
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

НЕОСЕССИМЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, А. В. НЕСТЕРОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта,
ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

Приведена постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием неосесимметричной нагрузки. Материалы тонких несущих слоев подчиняются гипотезам теории малых упругопластических деформаций. Относительно толстый заполнитель является физически нелинейно-упругим. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в частных производных. Предложена общая методика решения задачи в перемещениях, основанная на методе Фурье и методе упругих решений Ильюшина. Рассмотрен случай внешней косинусоидальной нагрузки. Получено итерационное решение краевой задачи для физически нелинейной пластины. Соответствующее решение упругой задачи выписано в конечном виде. Проведена численная апробация полученного решения.

Ключевые слова: круговая трехслойная пластина; неосесимметричная нагрузка; перемещения; пластичность.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T20P-047).

Образец цитирования:

Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:57–69. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-57-69>

For citation:

Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022; 2:57–69. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-57-69>

Авторы:

Эдуард Иванович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой строительной механики факультета промышленного и гражданского строительства.

Алина Викторовна Нестерович – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры строительной механики факультета промышленного и гражданского строительства.

Authors:

Eduard I. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of structural mechanics, faculty of industrial and civil engineering. edstar0@yandex.by

Alina V. Nesterovich, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of structural mechanics, faculty of industrial and civil engineering. alina_nest92@bk.ru



THE NON-AXISYMMETRIC LOADING OF AN ELASTOPLASTIC THREE-LAYER PLATE IN ITS PLANE

E. I. STAROVOITOV^a, A. V. NESTEROVICH^a

^aBelarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Homiel 246653, Belarus

Corresponding author: E. I. Starovoitov (edstar0@yandex.by)

The statement of the boundary value problem on the deformation of a circular three-layer plate in its plane under the action of a non-axisymmetric load is herein presented. The materials of thin carrier layers obey the hypotheses of the theory of small elastoplastic deformations. The relatively thick filler is physically non-linearly elastic. A system of non-linear differential equilibrium equations in partial derivatives is obtained. A general technique for solving the problem in displacements based on the Fourier method and Ilyushin's method of elastic solutions is proposed. The case of an external cosine load is considered. An iterative solution of a boundary value problem for a physically non-linear plate is obtained. The corresponding solution of the elastic problem is written out in the final form. The obtained solution is numerically tested.

Keywords: circular three-layer plate; non-axisymmetric load; movement; plastic.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project T20R-047).

Введение

В настоящее время композиты широко используются в технике и строительстве, что обуславливает спрос на слоистые, в том числе трехслойные, элементы конструкций. В связи с этим возникла необходимость разработки механико-математических моделей и методов расчета трехслойных элементов конструкций на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно отличающимися физико-механическими свойствами. Несущие слои изготавливаются из материалов с высокими прочностью и жесткостью и служат для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, необходимые для образования монолитной конструкции, предназначены для перераспределения усилий между несущими слоями. Такое сочетание обеспечивает надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды (высокая температура, радиация) и позволяет создавать конструкции, сочетающие высокие прочность и жесткость с относительно малой массой.

Разработка общей теории деформирования трехслойных элементов конструкций, в частности пластин, еще не завершена и активно продолжается. Этой теме посвящен ряд работ, в том числе монографии [1–3], где приведены постановки краевых и начально-краевых задач и методы их решения.

Колебания трехслойных пластин и оболочек рассмотрены в статьях [4–6]. Для вязкоупругопластических цилиндрических оболочек использованы наследственные соотношения теории малых упругопластических деформаций. Решения получены в виде разложения в ряд по собственным ортонормированным функциям. В статьях [7; 8] рассмотрены резонансные колебания круговых трехслойных пластин с учетом воздействия упругого основания. Оценка динамических характеристик тонких цилиндрических сэндвич-панелей с магнитореологическим наполнителем проведена в исследовании [9]. Свободные и резонансные колебания упругих слоистых балок, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [10–12]. Статьи [13; 14] посвящены математическому моделированию гидроупругих колебаний круглой пластины, опирающейся на основания Винклера и Пастернака. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических и сферических оболочек исследован в работах [15; 16]. В публикациях [17–19] рассмотрено статическое и моногармоническое акустическое воздействие на многослойную пластину, исследован динамический резонансный отклик пластины, армированной углеродным волокном, при резонансных колебаниях с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования. Отклик многослойных композитных плит на косой удар описан в статье [20]. Работа [21] посвящена сверхзвуковому флаттеру многослойных композитных пластин.

Деформирование трехслойных упругопластических стержней и пластин с нелинейно-упругим наполнителем исследовано в статьях [22–25]. Анализ деформирования и устойчивости асимметричных многослойных балок проведен в работах [26; 27]. Несущая способность круглых многослойных плит при большом прогибе исследована в статье [28]. Аналитический анализ изгиба круглой многослойной пластины и сравнение изгибных свойств сэндвич-панелей с ячеистым наполнителем выполнены в работах [29; 30].

