
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3

ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ¹⁾, М. А. ЖУРАВКОВ²⁾, А. В. НЕСТЕРОВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта, ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Приведена постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием осесимметричной нагрузки и теплового потока. Деформирование материалов тонких несущих слоев подчиняется гипотезам теории малых упругопластических деформаций. Относительно толстый заполнитель принят нелинейно-упругим. При выводе системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия использован вариационный принцип Лагранжа. Соответствующее итерационное решение получено методом прямого интегрирования. Проведена численная апробация аналитического решения.

Ключевые слова: круговая трехслойная пластина; неосесимметричная нагрузка; перемещения; пластичность.

Благодарность. Работа выполнена в рамках задания государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

Образец цитирования:

Старовойтов ЭИ, Журавков МА, Нестерович АВ. Термосиловое нагружение упругопластической трехслойной пластины. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:42–52.
EDN: EJWCME

For citation:

Starovoitov EI, Zhuravkov MA, Nesterovich AV. Thermo force loading of an elastic-plastic a three-layer plate. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023; 3:42–52. Russian.
EDN: EJWCME

Авторы:

Эдуард Иванович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.

Алина Викторовна Нестерович – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций факультета промышленного и гражданского строительства.

Authors:

Eduard I. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of structural mechanics, geotechnics and building structures, faculty of industrial and civil engineering.
edstar0@yandex.by

Mikhail A. Zhuravkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
zhuravkov@bsu.by

Alina V. Nesterovich, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of structural mechanics, geotechnics and building structures, faculty of industrial and civil engineering.
alina_nest92@bk.ru

THERMO FORCE LOADING OF AN ELASTIC-PLASTIC A THREE-LAYER PLATE

E. I. STAROVOITOV^a, M. A. ZHURAVKOV^b, A. V. NESTEROVICH^a

^a*Belarusian State University of Transport, 34 Kirava Street, Gomel 246653, Belarus*

^b*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: E. I. Starovaitov (edstar0@yandex.by)

The formulation of the boundary value problem of deformation of a circular three-layer plate in its plane under the action of an axisymmetric load and heat flow is herein given. The deformation of materials of thin bearing layers obeys the hypotheses of the theory of small elastic-plastic deformations. The relatively thick filler is assumed to be non-linearly elastic. A system of non-linear differential equilibrium equations is obtained. To derive it, the Lagrange's variational principle was used. The corresponding iterative solution is obtained by direct integration. Numerical approbation of the analytical solution is carried out.

Keywords: circular three-layer plate; non-axisymmetric load; movement; plasticity.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the assignment of the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

В настоящее время композиты широко используются в технике и строительстве. Это обусловило спрос на расчетные модели слоистых, в частности трехслойных, элементов конструкций. Разработка общей теории деформирования трехслойных элементов конструкций, в том числе пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Данной теме посвящен ряд работ, включая монографии [1–3], в которых приведены подходы к разработке линейных и нелинейных математических моделей неоднородных стержней, пластин и цилиндрических оболочек при квазистатических и динамических нагрузках.

Деформирование трехслойных пластин и оболочек под действием динамических нагрузок исследовано в статьях [4–7]. Материалы вязкоупругопластических цилиндрических оболочек подчиняются наследственным соотношениям деформационной теории пластичности. Решения выписаны с помощью разложения в ряд по собственным функциям. Резонансные колебания рассмотрены у круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием [7]. Оценка динамических характеристик тонких цилиндрических сэндвич-панелей с магнитореологическим наполнителем проведена в статье [8]. Свободные и резонансные колебания упругих слоистых балок, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [9–11]. Распространение упругих волн в трехслойной пластине с высококонтрастными механическими и геометрическими свойствами слоев проанализировано в публикациях [12; 13].

Статьи [14; 15] посвящены математическому моделированию гидроупругих колебаний круглой пластины, опирающейся на основания Винклера и Пастернака. Нестационарный контакт сферических и цилиндрических оболочек исследован в публикациях [16–18]. В работах [19–21] рассмотрено статическое и моногармоническое акустическое воздействие на многослойную пластину, исследован динамический резонансный отклик пластины, армированной углеродным волокном, при резонансных колебаниях с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования. Отклик многослойных композитных плит на косой удар описан в публикации [22]. Статья [23] посвящена сверхзвуковому флаттеру многослойных композитных пластин.

