УДК 519.218.64+519.112.6

ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРКОЛЯЦИЙ НА КОНЕЧНЫХ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТКАХ

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ[1]***, А. О. ЗАДОРОЖНЮК***[1]***, А. Д. ДОСОВА***[2]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*ЭПАМ Системз, ул. Академика Купревича, 1, корп. 1, 220141, г. Минск, Беларусь*

Исследуется задача о нахождении критических вероятностей перколяций на графах конечных квадратных решеток. На основе теоремы Харриса – Кестена о критической вероятности $p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$ в бесконечной квадратной решетке доказывается, что точная граница вероятности $p_g\left(\mathbb{Z}^2\right)$, при которой имеет место экспоненциальное угасание на бесконечной квадратной решетке, равняется $\frac{1}{2}$. С помощью найденного точного значения величины $p_g\left(\mathbb{Z}^2\right)$ устанавливается, что критические вероятности перколяций на конечных квадратных решетках сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$ для достаточно больших размеров решетки.

Ключевые слова: перколяция; критическая вероятность; решетка.

Образец цитирования:
Васьковский ММ, Задорожнюк АО, Досова АД. Оценки критических вероятностей перколяций на конечных квадратных решетках. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:92–97.
EDN: UYFTTX

For citation:
Vaskouski MM, Zadorozhnyuk AO, Dosova AD. Estimates of critical probabilities of percolation on finite square grids. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;3:92–97. Russian.
EDN: UYFTTX

Авторы:
Максим Михайлович Васьковский – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики факультета прикладной математики и информатики.
Анна Олеговна Задорожнюк – ассистент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.
Анна Дмитриевна Досова – системный аналитик.

Authors:
Maksim M. Vaskouski, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
vaskovskii@bsu.by
https://orcid.org/0000-0001-5769-3678
Anna O. Zadorozhnyuk, assistant at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
a_zadorozhnyuk@mail.ru
Anna D. Dosova, system analyst.
anndosova@gmail.com

ESTIMATES OF CRITICAL PROBABILITIES OF PERCOLATION ON FINITE SQUARE GRIDS

M. M. VASKOUSKI[a]***, A. O. ZADOROZHNYUK***[a]***, A. D. DOSOVA***[b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*EPAM Systems, 1 Akademika Kuprevicha Street, 1 building, Minsk 220141, Belarus*
Corresponding author: M. M. Vaskouski (vaskovskii@bsu.by)

In this paper, we investigate the problem of determining the critical probabilities of percolation for finite square grids. Basing on the Harris – Kesten theorem on critical probability $p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$ in the infinite square grid, we prove that the exact threshold of exponential decay in the infinite square grid is equal to $\frac{1}{2}$. With the help of the evaluated value of $p_g\left(\mathbb{Z}^2\right)$ we show that the critical probabilities of percolation on finite square grids are arbitrarily close to $\frac{1}{2}$ when the size of a grid is large enough.

Keywords: percolation; critical probability; grid.

Введение

Математическая теория перколяций представляет собой мощный и эффективный инструмент для решения задач, связанных с протеканием жидкостей в сложных стохастических системах, распространением эпидемий, передачей информации и пр. В последние десятилетия были получены выдающиеся результаты в теории перколяций на решетках, отмеченные медалью Филдса (С. К. Смирнов (2010)).

Задача о перколяции для бесконечных решеток, где каждое ребро (или каждая вершина) считается независимым, впервые была поставлена С. Р. Бродбентом и Дж. М. Хаммерсли в 1957 г. [1]. Тогда же введено понятие порога перколяции (критической вероятности), при превышении которого в системе будет существовать бесконечный перколяционный кластер. С математической точки зрения перколяционный кластер (связный случайный граф) можно интерпретировать как связное подмножество всех проводящих ребер (или вершин) решетки. Нахождение точного значения критической вероятности перколяции представляет собой очень сложную задачу. М. Ф. Сайкс и Дж. У. Эссам в 1964 г. нашли пороги перколяции для некоторых плоских решеток [2]. Для бесконечных квадратных решеток на плоскости Т. Э. Харрисом и Х. Кестеном было доказано, что критическая вероятность равна $\frac{1}{2}$ [3; 4]. Для конечных графов наличие бесконечной связной компоненты в постановке задачи меняется на наличие связной компоненты, мощность которой пропорциональна мощности самого графа с некоторым коэффициентом γ [5]. В статье [5] эта задача исследуется в том числе и для конечных прямоугольных решеток размера $m \times n$. Авторы работы [5] доказывают, что при определенных соотношениях между размерами решетки (в частности, при $m = n$) критические вероятности перколяции отделены сверху от единицы. В настоящей статье для конечных квадратных решеток усиливаются результаты работы [5]: доказывается, что критические вероятности сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$ для достаточно больших размеров решетки.