Неосесимметричное нагружение упругой круговой трехслойной пластины в своей плоскости исследовано в статье [31]. Осесимметричное деформирование круговой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости рассмотрено в работе [32]. В настоящей статье для подобной упругопластической пластины приведены постановка и решение краевой задачи при неосесимметричном нагружении, получены аналитические и численные результаты.

Постановка краевой задачи

Рассматривается симметричная по толщине круговая физически нелинейная трехслойная пластина радиусом r_0 , состоящая из двух тонких несущих слоев толщиной $h_1 = h_2$ и толстого несжимаемого заполнителя толщиной $h_3 = 2c$. Постановка задачи приводится в полярной системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

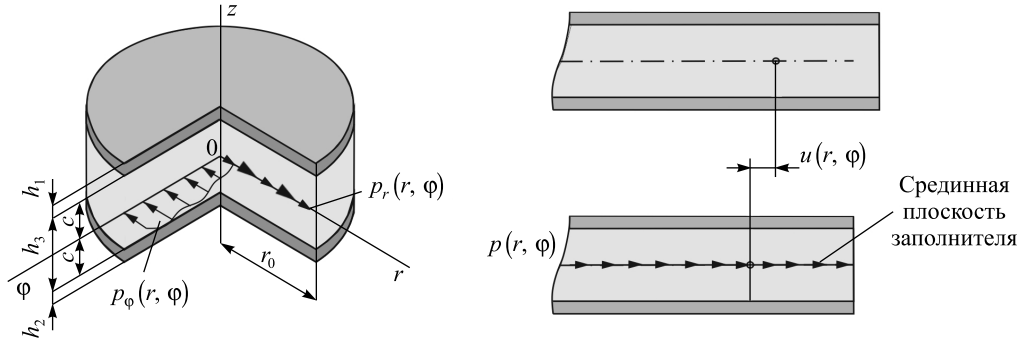


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины
Fig. 1. Calculation scheme of a three-layer plate

Результирующая внешняя распределенная нагрузка приложена в срединной плоскости заполнителя. Ее проекции на оси координат – $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$. За счет симметричности пластины при подобной нагрузке отсутствует изгибное деформирование. Искомые радиальные и тангенциальные перемещения обозначаются через $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$. Принимается, что материалы несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, а заполнитель является нелинейно-упругим.

Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций [1]:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k \left(1 - \omega_k(\epsilon_u^{(k)}) \right) \epsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (1)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k \epsilon^{(k)} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3),$$

где $s_{\alpha\beta}^{(k)}$ и $\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$ и $\epsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; G_k и K_k – модули сдвига и объемной деформации материала k -го слоя; $\omega_k(\epsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев, которые следует положить равными нулю при $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_y^{(k)}$; $\omega_3(\epsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция физической нелинейности материала заполнителя ($\omega_3(\epsilon_u^{(3)}) = 0$ при $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_s^{(k)}$); $\epsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $\epsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $\epsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, выражаемая формулой

$$\epsilon_u^{(k)} = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\epsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} \right)^2 + \left(\epsilon_{rr}^{(k)} \right)^2 - \epsilon_{rr}^{(k)} \epsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 3 \left(\epsilon_{r\varphi}^{(k)} \right)^2}.$$

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ вводятся обобщенные внутренние силы в пластине [23]:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} h_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \quad (2)$$

После проведения необходимых преобразований из вариационного принципа Лагранжа получаем систему дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных усилиях:

$$\begin{aligned} T_{rr'r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) &= -P_r, \\ T_{r\varphi'r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) &= -P_\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где штрих в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ним координате.

Выделим линейную (индекс e) и нелинейную (индекс ω) составляющие в компонентах тензора напряжений:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где слагаемые напряжений выражаются через деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$, при этом

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} &= \left(K_k + \frac{4}{3}G_k\right)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + \left(K_k - \frac{2}{3}G_k\right)\varepsilon_{\beta\beta}^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}), \\ \sigma_{r\varphi e}^{(k)} &= s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}. \end{aligned}$$

Внутренние усилия в пластине (2) с помощью напряжений (4) представим в виде суммы линейной и нелинейной частей:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} = T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} = \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} h_k - \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} h_k. \quad (5)$$

Подставив усилия (5) в уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях для рассматриваемой пластины при неосесимметричном деформировании:

$$\begin{cases} T_{rre'r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi e'\varphi} + T_{rre} - T_{\varphi\varphi e}) = -P_r + P_{r\omega}, \\ T_{r\varphi e'r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi e'\varphi} + 2T_{r\varphi e}) = -P_\varphi + P_{\varphi\omega}. \end{cases} \quad (6)$$

В левой части уравнений (6), которая содержит линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, нижний индекс e в дальнейшем опустим для удобства. Переходя к безразмерной радиальной координате $x = \frac{r}{r_0}$, систему (6) перепишем в виде

$$\begin{cases} T_{rr'x} + \frac{1}{x}(T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = (-P_r + P_{r\omega})r_0, \\ T_{r\varphi'x} + \frac{1}{x}(T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) = (-P_\varphi + P_{\varphi\omega})r_0. \end{cases} \quad (7)$$