Деформирование упругопластических трехслойных стержней и пластин с нелинейно-упругим наполнителем рассмотрено в работах [24–26]. Анализ деформирования и устойчивости многослойных балок проведен в статьях [27–29]. Несущая способность круглых многослойных плит при большом прогибе исследована в публикации [30]. Анализ изгиба круглой многослойной пластины и сравнение изгибных свойств сэндвич-панелей с ячеистым наполнителем выполнены в работах [31–33].

Деформирование упругой круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием косинусоидальной нагрузки исследовано в статье [34]. Изотермическое деформирование круглой физически нелинейной трехслойной пластины при неосесимметричной нагрузке рассмотрено в работе [35]. Здесь деформирование упругопластической трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости рассмотрено с учетом воздействия температурного поля.

Постановка краевой задачи

Пусть несимметричная по толщине круговая трехслойная пластина радиусом r_0 состоит из двух тонких прочных несущих слоев ($h_1 \neq h_2$) и жесткого несжимаемого по толщине заполнителя ($h_3 = 2c$). Для постановки задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). Результирующая внешняя распределенная нагрузка приложена в срединной плоскости заполнителя. Ее проекции на оси координат – $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$.

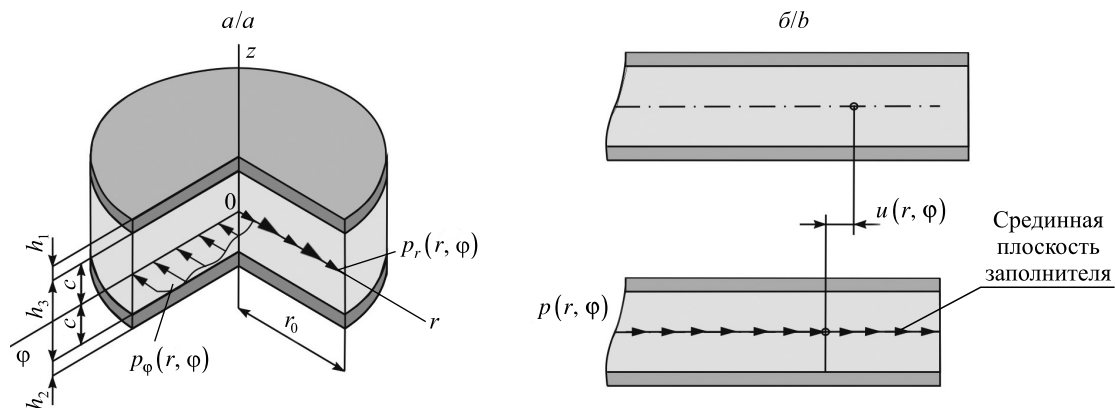


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины при нагружении в своей плоскости

Fig. 1. Calculation scheme of a three-layer plate when loaded in its plane

Нижняя поверхность $z = -c - h_2$ и контур пластины теплоизолированы. В этом случае неоднородное температурное поле $\theta(z, t)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , можно вычислять с достаточной точностью по формуле [1]

$$\theta = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\},$$

где $\tau = \frac{at}{H^2}$; $s = \frac{z}{H}$; $a = \frac{\lambda}{C}$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k h_k}{H}$; $C = \sum_{k=1}^3 \frac{C_k h_k \rho_k}{H}$; H – суммарная толщина пластины; λ_k , C_k и ρ_k – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$); t – время.

Возникающим в несимметричной по толщине трехслойной пластине изгибным деформированием пренебрегаем в силу его малости при отсутствии поперечной нагрузки. Рассматриваем только плоскую часть задачи. Искомые радиальные и тангенциальные перемещения обозначим через $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$. На границах слоев склейки перемещения непрерывны. Для предотвращения относительного сдвига слоев на торце пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы. Деформации малы.