Предварительные сведения

Рассмотрим связный неориентированный граф $G = (V, E)$, $|E| \neq 0$. Для произвольного $p \in [0, 1]$ p-перколяцией будем называть процедуру, при которой каждое из ребер $e \in E$ удаляется с вероятностью $1 - p$ независимо от других ребер. Результатом p-перколяции является случайный граф $G' = (V, E')$, где $E' \subseteq E$.

Определим модели p-перколяции для конечных и бесконечных графов.

Модель p-перколяции для конечных графов. Зададим вероятностное пространство $\left(\Omega_G, F_G, P_{G,\,p}\right)$, соответствующее p-перколяции [6]: $\Omega_G = \prod\limits_{e \in E} \{0, 1\}$, $F_G = 2^{\Omega_G}$, $P_{G,\,p}(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p^{|E'(\omega)|}(1-p)^{|E| - |E'(\omega)|}$ $\forall A \in F_G$. Пусть $W^{(1)}_{G,\,p}$ – число вершин наибольшей (по числу вершин) компоненты связности в случайном графе G', полученном в результате p-перколяции. Для постоянных p, α, $\gamma \in [0, 1]$ обозначим через $\Gamma(p, \alpha, \gamma)$ множество всех связных неориентированных графов G таких, что $P_{G,\,p}\left(\gamma |G| \leq W^{(1)}_{G,\,p}\right) \geq \alpha$. Заметим, что связная компонента требуемой мощности для $\gamma = 0$ существует всегда независимо от остальных параметров. Этот случай не представляет интереса, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\gamma > 0$. Критической вероятностью $p_c(G, \alpha, \gamma)$ будем называть величину

$$p_c(G, \alpha, \gamma) = \inf\{p \in [0, 1] : G \in \Gamma(p, \alpha, \gamma)\}.$$

Модель p-перколяции для бесконечных графов. Зададим вероятностное пространство $(\Omega_G, F_G, P_{G,p})$, соответствующее p-перколяции: $\Omega_G = \prod_{e \in E}\{0, 1\}$, F_G – σ-алгебра подмножеств Ω_G, порожденная конечномерными цилиндрами $\{(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \Omega_G \,|\, x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, k}, k \in \mathbb{N}\}$. На цилиндрических множествах из F_G мера $P_{G,p}$ определяется так же, как в модели p-перколяции для конечных графов. Согласно теореме Каратеодори, задав такую меру на цилиндрических множествах, можно единственным образом продолжить ее на всю σ-алгебру F_G.

Рассмотрим множество графов $\Gamma(p)$, для которых после p-перколяции существует бесконечная связная компонента с положительной вероятностью [3; 4]. Соответственно, критическая вероятность становится функцией лишь от G:

$$p_c(G) = \inf\{p \in [0, 1] : G \in \Gamma(p)\}.$$

Известно, что для графа бесконечной квадратной решетки $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$ [3; 4].

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Определим множество $B(x, n)$ следующим образом:

$$B(x, n) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2 : |y_1 - x_1| \le n, |y_2 - x_2| \le n\}.$$

Через $\partial B(x, n)$ будем обозначать множество граничных вершин решетки $B(x, n)$. Далее вместо $B(0, n)$ будем писать $B(n)$.

Определим величину

$$p_g = \sup\left\{p : \exists c_p \ge 0 \,\middle|\, \forall n \ge 1 : P_{\mathbb{Z}^2, p}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \le e^{-c_p n}\right\},$$

где $\partial B(n)$ обозначает граничные вершины решетки $B(n)$, а $0 \leftrightarrow \partial B(n)$ – существование пути между $\partial B(n)$ и началом координат после p-перколяции.

Приведем несколько утверждений, необходимых для доказательства основного результата.

Утверждение 1 [7]. Для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ существует такое $\gamma_0(\varepsilon)$, что $\dfrac{W^{(1)}_{B(n), \frac{1}{2}+\varepsilon}}{|B(n)|\gamma_0(\varepsilon)} \to 1$ по вероятности при $n \to \infty$.