Нелинейные добавки (индекс ω) здесь вынесены вправо:

$$\begin{aligned} P_{r\omega} &= \frac{1}{r_0} \left(T_{rr\omega'x} + \frac{1}{x}(T_{r\varphi\omega'\varphi} + T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}) \right), \\ P_{\varphi\omega} &= \frac{1}{r_0} \left(T_{r\varphi\omega'x} + \frac{1}{x}(T_{\varphi\varphi\omega'\varphi} + 2T_{r\varphi\omega}) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив во внутренние усилия в системе (7) напряжения (1) и выразив в них деформации через перемещения $u_r(r)$, $u_\varphi(r)$, после некоторых преобразований получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} L_2(u_r) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r'\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi'\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi'\varphi} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-P_r + P_{r\omega}), \\ L_2(u_\varphi) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r'x\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi'\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r'\varphi} &= \frac{r_0^2}{a_3} (-P_\varphi + P_{\varphi\omega}), \end{aligned} \quad (9)$$

где a_i – коэффициенты, причем

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) dz = \sum_{k=1}^3 \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) h_k, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \left(K_k - \frac{2}{3} G_k \right) h_k, \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 G_k h_k;$$

L_2 – линейный дифференциальный оператор второго порядка, выражаемый формулой

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{x} (xg)_{,x} \right)_{,x} \equiv g_{,xx} + \frac{g_{,x}}{x} - \frac{g}{x^2}.$$

Краевая задача о деформировании круговой трехслойной пластины с физически нелинейными слоями неосесимметричной нагрузкой замыкается добавлением к уравнениям равновесия (9) граничных условий на контуре ($x = r_0$) и в центре пластины ($x = 0$).

Общее решение краевой задачи

Получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (9) в конечном виде не представляется возможным. Поэтому применим метод последовательных приближений, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Это позволит на каждом шаге итерации рассматриваемую нелинейную краевую задачу сводить к решению соответствующей задачи теории упругости с дополнительными фиктивными «внешними» нагрузками.

Систему (9) согласно указанному методу переписываем в итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(u_r^{(n)}) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x}^{(n)} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi}^{(n)} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}), \\ L_2(u_\varphi^{(n)}) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,\varphi x}^{(n)} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi}^{(n)} &= \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (10)$$

где n – номер приближения.

Дополнительные нагрузки $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ на первом шаге итерации принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью формул типа (8):

$$\begin{aligned} p_{r\omega}^{(n-1)} &= \frac{1}{r_0} \left[T_{rr\omega'x}^{(n-1)} + \frac{1}{x} \left(T_{r\varphi\omega'\varphi}^{(n-1)} + T_{rr\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)} \right) \right], \\ p_{\varphi\omega}^{(n-1)} &= \frac{1}{r_0} \left[T_{r\varphi\omega'x}^{(n-1)} + \frac{1}{x} \left(T_{\varphi\varphi\omega'\varphi}^{(n-1)} + 2T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$T_{\alpha\beta\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)(n-1)} h_k = 2 \sum_{k=1}^3 G_k \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)} \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)(n-1)} h_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi).$$

Следовательно, на каждом шаге итерации имеем линейную задачу теории упругости с дополнительными нагрузками $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ (11), вычисляемыми по результатам предыдущего приближения.

Для решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (10) искомые перемещения, внешние и дополнительные нагрузки раскладываем в тригонометрические ряды Фурье

$$\begin{aligned} u_r^{(n)}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[u_{rm}^{(1)(n)}(x) \cos(m\varphi) + u_{rm}^{(2)(n)}(x) \sin(m\varphi) \right], \\ u_\varphi^{(n)}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x) \cos(m\varphi) + u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x) \sin(m\varphi) \right], \\ p_r(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{rm}^{(1)}(x) \cos(m\varphi) + p_{rm}^{(2)}(x) \sin(m\varphi) \right], \\ p_\varphi(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{\varphi m}^{(1)}(x) \cos(m\varphi) + p_{\varphi m}^{(2)}(x) \sin(m\varphi) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$p_{r\omega}^{(n-1)}(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{r\omega m}^{(1)(n-1)}(x) \cos(m\varphi) + p_{r\omega m}^{(2)(n-1)}(x) \sin(m\varphi) \right],$$

$$p_{\varphi\omega}^{(n-1)}(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{\varphi\omega m}^{(1)(n-1)}(x) \cos(m\varphi) + p_{\varphi\omega m}^{(2)(n-1)}(x) \sin(m\varphi) \right],$$

где $u_r^{(n)}(x, \varphi)$ и $u_\varphi^{(n)}(x, \varphi)$ – искомые радиальные и окружные перемещения на n -м шаге приближения; $u_{rm}^{(1)(n)}(x)$, $u_{rm}^{(2)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)$ – искомые радиальные составляющие перемещений; $p_{rm}^{(1)}(x)$, $p_{rm}^{(2)}(x)$, $p_{\varphi m}^{(1)}(x)$, $p_{\varphi m}^{(2)}(x)$ – радиальные составляющие внешних нагрузок; $p_{r\omega m}^{(1)(n-1)}(x)$, $p_{r\omega m}^{(2)(n-1)}(x)$, $p_{\varphi\omega m}^{(1)(n-1)}(x)$, $p_{\varphi\omega m}^{(2)(n-1)}(x)$ – радиальные составляющие дополнительных нагрузок; m – номер члена ряда.