Материалы несущих слоев упругопластические, заполнитель нелинейно-упругий. Для описания связи напряжений и деформаций применяются соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [36]

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \left(1 - \omega_k(\epsilon_u^{(k)}, T_k) \right) \epsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) \left(\epsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} \theta \right) \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее $k = 1, 2, 3$ – номер слоя; $s_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – шаровые части этих тензоров; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – термозависимые модули сдвига и объемной деформации; $\epsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; $\alpha_0^{(k)}$ – коэффициент линейного температурного расширения; $\omega_k(\epsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности материалов несущих слоев, причем $\omega_k(\epsilon_u^{(k)}, T_k) = 0$, если $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_y^{(k)}(T_k)$; $\omega_3(\epsilon_u^{(3)}, T_k)$ – универсальная функция физической нелинейности материала заполнителя, причем $\omega_3(\epsilon_u^{(3)}, T_k) = 0$, если $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_s^{(k)}(T_k)$; $\epsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $\epsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя.

С помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ вводятся обобщенные внутренние силы в пластине

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} h_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \quad (2)$$

Из вариационного принципа Лагранжа следует система дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных усилиях [34]

$$\begin{aligned} T_{rr'r} + \frac{1}{r} (T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) &= -p_r, \\ T_{r\varphi'r} + \frac{1}{r} (T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) &= -p_\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где штрих в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ним координате.

Компоненты напряжений представим в виде линейной (индекс e), нелинейной (индекс ω) и температурной (индекс t) составляющих:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} - \sigma_t^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi). \quad (4)$$

Здесь слагаемые напряжений выражаются через деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} &= s_{\alpha\alpha}^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k(T_k) (\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}) + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + K_k^-(T_k) \varepsilon_{\beta\beta}^{(k)}, \\ \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \omega_k (\varepsilon_u^{(k)}, T_k) (\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}), \\ \sigma_{r\varphi e}^{(k)} &= s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k) \omega_k (\varepsilon_u^{(k)}, T_k) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_t^{(k)} &= 3K_k(T_k) \alpha_0^{(k)} T_k \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; \alpha \neq \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

где $K_k^+(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)$, $K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k)$.

Внутренние усилия (2) с помощью напряжений (4) и (5) также представим в виде трех составляющих:

$$T_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - \delta_{\alpha\beta} \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} dz = T_{\alpha\beta e}^{(k)} - T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - T_t^{(k)} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \quad (6)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера.

Обобщенные усилия получим, просуммировав внутренние усилия (6) по слоям:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} - \delta_{\alpha\beta} T_t = \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - 3\delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T_k) \Delta T_k dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив усилия (7) в уравнения (3) и перейдя к безразмерной радиальной координате $x = \frac{r}{r_0}$, получим следующую систему дифференциальных уравнений для рассматриваемой пластины, осесимметрично деформируемой в своей плоскости:

$$\begin{cases} T_{rr'x} + \frac{1}{x} (T_{r\varphi'\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = (-p_r + p_{r\omega}) r_0, \\ T_{r\varphi'x} + \frac{1}{x} (T_{\varphi\varphi'\varphi} + 2T_{r\varphi}) = (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}) r_0, \end{cases} \quad (8)$$

где нижний индекс e в дальнейшем опущен для удобства; нелинейные добавки (индекс ω), вынесенные вправо, определяются формулами

$$p_{r\omega} = \frac{1}{r_0} \left(T_{rr\omega'x} + \frac{1}{x} (T_{r\varphi\omega'\varphi} + T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}) \right), \quad p_{\varphi\omega} = \frac{1}{r_0} \left(T_{r\varphi\omega'x} + \frac{1}{x} (T_{\varphi\varphi\omega'\varphi} + 2T_{r\varphi\omega}) \right).$$

В фиксированный момент времени t линейные составляющие внутренних обобщенных усилий выражаются через перемещения $u_r(r)$, $u_\varphi(r)$ после подстановки в усилия (7) напряжений (5):

$$T_{rr} = a_1 u_{r'r} + \frac{a_2}{r} u_r - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k \Delta T_k dz, \quad T_{r\varphi} = \frac{a_3}{r} (r u_{\varphi'r} - u_\varphi),$$

$$T_{\varphi\varphi} = a_2 u_{r'r} + \frac{a_1}{r} u_r - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k \Delta T_k dz.$$
(9)

Здесь

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T) + \frac{4}{3} G_k(T) \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T) - \frac{2}{3} G_k(T) \right) dz,$$

$$a_3 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T) dz, \quad a_2 = a_1 - 2a_3,$$

где T – температура, осредненная по толщине пластины.

