,698 находятся на расстояниях 2 и 3 от выколота точки соответственно.

На рис. 5 приведен пример немонотонности для решетки, где, в частности, сопротивлениям 1,451 и 1,510 соответствуют расстояния 5 и 3.

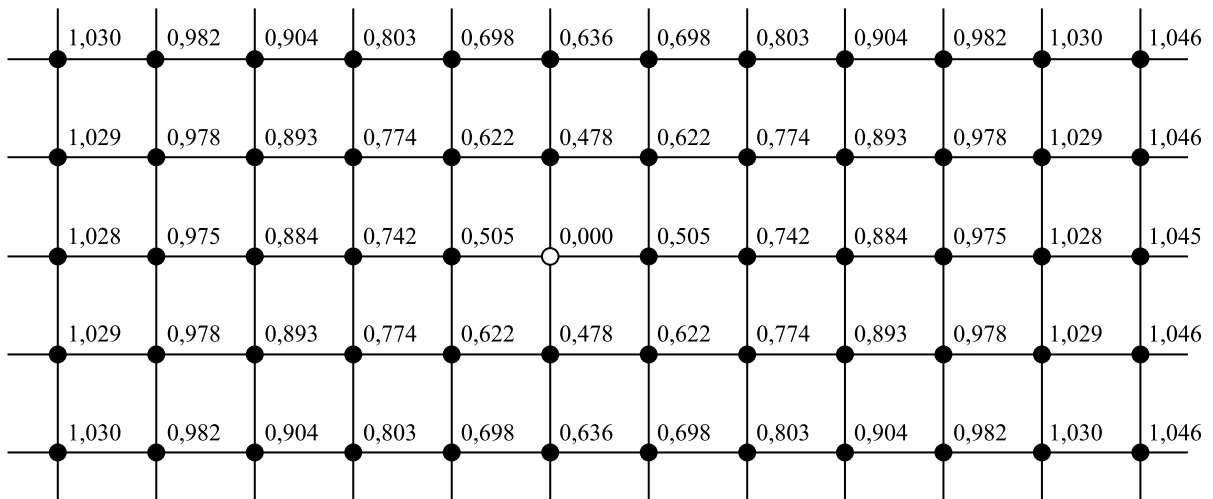


Рис. 4. Сопротивления в $C_5 \times C_{12}$

Fig. 4. Resistances in $C_5 \times C_{12}$

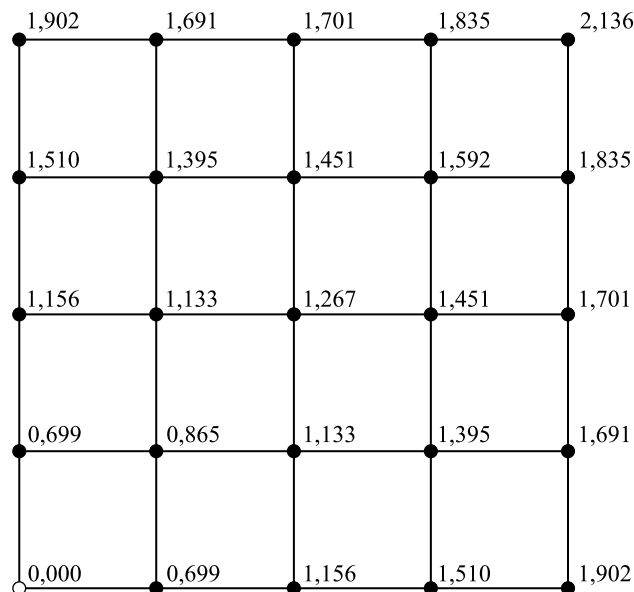


Рис. 5. Сопротивления в $P_5 \times P_5$

Fig. 5. Resistances in $P_5 \times P_5$

Заключение

В работе получены следующие результаты.