Следует отметить, что члены ряда в разложении (12) при $m = 0$ представляют собой осесимметричные составляющие перемещений и нагрузок. Так как нас интересует неосесимметричная нагрузка, в дальнейшем принимаем $m \geq 1$.

Подставим перемещения и нагрузки (12) в уравнения (10). В силу независимости систем функций $\sin(m\varphi)$, $\cos(m\varphi)$ для выполнения уравнений (10) при любых значениях аргумента φ суммарные коэффициенты при одинаковых гармониках должны обращаться в нуль. Исходя из этого и проведя необходимые преобразования, получим систему четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $u_{rm}^{(1)(n)}(x)$, $u_{rm}^{(2)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x)$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x)$ на n -м шаге приближения:

$$\begin{aligned} L_2 \left(u_{rm}^{(1)(n)}(x) \right) - \frac{a_3 m^2}{a_1 x^2} u_{rm}^{(1)(n)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)m}{a_1 x} u_{\varphi m'x}^{(2)(n)}(x) - \frac{(a_1 + a_3)m}{a_1 x^2} u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x) = \\ = \frac{r_0^2}{a_1} \left(-p_{rm}^{(1)}(x) + p_{r\omega m}^{(1)(n-1)}(x) \right), \\ L_2 \left(u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x) \right) - \frac{a_1 m^2}{a_3 x^2} u_{\varphi m}^{(2)(n)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)m}{a_3 x} u_{rm'x}^{(1)(n)}(x) - \frac{(a_1 + a_3)m}{a_3 x^2} u_{rm}^{(1)(n)}(x) = \\ = \frac{r_0^2}{a_3} \left(-p_{\varphi m}^{(2)}(x) + p_{\varphi\omega m}^{(2)(n-1)}(x) \right), \\ L_2 \left(u_{rm}^{(2)(n)}(x) \right) - \frac{a_3 m^2}{a_1 x^2} u_{rm}^{(2)(n)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)m}{a_1 x} u_{\varphi m'x}^{(1)(n)}(x) + \frac{(a_1 + a_3)m}{a_1 x^2} u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x) = \\ = \frac{r_0^2}{a_1} \left(-p_{rm}^{(2)}(x) + p_{r\omega m}^{(2)(n-1)}(x) \right), \\ L_2 \left(u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x) \right) - \frac{a_1 m^2}{a_3 x^2} u_{\varphi m}^{(1)(n)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)m}{a_3 x} u_{rm'x}^{(2)(n)}(x) + \frac{(a_1 + a_3)m}{a_3 x^2} u_{rm}^{(2)(n)}(x) = \\ = \frac{r_0^2}{a_3} \left(-p_{\varphi m}^{(1)}(x) + p_{\varphi\omega m}^{(1)(n-1)}(x) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Общее решение системы (13) представим в виде суммы общего решения соответствующей ей однородной системы и некоторого частного решения $u_{rm}^{(1)*}$, $u_{\varphi m}^{(1)*}$, $u_{rm}^{(2)*}$, $u_{\varphi m}^{(2)*}$. Общее решение однородной системы уравнений, соответствующей системе (13), получено с помощью программного пакета *Maple* в виде

$$\begin{aligned} u_{rm}^{(1)(n)} &= -C_{m1}^{(n)} x^{m-1} + C_{m2}^{(n)} h_{m1} x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)} h_{m2} x^{m+1}, \\ u_{\varphi m}^{(2)(n)} &= C_{m1}^{(n)} x^{m-1} + C_{m2}^{(n)} x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)} x^{m+1}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$u_{rm}^{(2)(n)} = C_{m5}^{(n)}x^{m-1} - C_{m6}^{(n)}h_{m1}x^{-m+1} - C_{m7}^{(n)}x^{-m-1} - C_{m8}^{(n)}h_{m2}x^{m+1},$$

$$u_{\varphi m}^{(1)(n)} = C_{m5}^{(n)}x^{m-1} + C_{m6}^{(n)}x^{-m+1} + C_{m7}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m8}^{(n)}x^{m+1},$$

где x^{m-1} , x^{-m+1} , x^{-m-1} , x^{m+1} – фундаментальные решения системы (13).