После подстановки выражений (9) в систему (8) получим нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, служащие для определения перемещений при осесимметричном термомеханическом нагружении упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости:

$$u_{r'xx} + \frac{u_{r'x}}{x} - \frac{u_r}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}),$$

$$u_{\varphi'xx} + \frac{u_{\varphi'x}}{x} - \frac{u_\varphi}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}).$$
(10)

Заметим, что уравнения (10) не содержат температуру в явном виде, учитывается лишь ее влияние на величину модулей упругости материалов слоев, для описания которого применяется линейная формула Белла [1].

Краевая задача о деформировании круговой трехслойной пластины с физически нелинейными слоями неосесимметричной нагрузкой замыкается добавлением к уравнениям равновесия (10) граничных условий на контуре ($x = 1$) и ограничений на величину перемещений в центре пластины ($x = 0$).

Аналитическое решение краевой задачи

Система дифференциальных уравнений (10) существенно нелинейная, поэтому для ее решения необходимо применять приближенные или численные методы. В рассматриваемом случае используем модификацию метода упругих решений Ильюшина [36], сходимость которого доказана в широких пределах. Уравнения (10) переписываем в итерационном виде:

$$u_{r'xx}^{(n)} + \frac{u_{r'x}^{(n)}}{x} - \frac{u_r^{(n)}}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}),$$

$$u_{\varphi'xx}^{(n)} + \frac{u_{\varphi'x}^{(n)}}{x} - \frac{u_\varphi^{(n)}}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}),$$
(11)

где n – номер приближения.

Дополнительные «внешние» нагрузки $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ на первом шаге итерации принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам, введенным в системе (8):

$$p_{r\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0} \left(T_{rr\omega'x}^{(n-1)} + \frac{1}{x} (T_{rr\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)}) \right), \quad p_{\varphi\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0} \left(T_{r\varphi\omega'x}^{(n-1)} + \frac{2}{x} T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \right),$$
(12)

где

$$T_{\alpha\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} - \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T) \Delta T dz =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^3 \int G_k(T) \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T \right) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)(n-1)} dz - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T) \Delta T dz \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} dz = 2 \sum_{k=1}^3 \int G_k(T) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)(n-1)} dz.$$

В результате на каждом шаге итерации нелинейная задача сводится к линейной задаче с дополнительными «внешними» нагрузками (12).

Решение системы (11) получено методом прямого интегрирования:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= C_1^{(n)} x + \frac{C_2^{(n)}}{r} - \frac{r_0^2}{a_1 x} \int_0^x \int_0^x (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) dx dx, \\ u_\varphi^{(n)} &= C_3^{(n)} x + \frac{C_4^{(n)}}{r} - \frac{r_0^2}{a_3 x} \int_0^x \int_0^x (p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}) dx dx, \end{aligned} \quad (13)$$

где C_1, \dots, C_4 – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Величина перемещений в центре пластины должна быть конечной, поэтому необходимо положить, что $C_2 = C_4 = 0$. На закрепленном контуре пластины ($x = 1$) перемещения будут равны нулю, отсюда получим константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_1} \int_0^1 \int_0^1 (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) dx dx, \quad C_3^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_3} \int_0^1 \int_0^1 (p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}) dx dx. \quad (14)$$

В случае свободного опирания на контуре должно выполняться условие

$$T_{rr}|_{r=r_0} = a_1 u_{r'r} + \frac{a_2}{r} u_r - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} K_k \theta h_k = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим деформирование пластины от радиальной нагрузки p_r при отсутствии окружной нагрузки ($p_\varphi = 0$). Граничное условие (15) принимает вид

$$\begin{aligned} T_{rr}^{(n)}|_{r=r_0} &= a_1 \left(C_1^{(n)} - \frac{2}{3a_1} (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) r_0 \right) + \\ &+ \frac{a_2}{r_0} \left(C_1^{(n)} r_0 - \frac{1}{3a_1} (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) r_0^2 \right) - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} K_k \Delta T h_k = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда имеем константу интегрирования

$$C_1^{(n)} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left(\frac{2a_1 + a_2}{3a_1} (p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}) r_0 + 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} K_k \Delta T h_k \right). \quad (17)$$

Деформации в слоях следуют из полученных перемещений (13) и соотношений Коши в полярной системе координат [1]. Ввиду симметрии нагрузки имеем

$$\varepsilon_{rr}^{(n)} = u_{r'r}^{(n)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} = \frac{1}{r} u_r^{(n)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(u_{\varphi'r}^{(n)} - \frac{1}{r} u_\varphi^{(n)} \right). \quad (18)$$

Следовательно, в температурном поле осесимметричное деформирование круговой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости при закрепленном или свободно опертом контуре описывается формулами (13)–(18).