Утверждение 2 [6, p. 132]. Пусть $0 < p < \frac{1}{2}$. Тогда существует такое $\lambda(p) > 0$, что $P_{\mathbb{Z}^2, p}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \le$ $\le e^{-n\lambda(p)}$ для любого $n \ge 1$.

Пусть A – произвольное непустое подмножество решетки $\mathbb{Z}^2$. Определим диаметр подмножества A следующим образом:

$$\operatorname{diam}(A) = \max\left\{\sup_{(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A} |x_1 - y_1|, \sup_{(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A} |x_2 - y_2|\right\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $0 < p < p_g$. *Тогда найдется такое* $c > 0$, *что для любых натуральных n и l вероятность существования в* $B(n)$ *после p-перколяции пути диаметром не менее l не превосходит величины* $(2n + 1)^2 e^{-cl}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные n и l. Для каждой вершины $x \in B(n)$ рассмотрим пути, соединяющие эту вершину с $\partial B(x, l)$ после p-перколяции. Суммарная вероятность существования таких путей по всем $x \in B(n)$ не превосходит величины $|B(n)| \sup_{x \in B(n)} P_{B(n), p}(x \leftrightarrow \partial B(x, l) \cap B(n))$. Предположим, что произошло событие «существует путь диаметром не менее l в $B(n)$ после p-перколяции».

То есть в данном пути найдутся две вершины, чьи координаты в одном из измерений отличаются хотя бы на l. Одну из этих вершин обозначим через x и определим вершину $y \in \partial B(x, l)$ таким образом, что путь $x \leftrightarrow y$ впервые пересекает границу решетки $B(x, l)$ в точке y. Следовательно,

$$P_{B(n),\, p}\left(\exists \text{ путь диаметром } \geq l \text{ в } B(n)\right) \leq \left|B(n)\right| \sup_{x \in B(n)} P_{B(n),\, p}\left(x \leftrightarrow \partial B(x, l) \cap B(n)\right).$$

Поскольку $p < p_g$, то по определению p_g верно неравенство $P_{B(n),\, p}\left(x \leftrightarrow \partial B(x, l) \cap B(n)\right) \leq e^{-c_p l}$. Таким образом, $P_{B(n),\, p}\left(\exists \text{ путь диаметром } \geq l \text{ в } B(n)\right) \leq (2n+1)^2 e^{-cl}$ для некоторого $c > 0$, не зависящего от n и l. Лемма 1 доказана.

Основные результаты

Теорема 1. *Для любых* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha \in (0, 1)$ *существуют такие* $\gamma_0(\varepsilon) > 0$, $n_0(\alpha, \varepsilon)$, *что* $p_c\left(B(n), \alpha, \gamma\right) \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$ *для любых* $\gamma \in (0, \gamma_0)$, $n \geq n_0$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 1. *Для любых* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha \in (0, 1)$ *найдутся такие* $\gamma_0(\varepsilon) > 0$, $n_0(\alpha, \varepsilon)$, *что для любых* $\gamma \in (0, \gamma_0)$, $n \geq n_0(\alpha, \varepsilon)$ *выполняется неравенство* $p_c\left(B(n), \alpha, \gamma\right) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Доказательство. Положим, что $p = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Воспользуемся утверждением 1. Для любых ε_0, $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое n_0, что $\forall n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$P_{B(n),\, p}\left(\left|\frac{W^{(1)}_{B(n),\, p}}{\left|B(n)\right|\gamma_0(\varepsilon)} - 1\right| > \varepsilon_0\right) < \varepsilon_1.$$

Отсюда получаем

$$P_{B(n),\, p}\left(-\varepsilon_0 \leq \frac{W^{(1)}_{B(n),\, p}}{\left|B(n)\right|\gamma_0(\varepsilon)} - 1 \leq \varepsilon_0\right) \geq 1 - \varepsilon_1.$$

Возьмем $\varepsilon_1 = 1 - \alpha$, $\varepsilon_0 = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_0(\varepsilon)}$. Тогда имеем

$$\alpha \leq P_{B(n),\, p}\left(\left|B(n)\right|(1 - \varepsilon_0)\gamma_0(\varepsilon) \leq W^{(1)}_{B(n),\, p} \leq \left|B(n)\right|(1 + \varepsilon_0)\gamma_0(\varepsilon)\right) \leq P_{B(n),\, p}\left(\left|B(n)\right|\gamma \leq W^{(1)}_{B(n),\, p}\right).$$