Искомые асимметричные составляющие коэффициентов при m -х гармониках на n -м шаге приближения получим, добавив к решению (14) частные решения $u_{rm}^{(1)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)*}$, $u_{rm}^{(2)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)*}$ неоднородной системы:

$$u_{rm}^{(1)(n)} = -C_{m1}^{(n)}x^{m-1} + C_{m2}^{(n)}h_{m1}x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)}h_{m2}x^{m+1} + u_{rm}^{(1)(n)*},$$

$$u_{\varphi m}^{(2)(n)} = C_{m1}^{(n)}x^{m-1} + C_{m2}^{(n)}x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)}x^{m+1} + u_{\varphi m}^{(2)(n)*},$$

$$u_{rm}^{(2)(n)} = C_{m5}^{(n)}x^{m-1} - C_{m6}^{(n)}h_{m1}x^{-m+1} - C_{m7}^{(n)}x^{-m-1} - C_{m8}^{(n)}h_{m2}x^{m+1} + u_{rm}^{(2)(n)*},$$

$$u_{\varphi m}^{(1)(n)} = C_{m5}^{(n)}x^{m-1} + C_{m6}^{(n)}x^{-m+1} + C_{m7}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m8}^{(n)}x^{m+1} + u_{\varphi m}^{(1)(n)*},$$
(15)

где $C_{m1}^{(n)}, \dots, C_{m8}^{(n)}$ – константы интегрирования, определяемые на каждом шаге итерации; h_{m1}, h_{m2} – коэффициенты, причем

$$h_{m1} = \frac{(a_1 + a_2)m + 2(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)m - 4a_1}, \quad h_{m2} = -\frac{(a_1 + a_2)m - 2(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)m + 4a_1}.$$

Частные решения $u_{rm}^{(1)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)*}$, $u_{rm}^{(2)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)*}$ в формулах (15) зависят от вида коэффициентов разложения внешних и дополнительных нагрузок в ряды Фурье.

Деформирование пластины косинусоидальной нагрузкой

Исследуем неосесимметричное деформирование рассматриваемой трехслойной пластины, закрепленной по внешнему контуру, под действием неосесимметричной косинусоидальной радиальной нагрузки

$$p_r(x, \varphi) = p_{r1} \cos \varphi, \quad p_\varphi = 0 \quad (p_{r1} = \text{const}).$$
(16)

Коэффициенты разложения нагрузки (16) в ряд (12) с учетом свойств ортогональности применяемых систем тригонометрических функций будут иметь вид

$$p_{rm}^{(1)}(x) = \frac{p_{r1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq 1, \\ p_{r1}, & m = 1, \end{cases}$$

поэтому

$$p_{r1}^{(1)}(x) = p_{r1}, \quad p_{rm}^{(1)}(x) = 0 \quad \text{при } m > 1, \quad p_{rm}^{(2)}(x) = p_{\varphi m}^{(1)}(x) = p_{\varphi m}^{(2)}(x) = 0.$$
(17)

При $m = 1$ система уравнений (13) с учетом соотношений (17) сводится к виду

$$L_2 \left(u_{r1}^{(1,n)}(x) \right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(1,n)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi 1'x}^{(2,n)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi 1}^{(2,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_1} \left(-p_{r1} + p_{r\varphi 1}^{(1,n-1)}(x) \right),$$

$$L_2 \left(u_{\varphi 1}^{(2,n)}(x) \right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi 1}^{(2,n)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1'x}^{(1,n)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(1,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi \varphi 1}^{(2,n-1)}(x),$$

$$L_2 \left(u_{r1}^{(2,n)}(x) \right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(2,n)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi 1'x}^{(1,n)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_1} p_{r\varphi 1}^{(2,n-1)}(x),$$

$$L_2 \left(u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x) \right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi 1}^{(1,n)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1'x}^{(2,n)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(2,n)}(x) = \frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi \varphi 1}^{(1,n-1)}(x).$$
(18)

В методе упругих решений функции нелинейности $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ и, следовательно, дополнительные нагрузки на первом шаге итерации принимаются равными нулю, что сводит рассматриваемую задачу к задаче линейной упругости. При последующих итерациях функции нелинейности вычисляются по результатам предыдущих приближений.

На первом шаге итерации третье и четвертое уравнения в системе (18) образуют однородную систему, которая при нулевых граничных условиях дает тривиальное решение

$$u_{r_1}^{(2,1)} \equiv u_{\phi_1}^{(1,1)} \equiv 0. \quad (19)$$

Первое и второе уравнения в системе (18) образуют неоднородную систему, решение которой имеет вид

$$u_{r_1}^{(1,1)} = -C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \left(\frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) + C_{13}^{(1)} x^{-2} + C_{14}^{(1)} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2 -$$

$$- \left[51a_1^2 + 14a_1a_2 + 11a_2^2 + 4(a_1 - 3a_2)(5a_1 + a_2) \ln x \right] \frac{p_{r_1} r_0^2 x^2}{64a_1(a_1 - a_2)(5a_1 + a_2)}, \quad (20)$$

$$u_{\phi_1}^{(2,1)} = C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \ln x + C_{13}^{(1)} x^{-2} + C_{14}^{(1)} x^2 + \frac{5a_1 + a_2}{64a_1(a_1 - a_2)} (5 - 4 \ln x) p_{r_1} r_0^2 x^2,$$

где $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{13}^{(1)}$, $C_{14}^{(1)}$ – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Здесь и далее первый верхний индекс у составляющих перемещений и дополнительных нагрузок является номером функции в разложении (12), а второй верхний индекс соответствует номеру приближения.