Численные результаты

Численно исследовано деформирование круговой упругопластической трехслойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$ м) при осесимметричном нагружении в срединной плоскости заполнителя нагрузкой $p_{r0} = 300$ МПа, $p_{\varphi0} = 0$. Внешние несущие слои выполнены из дюралюминия марки Д16-Т, заполнитель изготовлен из фторопласта-4. На контуре принято свободное опирание. Осредненное температурное поле – $T = \text{const}$, толщина внешних несущих слоев – $h_1 = h_2 = 0,02$ м, толщина заполнителя – $h_3 = 0,4$ м.

Функция пластичности в соотношениях (1) при термосиловом нагружении для несущих слоев принималась в следующем виде [1]:

$$\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T), \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_{y0}^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)} + \varepsilon_{y0}^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)}(T)} \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(T), \end{cases}$$

где A_k, α_k – константы нелинейности материалов несущих слоев, получаемые экспериментально; $\varepsilon_{y0}^{(k)}$ – деформационный предел текучести при температуре $T_0 = 293$ К; $\varepsilon_y^{(k)}(T)$ – деформационный предел упругости при температуре T .

Функция нелинейности в соотношениях (1) для заполнителя (фторопласт-4) принималась в следующем виде [1]:

$$\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}, \\ A_3 \left(1 - \frac{\varepsilon_s^{(3)}}{\varepsilon_u^{(3)}} \right)^{\alpha_3}, & \varepsilon_u^{(3)} > \varepsilon_s^{(3)}, \end{cases}$$

где $A_3, \alpha_3, \varepsilon_s^{(3)}$ – константы нелинейности материала заполнителя.

На рис. 2 представлена сходимость итерационного процесса ($T = 293$ К). Номер кривой совпадает с шагом итерации. Второе приближение отличается от первого примерно на 10 %. Принятое за искомое решение пятое приближение отличается от четвертого на 0,14 %. В результате физическая нелинейность материалов слоев добавляет к упругим перемещениям около 14,5 %. Следует отметить, что указанные численные значения практически совпадают с аналогичными результатами для упругопластической пластины с жестко заданным контуром.

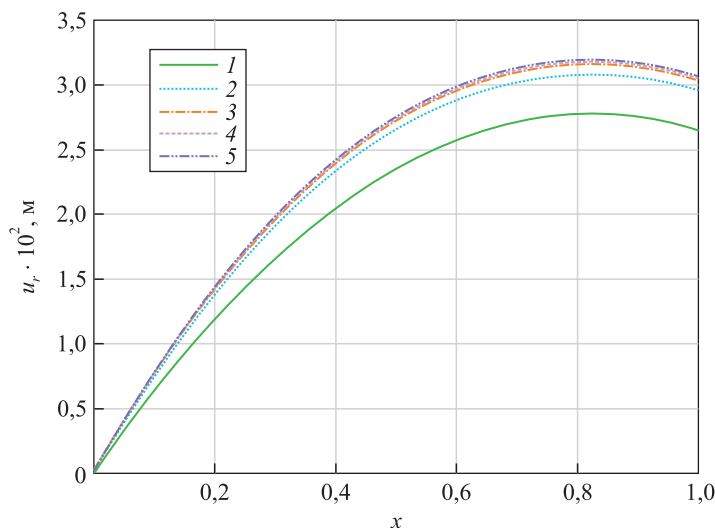


Рис. 2. Сходимость метода упругих решений ($T = 293$ К):
 1, 2, 3, 4, 5 – номер итерации

Fig. 2. Convergence of the elastic solution method ($T = 293$ К):
 1, 2, 3, 4, 5 – iteration number

На рис. 3 отражено влияние температуры на радиальные перемещения u_r . Перемещения при комнатной температуре ($T = 293$ К) максимальны в сечении $x = 0,82$, с ростом температуры максимумы сдвигаются к сечениям $x = 0,86$ ($T = 373$ К) и $x = 0,89$ ($T = 473$ К). Нагревание приводит к увеличению максимальных перемещений на 21,8 % ($T = 373$ К) и 43,8 % ($T = 473$ К).

