УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ В ЦЕЛОМ ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ ХИЩНИК – ЖЕРТВА

А. Д. УШХО[1]***, Д. С. УШХО***[1]

[1]*Адыгейский государственный университет, ул. Первомайская, 208, 385000, г. Майкоп, Россия*

Методами классической качественной теории динамических систем на плоскости решена в целом задача построения фазового портрета системы хищник – жертва Колмогорова. Рассмотрены возможные топологические структуры данной модели для шести случаев коэффициентных условий при положительных значениях трех параметров. За счет разбиения множества значений одного из параметров на промежутки построены фазовые портреты в круге Пуанкаре. Найдены значения этого параметра, при которых в системе возможен режим автоколебаний. Показано, что негрубый однократный сложный фокус не окружают замкнутые траектории. На основе анализа расположения главных изоклин системы на всей фазовой плоскости исключительно геометрически установлена топологическая структура сложного состояния равновесия на бесконечности без опоры на известные аналитические (более трудоемкие) методы.

Ключевые слова: А. Н. Колмогоров; система хищник – жертва; глобальный фазовый портрет; круг Пуанкаре; состояния равновесия; предельный цикл.

Благодарность. Авторы выражают благодарность профессору В. Б. Тлячеву за полезные замечания, а также Физическому обществу Республики Адыгея за частичную финансовую поддержку (грант № 2022/01).

Образец цитирования:
Ушхо АД, Ушхо ДС. Исследование в целом поведения траекторий системы хищник – жертва. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:20–30.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-20-30

For citation:
Ushkho AD, Ushkho DS. Investigation in general of the behaviour of the trajectories of a predator – prey system. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:20–30. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-20-30

Авторы:
Адам Дамирович Ушхо – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой теоретической физики инженерно-физического факультета.
Дамир Салихович Ушхо – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук.

Authors:
Adam D. Ushkho, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of theoretical physics, faculty of engineering and physics.
uschho76@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0002-0453-7513
Damir S. Ushkho, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical analysis and methods of teaching mathematics, faculty of mathematics and computer science.
uschho76@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0002-1311-5785

INVESTIGATION IN GENERAL OF THE BEHAVIOUR OF THE TRAJECTORIES OF A PREDATOR – PREY SYSTEM

***A. D. USHKHO*[a], *D. S. USHKHO*[a]**

[a]*Adyghe State University, 208 Pervomayskaya Street, Maykop 385000, Russia*
Corresponding author: A. D. Ushkho (uschho76@rambler.ru)

By the methods of the classical qualitative theory of dynamical systems on the plane, the problem of constructing a phase portrait of Kolmogorov's predator – prey system has been solved in general. Possible topological structures of this model are considered for six cases of coefficient conditions with positive values of three parameters. The phase portraits in the Poincare disk are constructed by dividing the set of values of one of the parameters into intervals. The values of this parameter are found at which the self-oscillation mode is possible in the system. It is shown that a weak focus of order 1 (multiplicity 1) is not surrounded by closed trajectories. Based on the analysis of the location of the main isoclines of the system on the entire phase plane, exclusively geometrically, the topological structure of a complex equilibrium state at infinity is established without relying on known analytical (more time-consuming) methods.

Keywords: A. N. Kolmogorov; predator – prey system; global phase portrait; Poincare disk; equilibrium states; limit cycle.

Acknowledgements. The authors are grateful to professor V. B. Tlyachev for useful comments, as well as to the Adygheya Republic Physical Society for partial financial support (grant No. 2022/01).

Введение

В недавней работе [1] исследовано поведение траекторий системы хищник – жертва Колмогорова вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left[b + (1-b)x - y - x^2\right] \equiv P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left[-\delta b + (c-\delta)x\right] \equiv Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где в первом квадранте выполняются неравенства

$$\delta > 0,\ b > 0,\ c > 0. \tag{2}$$

При этом дана классификация глобальной динамики по трем параметрам (δ, b, c), имеющим определенный экологический смысл. Все топологически отличающиеся глобальные фазовые портреты построены в положительном квадранте круга Пуанкаре. Однако несомненный математический интерес представляет решение задачи построения фазового портрета системы (1) на всей плоскости. В настоящей статье приведены результаты решения поставленной задачи на основе использования инструментария качественной теории дифференциальных уравнений.

Заметим, что в работе [1] имеются некоторые неточности, которые отмечены в дальнейшем тексте.

Необходимые предварительные утверждения

Лемма 1. *Если $b \geq 1$, то система (1) не имеет замкнутых траекторий в первом квадранте.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x = 0$ и $y = 0$ – инвариантные прямые, то их не пересекают замкнутые траектории системы (1), поэтому рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{b + (1-b)x - y - x^2}{y} \equiv F(x, y), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{-\delta b + (c-\delta)x}{x} \equiv G(x, y), \end{cases} \tag{3}$$

где $d\tau = xydt$.

Согласно работе [2] замкнутые траектории систем (1) и (3) совпадают, но параметризации на них могут быть различными.

Выражение $F'_x(x, y) + G'_y(x, y) = \dfrac{1-b-2x}{y}$ строго отрицательно в первом квадранте, и согласно признаку Бендиксона [2] очевидно отсутствие замкнутых траекторий. Лемма доказана.