Исходя из условия ограниченности перемещений в центре пластины, в решении (20) необходимо положить константы интегрирования $C_{12}^{(1)} = C_{13}^{(1)} = 0$. Систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования $C_{11}^{(1)}$ и $C_{14}^{(1)}$ получим, удовлетворяя условия равенства нулю перемещений на контуре, с помощью решения (20):

$$C_{11}^{(1)} = - \frac{19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2}{32a_1(a_1 - a_2)(3a_1 - a_2)} p_{r_1} r_0^2, \quad C_{14}^{(1)} = - \frac{37a_1^2 + 18a_1a_2 - 3a_2^2}{64a_1(a_1 - a_2)(3a_1 - a_2)} p_{r_1} r_0^2. \quad (21)$$

Искомые радиальное и тангенциальное перемещения при отсутствии осесимметричной составляющей в соответствии с формулами (12), (19)–(21) на первом шаге итерации имеют вид

$$u_r^{(1,1)}(x, \varphi) = \left[\frac{19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2}{2(3a_1 - a_2)} (1 - x^2) - (a_1 - 3a_2)x^2 \ln x \right] \frac{p_{r_1} r_0^2 \cos \varphi}{16a_1(a_1 - a_2)},$$

$$u_\varphi^{(1,1)}(x, \varphi) = - \left[\frac{19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2}{2(3a_1 - a_2)} (1 - x^2) + (5a_1 + a_2)x^2 \ln x \right] \frac{p_{r_1} r_0^2 \sin \varphi}{16a_1(a_1 - a_2)}. \quad (22)$$

Следует отметить, что решение (22) является решением задачи теории упругости и представляет самостоятельный интерес. На втором шаге итерации дополнительные нагрузки $p_{r_{\text{ом}}}^{(2,1)}(x)$, $p_{\phi_{\text{ом}}}^{(1,1)}(x)$ также будут нулевыми за счет равенства нулю соответствующих составляющих деформаций на первом шаге в системе (18). В результате получаем составляющие перемещений $u_{r_1}^{(2,2)}(x) \equiv 0$, $u_{\phi_1}^{(1,2)}(x) \equiv 0$.

В дальнейшем подобная картина наблюдается на каждом шаге итерации, поэтому имеем $u_{r_1}^{(2,n)}(x) \equiv 0$, $u_{\phi_1}^{(1,n)}(x) \equiv 0$. Остальные перемещения на n -м шаге приближения следуют из системы (18) в конечном виде:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(n)}(x, \varphi) = & \left[\frac{(19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2)(p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)}) - (13a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2)(-p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)})}{2(3a_1 - a_2)}(1 - x^2) - \right. \\
 & \left. - (a_1 - 3a_2)(p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)} - p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)})x^2 \ln x \right] \frac{r_0^2}{16a_1(a_1 - a_2)} \cos \varphi, \\
 u_\varphi^{(n)}(x, \varphi) = & \left[-\frac{(19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2)(p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)}) + (13a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2)p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)}}{2(3a_1 - a_2)} \times \right. \\
 & \left. \times (1 - x^2) - (5a_1 + a_2)(p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)} - p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)})x^2 \ln x \right] \frac{r_0^2}{16a_1(a_1 - a_2)} \sin \varphi.
 \end{aligned} \tag{23}$$

С помощью перемещений (23) и соотношений Коши получим деформации

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr}^{(n)} = & -\left[\frac{(11a_1 - a_2)(p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)}) + (5a_1 + a_2)p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)}}{3a_1 - a_2} + \right. \\
 & \left. + \frac{a_1 - 3a_2}{a_1 - a_2} (p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)} - p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)}) \ln x \right] \frac{xr_0}{8a_1} \cos \varphi, \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} = & -\frac{3a_1 - a_2}{8a_1(a_1 - a_2)} (p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)} - p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)}) r_0 x \ln x \cos \varphi, \\
 \varepsilon_{r\varphi}^{(n)} = & \left[\frac{(a_1 - 3a_2)(p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)}) + (7a_1 - 5a_2)p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)}}{3a_1 - a_2} - \right. \\
 & \left. - \frac{a_1 + a_2}{a_1} (p_{r1} - p_{r\omega 1}^{(1, n-1)} - p_{\varphi\omega 1}^{(2, n-1)}) \ln x \right] \frac{xr_0}{8(a_1 - a_2)} \sin \varphi.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Используя деформации (24) на n -м шаге приближения, определяем интенсивность деформаций $\varepsilon_u^{(n)}$ по формуле, приведенной в пояснении к соотношениям (1). Затем в слоях пластины вычисляем функции нелинейности [1]

$$\omega_k^{(n)} \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{(n)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}, \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}} \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}, \end{cases} \tag{25}$$

где A_k, α_k – константы материала, получаемые экспериментально.