Последнее неравенство показывает, что для любых $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ существуют такие $\gamma_0(\varepsilon)$, $n_0(\alpha, \varepsilon)$, что неравенство $p_c\left(B(n), \alpha, \gamma\right) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ выполняется для любых $\gamma \leq \gamma_0(\varepsilon)$, $n \geq n_0(\alpha, \varepsilon)$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Для любых* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 1]$ *найдется такое* $n_0(\alpha, \varepsilon, \gamma)$, *что для любых* $n \geq n_0(\alpha, \varepsilon, \gamma)$ *выполняется неравенство* $p_c\left(B(n), \alpha, \gamma\right) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Доказательство. Сначала докажем, что $p_g \leq p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$. Допустим обратное: пусть $p_g > p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$. Возьмем p' такое, что $p_c\left(\mathbb{Z}^2\right) < p' < p_g$. Поскольку $p' > p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$, то при p'-перколяции решетки $\mathbb{Z}^2$ существует бесконечная связная компонента с вероятностью $\alpha > 0$. Существование бесконечной связной компоненты равносильно существованию пути между началом координат и граничными вершинами решетки $\partial B(n)$ для любого n. Произведение вероятностей существования путей $\prod_n P_{\mathbb{Z}^2,\, p'}\left(0 \leftrightarrow \partial B(n)\right)$ должно быть больше α. Это означает, что $P_{\mathbb{Z}^2,\, p'}\left(0 \leftrightarrow \partial B(n)\right) > \alpha$ при каждом n. С другой стороны, так как $p' < p_g$, имеем $P_{\mathbb{Z}^2,\, p'}\left(0 \leftrightarrow \partial B(n)\right) \leq e^{-c_{p'} n}$ по определению p_g. Также $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon_1, p')$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon_1, p')$

выполняется неравенство $\left|e^{-c_{p'}n}\right| \leq \varepsilon_1$. Таким образом, выбирая $\varepsilon_1 < \alpha$, получаем противоречие: $P_{\mathbb{Z}^2,\, p'}\left(0 \leftrightarrow \partial B(n)\right) \leq \varepsilon_1 < \alpha$. Следовательно, $p_g \leq p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$.

Теперь докажем, что $p_g \geq p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$. Используя утверждение 2, получаем, что для любых $p < p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$, $n \geq 1$ существует такое $c_p > 0$, что $P_{\mathbb{Z}^2,\, p}\left(0 \leftrightarrow \partial B(n)\right) \leq e^{-c_p n}$. Из определения p_g следует, что $p_g \geq p_c\left(\mathbb{Z}^2\right)$.

Таким образом, доказано, что величина p_g равна критической вероятности $p_c\left(\mathbb{Z}^2\right) = \frac{1}{2}$.

Возьмем $p = \frac{1}{2} - \varepsilon$. Используем лемму 1 для дальнейшего доказательства предложения 2. Число вершин подграфа решетки $B(n)$, в котором не существует пути диаметром не менее l, не превосходит l^2. Тогда вероятность отсутствия в $B(n)$ после p-перколяции пути диаметром не менее l будет не меньше, чем вероятность отсутствия в $B(n)$ компоненты связности размера не более l^2. Возьмем $l = \sqrt{\gamma}\,(2n+1)$. Получаем соотношения

$$P_{B(n),\, p}\left(W^{(1)}_{B(n),\, p} \geq \gamma\left|B(n)\right|\right) = 1 - P_{B(n),\, p}\left(W^{(1)}_{B(n),\, p} < \gamma\left|B(n)\right|\right) \leq$$

$$\leq 1 - P_{B(n),\, p}\left(\text{не } \exists \text{ путь диаметром} \geq \sqrt{\gamma}\,(2n+1)\right) = P_{B(n),\, p}\left(\exists \text{ путь диаметром} \geq \sqrt{\gamma}\,(2n+1)\right).$$