1. Выделен класс графов, для которых вероятности того, что случайное блуждание фиксированной длины закончится в данной вершине, упорядочены в соответствии со слабым порядком вершин по геодезическим расстояниям.
2. Для класса графов установлена пара вершин, между которыми достигается максимальное по всему графу резисторное расстояние.

Библиографические ссылки

1. von Luxburg U, Radl A, Hein M. Hitting and commute times in large random neighborhood graphs. *Journal of Machine Learning Research*. 2014;15(1):1751–1798.
2. Sauerwald T. *Randomized protocols for information dissemination* [dissertation]. Paderborn: University of Paderborn; 2008. 146 p.
3. Васильковский ММ, Задорожнюк АО. Асимптотическое поведение резисторных расстояний в графах Кэли. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2018;62(2):140–146. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146.
4. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics*. 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.
5. Bernstein M. Likelihood orders for some random walks on the symmetric group. arXiv:1306.5008v2 [Preprint]. 2014 [cited 2021 December 20]: [34 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1306.5008v2>.
6. White G. The weak Bruhat order for random walks on Coxeter groups. arXiv:1611.04098v1 [Preprint]. 2016 [cited 2021 December 20]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1611.04098v1>.
7. Bapat RB, Gutman I, Xiao W. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2003; 58(9–10):494–498. DOI: 10.1515/zna-2003-9-1003.
8. Li Q, Li S, Zhang L. Two-point resistances in the generalized phenylenes. *Journal of Mathematical Chemistry*. 2020;58(9): 1846–1873. DOI: 10.1007/s10910-020-01152-z.
9. Sardar MS, Pan X-F, Xu S-A. Computation of resistance distance and Kirchhoff index of the two classes of silicate networks. *Applied Mathematics and Computation*. 2020;381:125283. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125283.
10. Bollobás B, Brightwell G. Random walks and electrical resistances in products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1997; 73(1):69–79. DOI: 10.1016/S0166-218X(96)00002-9.

References

1. von Luxburg U, Radl A, Hein M. Hitting and commute times in large random neighborhood graphs. *Journal of Machine Learning Research*. 2014;15(1):1751–1798.
2. Sauerwald T. *Randomized protocols for information dissemination* [dissertation]. Paderborn: University of Paderborn; 2008. 146 p.
3. Vaskouski MM, Zadorozhnyuk AO. Asymptotic behavior of resistance distances in Cayley graphs. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2018;62(2):140–146. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146.
4. Vaskouski M, Zadorozhnyuk A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups. *Discrete Applied Mathematics*. 2017;227:121–135. DOI: 10.1016/j.dam.2017.04.044.

5. Bernstein M. Likelihood orders for some random walks on the symmetric group. arXiv:1306.5008v2 [Preprint]. 2014 [cited 2021 December 20]: [34 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1306.5008v2>.
6. White G. The weak Bruhat order for random walks on Coxeter groups. arXiv:1611.04098v1 [Preprint]. 2016 [cited 2021 December 20]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1611.04098v1>.
7. Bapat RB, Gutman I, Xiao W. A simple method for computing resistance distance. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2003; 58(9–10):494–498. DOI: 10.1515/zna-2003-9-1003.
8. Li Q, Li S, Zhang L. Two-point resistances in the generalized phenylenes. *Journal of Mathematical Chemistry*. 2020;58(9): 1846–1873. DOI: 10.1007/s10910-020-01152-z.
9. Sardar MS, Pan X-F, Xu S-A. Computation of resistance distance and Kirchhoff index of the two classes of silicate networks. *Applied Mathematics and Computation*. 2020;381:125283. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125283.
10. Bollobás B, Brightwell G. Random walks and electrical resistances in products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1997; 73(1):69–79. DOI: 10.1016/S0166-218X(96)00002-9.

Получена 12.01.2022 / исправлена 13.01.2022 / принята 14.02.2022.
Received 12.01.2022 / revised 13.01.2022 / accepted 14.02.2022.