После определения функций нелинейности (25) по формулам (11) вычисляются внутренние усилия и дополнительные фиктивные нагрузки для последующего шага.

Численные результаты

Численный анализ полученного решения (23) проведен для круговой трехслойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$ м) при неосесимметричном нагружении в срединной плоскости заполнителя распределенной нагрузкой с постоянной интенсивностью $p_{r1} = 300$ МПа, достаточной для проявления нелинейных свойств материалов слоев в полной мере. Внешние несущие слои выполнены из дюралюминия Д16Т, срединный слой есть фторопласт-4. Толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м. Упругие и физически нелинейные характеристики материалов заимствованы из работы [33].

На рис. 2 проиллюстрирована практическая сходимость итерационного метода при $\varphi = 0$, т. е. в направлении максимальной величины радиальных перемещений. Здесь номер кривой совпадает с номером приближения. За искомое решение принято шестое приближение, которое отличается от предыдущего на 0,9 %. За счет физически нелинейных свойств материалов слоев расчетное перемещение увеличивается на 29 % (см. рис. 2, кривая б) по сравнению с перемещениями упругой пластины (см. рис. 2, кривая л). Окружные перемещения в рассматриваемом направлении отсутствуют.

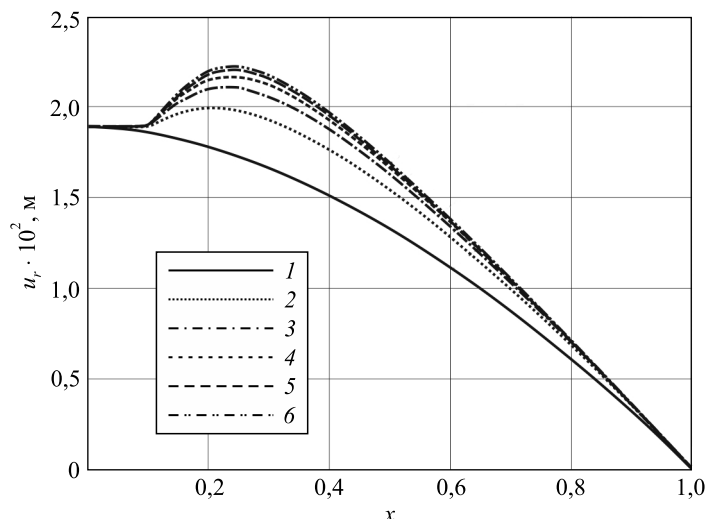


Рис. 2. Сходимость итерационного метода при $\varphi = 0$, $T = 293$ К:
 1, 2, 3, 4, 5, 6 – номер итерации

Fig. 2. Convergence of the iterative method at $\varphi = 0$, $T = 293$ K:
 1, 2, 3, 4, 5, 6 – iteration number

На рис. 3 изображены графики изменения интенсивности деформаций ϵ_u вдоль радиуса пластины при $\varphi = 0$. За счет физической нелинейности материалов пластины расчетная интенсивность деформаций увеличивается примерно на 18 %. Горизонтальная линия соответствует деформационному пределу упругости материала Д16Т ($\epsilon_y = 0,735$ %). Следовательно, в центре пластины до координаты $x = 0,08$ в несущих слоях остается зона упругих деформаций. Область $0,08 \leq x \leq 1$ деформируется пластически. Заполнитель в рассматриваемом случае остается упругим, так как предел физической нелинейности фторопласта-4 ($\epsilon_s = 3,3$ %) не достигается.

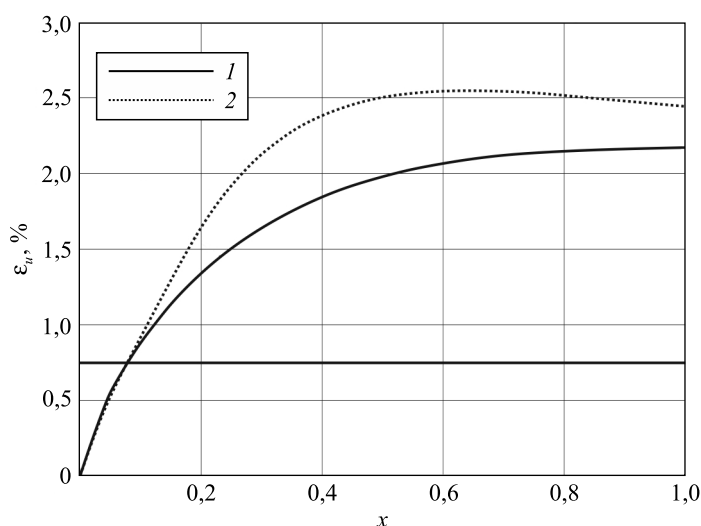


Рис. 3. Интенсивность деформаций ϵ_u при $\varphi = 0$:
 1 – упругая пластина; 2 – упругопластическая пластина