Величина $P_{B(n),\, p}\left(\exists \text{ путь диаметром} \geq \sqrt{\gamma}\,(2n+1)\right)$ не превосходит $(2n+1)^2 e^{-c_p\left(\sqrt{\gamma}(2n+1)\right)}$. Так как $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists\, n_0(\varepsilon_1,\, p,\, \gamma)$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon_1,\, p,\, \gamma)$ выполняется неравенство $\left|(2n+1)^2 e^{-c_p\left(\sqrt{\gamma}(2n+1)\right)}\right| \leq \varepsilon_1$, то для любого $n \geq n_0\left(\frac{\alpha}{2},\, p,\, \gamma\right)$ справедливо неравенство $P_{B(n),\, p}\left(W^{(1)}_{B(n),\, p} \geq \gamma\left|B(n)\right|\right) \leq \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $p_c\left(B(n),\, \alpha,\, \gamma\right) \geq$ $\geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ для любого $n \geq n_0\left(\frac{\alpha}{2},\, p,\, \gamma\right)$. Следовательно, предложение 2, а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

Замечание 1. Графы, полученные из исходного графа в результате применения процедуры p-перколяции, можно рассматривать как случайные графы. В частности, такие графы широко используются для моделирования информационных сетей и анализа их производительности [8].

Замечание 2. Модель p-перколяции можно рассматривать как вероятностный аналог модели электрической цепи, в которой каждое ребро соответствует резистору с вероятностью p (при сопротивлении 1 Ом) и $1 - p$ (при бесконечно большом сопротивлении). Свойства резистивных расстояний для электрических цепей на решетках исследовались в работе [9].

Библиографические ссылки

1. Broadbent SR, Hammersley JM. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1957;53(3):629–641. DOI: 10.1017/S0305004100032680.

2. Sykes MF, Essam JW. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics.* 1964;5(8):1117–1127. DOI: 10.1063/1.1704215.

3. Harris TE. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1960;56(1):13–20. DOI: 10.1017/S0305004100034241.

4. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2. *Communications in Mathematical Physics.* 1980;74(1):41–59. DOI: 10.1007/BF01197577.

5. Malon C, Pak I. Percolation on finite Cayley graphs. *Combinatorics, Probability and Computing.* 2006;15(4):571–588. DOI: 10.1017/S0963548305007406.

6. Grimmet G. *Percolation.* 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 1999. XIII, 447 p. (Chern SS, Eckmann B, de la Harpe P, Hironaka H, Hirzebruch F, Hitchin N, et al., editors. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 321). DOI: 10.1007/978-3-662-03981-6.

7. Borgs C, Chayes JT, Kesten H, Spencer J. The birth of the infinite cluster: finite-size scaling in percolation. *Communications in Mathematical Physics.* 2001;224(1):153–204. DOI: 10.1007/s002200100521.

8. Русилко ТВ. G-сеть как стохастическая модель сети передачи данных. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:45–54 (на англ.).

9. Задорожнюк АО. Монотонность вероятностей состояний случайного блуждания на конечных решетках. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:38–45. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

References

1. Broadbent SR, Hammersley JM. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1957;53(3):629–641. DOI: 10.1017/S0305004100032680.

2. Sykes MF, Essam JW. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics.* 1964;5(8):1117–1127. DOI: 10.1063/1.1704215.

3. Harris TE. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1960;56(1):13–20. DOI: 10.1017/S0305004100034241.

4. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2. *Communications in Mathematical Physics.* 1980;74(1):41–59. DOI: 10.1007/BF01197577.

5. Malon C, Pak I. Percolation on finite Cayley graphs. *Combinatorics, Probability and Computing.* 2006;15(4):571–588. DOI: 10.1017/S0963548305007406.

6. Grimmet G. *Percolation.* 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 1999. XIII, 447 p. (Chern SS, Eckmann B, de la Harpe P, Hironaka H, Hirzebruch F, Hitchin N, et al., editors. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; volume 321). DOI: 10.1007/978-3-662-03981-6.

7. Borgs C, Chayes JT, Kesten H, Spencer J. The birth of the infinite cluster: finite-size scaling in percolation. *Communications in Mathematical Physics.* 2001;224(1):153–204. DOI: 10.1007/s002200100521.

8. Rusilko TV. The G-network as a stochastic data network model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:45–54.

9. Zadorozhnyuk AO. Monotonicity of random walks' states on finite grids. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:38–45. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-38-45.

Получена 09.05.2022 / исправлена 12.10.2023 / принята 13.10.2023.
Received 09.05.2022 / revised 12.10.2023 / accepted 13.10.2023.