Распределение областей пластичности и физической нелинейности по поперечному сечению пластины с ростом температуры изображено на рис. 4. Несущие слои полностью переходят в упругопластическое состояние. Нагревание пластины приводит к существенному увеличению областей физической нелинейности в заполнителе вследствие роста интенсивности деформаций.

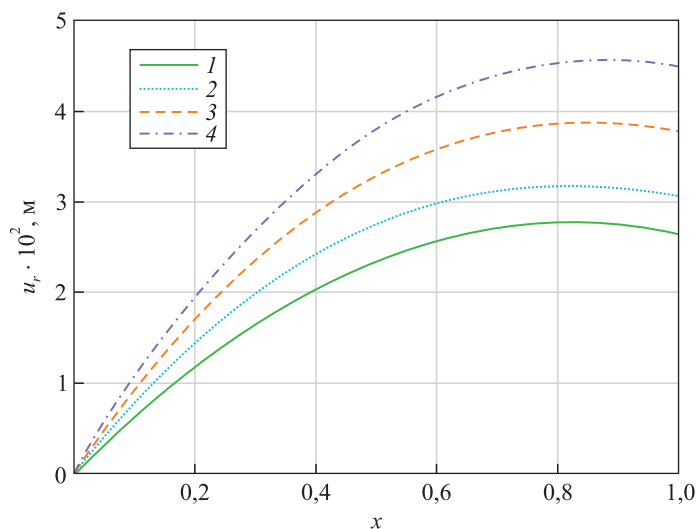


Рис. 3. Радиальные перемещения u_r в трехслойной пластине при различных температурах:
1 – упругая пластина при $T = 293$ К; 2, 3, 4 – упругопластическая пластина при $T = 293$ К, $T = 373$ К, $T = 473$ К соответственно

Fig. 3. Radial movements of u_r in a three-layer plate at different temperatures:
1 – elastic plate at $T = 293$ К; 2, 3, 4 – elastic-plastic plate at $T = 293$ К, $T = 373$ К, $T = 473$ К respectively