Fig. 3. Deformation intensity ϵ_u at $\varphi = 0$:
 1 – elastic plate; 2 – elastoplastic plate

На рис. 4 отображено распределение областей физической нелинейности в несущих слоях исследуемой пластины в зависимости от окружной координаты φ при $T = 293$ К. Область упругих деформаций в центре пластины близка к эллипсу с длинами полуосей 0,08 и 0,14. При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ материалы несущих слоев переходят в упругопластическое состояние после координаты $x = 0,1$.

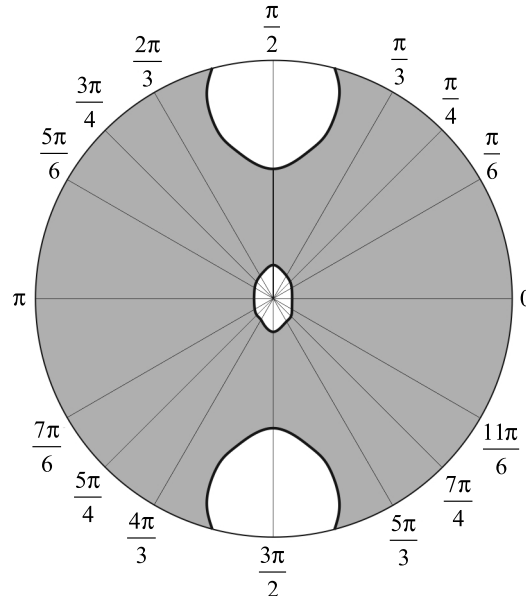


Рис. 4. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (серый цвет) в зависимости от окружной координаты
Fig. 4. Distribution of areas of plasticity and physical non-linearity (grey colour) depending on the circumferential coordinate

Заключение

Учет физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния круговой трехслойной пластины при неосесимметричном деформировании в своей плоскости. Приведенные решения могут быть использованы при расчетах строительных конструкций, деформируемых в своей плоскости.

Библиографические ссылки

1. Starovoitov EI, Nagiyev FB. *Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity*. Toronto: Apple Academic Press; 2012. XVII, 346 p.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazhnikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells. Computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads. *Strength of Materials*. 2003;35(4):346–352. DOI: 10.1023/A:1025834123302.
6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Circular sandwich plates under local impulsive loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(8):945–952. DOI: 10.1023/A:1027464715958.
7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.
8. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
9. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.

10. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 157–198 (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
11. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics*. 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.
12. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
13. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
14. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.
15. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
16. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
17. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
18. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017; 53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.
19. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.
20. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.
21. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.
22. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
23. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
24. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018; 54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
25. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015;3(8):1487–1493.
26. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014; 225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
27. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
28. Zhihua Wang, Guoxing Lu, Feng Zhu, Longmao Zhao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
29. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.
30. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
31. Нестерович АВ. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости. *Проблемы физики, математики и техники*. 2020;1:85–90.
32. Нестерович АВ. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости. *Проблемы физики, математики и техники*. 2021;3:24–29. DOI: 10.54341/20778708_2021_3_48_24.
33. Starovoitov EI. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*. 1988;20(4): 426–431. DOI: 10.1007/BF01530849.

References

1. Starovoitov EI, Nagiyev FB. *Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity*. Toronto: Apple Academic Press; 2012. XVII, 346 p.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells. Computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads. *Strength of Materials*. 2003;35(4):346–352. DOI: 10.1023/A:1025834123302.
6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Circular sandwich plates under local impulsive loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(8):945–952. DOI: 10.1023/A:1027464715958.
7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.
8. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.

9. Mikhasev GI, Ereneyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
10. Mikhasev GI, Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Cham: Springer; 2019. p. 157–198 (Advanced structured materials; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
11. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics*. 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.
12. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AYa. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
13. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
14. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.
15. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
16. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
17. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
18. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.
19. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.
20. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.
21. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.
22. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
23. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
24. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
25. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015;3(8):1487–1493.
26. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
27. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
28. Zhihua Wang, Guoxing Lu, Feng Zhu, Longmao Zhao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
29. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.
30. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
31. Nestsiarovich AV. Deformation of a three-layer circular plate under cosine loading in its plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2020;1:85–90. Russian.
32. Nestsiarovich AV. Axisymmetric loading of a circular physically nonlinear three-layer plate in its plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2021;3:24–29. Russian. DOI: 10.54341/20778708_2021_3_48_24.
33. Starovoitov EI. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*. 1988;20(4):426–431. DOI: 10.1007/BF01530849.