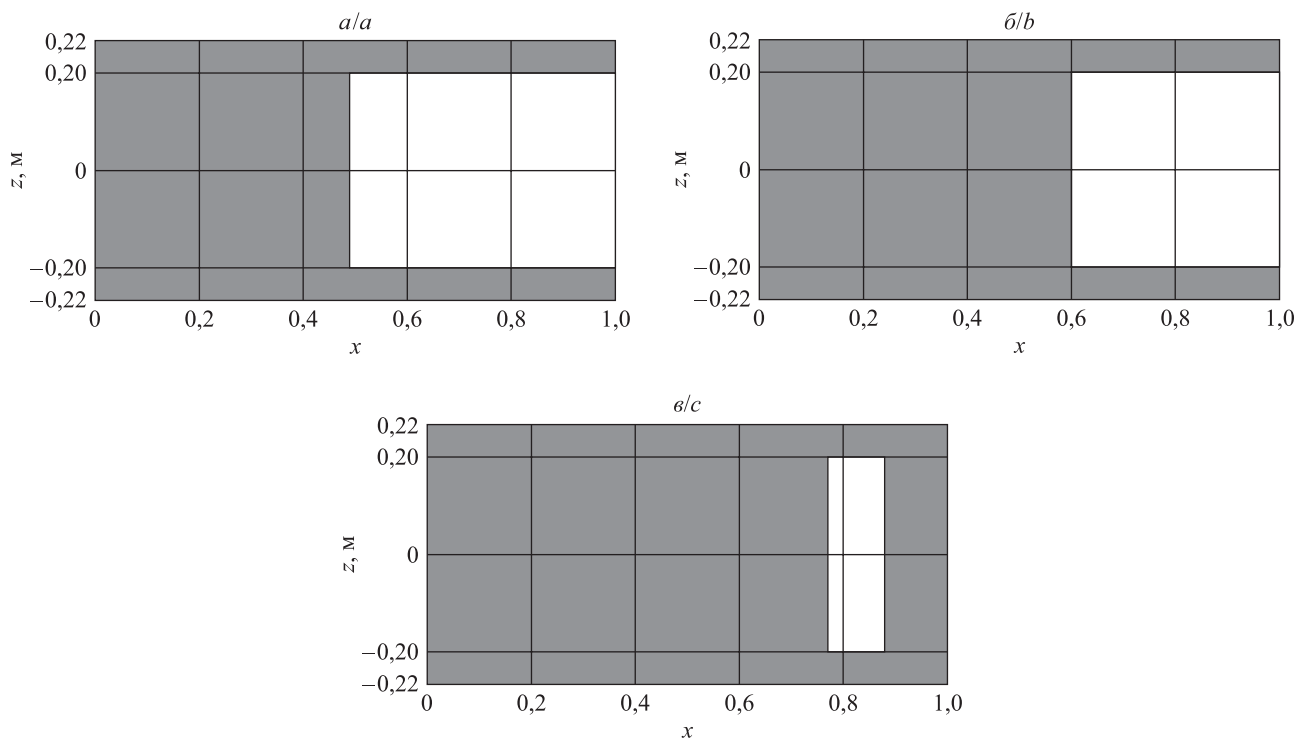


Рис. 4. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (серая заливка) при $T = 293$ К (а), $T = 373$ К (б) и $T = 473$ К (в)

Fig. 4. Distribution of areas of plasticity and physical non-linearity (gray fill) at $T = 293$ К (a), $T = 373$ К (b) and $T = 473$ К (c)

Заклучение

Учет физической нелинейности материалов слоев и воздействия температуры позволяет существенно уточнить напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины при деформировании в своей плоскости. Численные результаты подтвердили сходимость метода упругих решений, а также значительное влияние физической нелинейности материалов слоев и температуры на перемещения в пластине. Приведенные решения и численные результаты могут найти применение для расчетов слоистых элементов конструкций.

Библиографические ссылки

1. Журавков МА, Старовойтов ЭИ. *Математические модели механики твердых тел*. Минск: БГУ; 2021. 535 с.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p. DOI: 10.1142/9048.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads. *Strength of Materials*. 2002;34(5):474–481. DOI: 10.1023/A:1021050611206.
6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.
7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
8. Mikhasev GI, Eremeyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
9. Mikhasev GI, Altenbach H. *Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression*. Cham: Springer; 2019. Chapter 4, Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells; p. 157–198 (Öchsner A, da Silva LFM, Altenbach H, editors. *Advanced structured materials*; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
10. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics*. 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.
11. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
12. Kaplunov J, Prikazchikova L, Alkinidri M. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1247–1262. DOI: 10.1007/s00161-021-00969-6.
13. Kaplunov J, Prikazchikov DA, Prikazchikova LA. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;113–114:169–179. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042.
14. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
15. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.
16. Fedotenkov GV, Tarlakovsky DV, Vahterova YA. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(4):439–447. DOI: 10.1134/S1995080219040061.
17. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
18. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
19. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
20. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.
21. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.
22. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.
23. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.
24. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
25. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
26. Starovoitov EI, Zhuravkov MA, Pronina PF. Bending of an elastic three-layer plate with a hole connected to the soil foundation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences*. 2021;1:164–171. DOI: 10.32014/2021.2518-170X.23.

27. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018; 54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
28. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015;3(8):1487–1493. DOI: 10.18535/ijmeit/v2i8.02.
29. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014; 225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
30. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
31. Wang Zhihua, Lu Guoxing, Zhu Feng, Zhao Longmao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
32. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.
33. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
34. Нестерович АВ. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости. *Проблемы физики, математики и техники*. 2020;1:85–90.
35. Старовойтов ЭИ, Нестерович АВ. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022;2:57–69. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
36. Ильюшин АА. *Пластичность. Часть 1, Упругопластические деформации*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1948. 376 с.

References

1. Zhuravkov MA, Starovoitov EI. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid mechanics]. Minsk: Belarusian State University; 2021. 535 p. Russian.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Prikazchikov D, translator. Singapore: World Scientific Publishing; 2015. XV, 360 p. DOI: 10.1142/9048.
3. Carrera E, Fazzolari FA, Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Amsterdam: Academic Press; 2016. XXXI, 408 p.
4. Gorshkov AG, Starovoitov EI, Yarovaya AV. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2001;37(9):1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
5. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads. *Strength of Materials*. 2002;34(5):474–481. DOI: 10.1023/A:1021050611206.
6. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*. 2003;39(12):1458–1463. DOI: 10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a.
7. Starovoitov EI, Leonenko DV, Tarlakovsky DV. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*. 2015;51(5):561–570. DOI: 10.1007/s11029-015-9527-2.
8. Mikhasev GI, Eremyev VA, Wilde K, Maevskaya SS. Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2019;30(18–19):2748–2769. DOI: 10.1177/1045389X19873423.
9. Mikhasev GI, Altenbach H. *Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression*. Cham: Springer; 2019. Chapter 4, Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells; p. 157–198 (Öchsner A, da Silva LFM, Altenbach H, editors. *Advanced structured materials*; volume 106). DOI: 10.1007/978-3-030-12761-9_4.
10. Bakulin VN, Volkov EN, Simonov AI. Dynamic stability of a cylindrical shell under alternating axial external pressure. *Russian Aeronautics*. 2017;60(4):508–513. DOI: 10.3103/S1068799817040055.
11. Bakulin VN, Boitsova DA, Nedbai AY. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(5):623–634. DOI: 10.1007/s11029-021-09984-9.
12. Kaplunov J, Prikazchikova L, Alkinidri M. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021;33(4):1247–1262. DOI: 10.1007/s00161-021-00969-6.
13. Kaplunov J, Prikazchikov DA, Prikazchikova LA. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;113–114:169–179. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042.
14. Kondratov DV, Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
15. Mogilevich LI, Popov VS, Popova AA, Christoforova AV. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics. Conference Series*. 2018;944:012081. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012081.
16. Fedotenkov GV, Tarlakovsky DV, Vahterova YA. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(4):439–447. DOI: 10.1134/S1995080219040061.
17. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(2):145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
18. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;76(5):511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
19. Paimushin VN, Gazizullin RK. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(3):283–304. DOI: 10.1007/s11029-017-9662-z.
20. Paimushin VN, Firsov VA, Shishkin VM. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*. 2017; 53(4):425–440. DOI: 10.1007/s11029-017-9673-9.

21. Paimushin VN. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;53(1):1–16. DOI: 10.1007/s11029-017-9636-1.
22. Ivañez I, Moure MM, Garcia-Castillo SK, Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015;133:1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035.
23. Grover N, Singh BN, Maiti DK. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;52:41–51. DOI: 10.1016/j.ast.2016.02.017.
24. Starovoitov EI, Leonenko DV. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2011;46(2):291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
25. Starovoitov EI, Leonenko DV, Yarovaya AV. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2007;43(4):451–459. DOI: 10.1007/s10778-007-0042-6.
26. Starovoitov EI, Zhuravkov MA, Pronina PF. Bending of an elastic three-layer plate with a hole connected to the soil foundation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences*. 2021;1:164–171. DOI: 10.32014/2021.2518-170X.23.
27. Xie Z. An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels. *Mechanics of Composite Materials*. 2018;54(2):243–250. DOI: 10.1007/s11029-018-9735-7.
28. Kudin A, Al-Omari MAV, Al-Athamneh BGM, Al-Athamneh HKM. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015;3(8):1487–1493. DOI: 10.18535/ijmeit/v2i8.02.
29. Škec L, Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5.
30. Pradhan M, Dash PR, Pradhan PK. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*. 2016;51(3):725–739. DOI: 10.1007/s11012-015-0229-6.
31. Wang Zhihua, Lu Guoxing, Zhu Feng, Zhao Longmao. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(9):04017057. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243.
32. Zadeh HV, Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017;6(1):1–10. DOI: 10.14810/ijmech.2017.6101.
33. Yang L, Harrysson O, West H, Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*. 2013;4(8):471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
34. Nestsiarovich AV. Deformation of a three-layer circular plate under cosine loading in its plane. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2020;1:85–90. Russian.
35. Starovoitov EI, Nesterovich AV. The non-axisymmetric loading of an elastoplastic three-layer plate in its plane. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2022;2:57–69. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-57-69.
36. Il'yushin AA. *Plastichnost'. Chast' 1, Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Chapter 1, Elastoplastic deformation]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1948. 376 p. Russian.

Получена 09.09.2022 / исправлена 12.10.2023 / принята 13.10.2023.
Received 09.09.2022 / revised 12.10.2023 / accepted 13.10.2023.