Замечание 1. В силу леммы 1 предельные циклы в первом квадранте можно ожидать только при выполнении условия $0 < b < 1$.

Лемма 2. *Если* $\delta > 0,\ 0 < b < 1,\ c = \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, *то система (1) или не имеет предельных циклов, или имеет только простые предельные циклы.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что функции

$$\alpha(x, y) = \frac{(b-1)x}{\delta b y},\ \beta(x, y) = -\frac{1}{x}$$

удовлетворяют функциональному уравнению $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$, при этом справедливо неравенство

$$\alpha'_x + \beta'_y = \frac{b-1}{\delta b y} \neq 0.$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 4.4, представленной в работе [3]. Лемма доказана.

Основные результаты

Теорема 1. *Если* $\delta > 0,\ 0 < b < 1,\ c = \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, *то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:* $O(0, 0)$ *– простое седло,* $D(-b, 0)$ *– простой устойчивый узел,* $A(1, 0)$ *– простое седло,* $E\left(\dfrac{\delta b}{c-\delta}, \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2}\right)$ *– негрубый устойчивый фокус. На экваторе сферы Пуанкаре расположены два состояния равновесия:* W_1 $(u = z = 0)$ *– простой неустойчивый узел,* W_2 $(v = z = 0)$ *– сложное состояние равновесия, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор. Система не имеет замкнутых траекторий.*

Доказательство. Решениями системы

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$$

являются координаты точек $O(0, 0), D(-b, 0), A(1, 0), E\left(\dfrac{\delta b}{c-\delta}, \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2}\right)$. Следуя работам [2; 4], введем обозначения величин σ и Δ.

Пусть в результате переноса начала координат в точку покоя $H(x_0,\ y_0)$ из системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = R(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = S(x, y) \end{cases}$$

получена система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = mx + ny + \varphi(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = px + qy + \psi(x, y), \end{cases}$$

где φ и ψ – аналитические функции, разложения которых не содержат свободных и линейных членов. Тогда

$$\sigma(H) = m + q,\ \Delta(H) = mq - np.$$

Так как $\Delta(O) = -\delta b^2 < 0$, то O – простое седло при выполнении условий (2).

В результате преобразования

$$\begin{cases} x = \bar{x} + 1, \\ y = \bar{y} \end{cases}$$

система (1) трансформируется в систему (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(b+1)x - y - (b+2)x^2 - xy - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = \left[c - (b+1)\delta\right]y + (c-\delta)xy. \end{cases} \tag{4}$$

Из системы (4) получаем величины

$$\sigma(A) = -(b+1) + c - (b+1)\delta,\ \Delta(A) = -(b+1)\left[c - (b+1)\delta\right]. \tag{5}$$

Из выражений (5) в силу условий теоремы следует, что $\Delta(A) < 0$, т. е. A – простое седло.

В результате переноса начала координат в точку $D(-b,\ 0)$ система (1) принимает вид (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b(b+1)x + by + (2b+1)x^2 - xy - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -bcy + (c-\delta)xy. \end{cases} \tag{6}$$

Из системы (6) видно, что $\Delta(D) = b^2c(b+1) > 0$ при выполнении условий (2). Учитывая тот факт, что точка D лежит на инвариантной прямой $y = 0$, делаем вывод: точка $D(-b,\ 0)$ есть простой узел, причем устойчивый, так как $\sigma(D) = -\left[b(b+1) + bc\right] < 0$.

Для установления типа точки покоя E преобразуем систему (1) по формулам

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \dfrac{\delta b}{c-\delta}, \\ y = \overline{y} + \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2} \end{cases}$$

и запишем результат в старых переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\delta b\left[c - \delta - b(c+\delta)\right]}{(c-\delta)^2}x - \dfrac{\delta b}{c-\delta}y + \dfrac{\left[c - \delta - b(c+\delta) - \delta b\right]}{c-\delta}x^2 - xy - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{c-\delta}x + (c-\delta)xy. \end{cases} \tag{7}$$

Из системы (7) получаем выражения $\sigma(E) = \dfrac{\delta b\left[c - \delta - b(c+\delta)\right]}{(c-\delta)^2}$ и $\Delta(E) = \dfrac{\delta b^2 c\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2}$. Так как $\sigma(E) = 0$, $\Delta(E) > 0$, то для точки покоя $(0,\ 0)$ системы (7) имеет место проблема отличия центра от фокуса.

С учетом условия $c = \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$ перепишем систему (7):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{(b-1)}{2}y + \dfrac{(b+1)}{2}x^2 - xy - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\delta b(1+b)}{2(1-b)}x + \dfrac{2\delta b}{1-b}xy. \end{cases} \tag{8}$$

Первая ляпуновская величина начала координат системы (8) определяется равенством $\alpha_3 = -\dfrac{\pi\delta b(1+b)^2}{8\omega^3}$, поэтому $\alpha_3 < 0$. Следовательно, точка E представляет собой негрубый устойчивый фокус [2; 5].

Для исследования поведения траекторий системы в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости воспользуемся преобразованиями Пуанкаре.

Первое преобразование Пуанкаре

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{z}, \\ y = \dfrac{u}{z} \end{cases}$$

трансформирует систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u + (b + c - \delta - 1)uz + u^2 z - (b + \delta b)uz^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = z + (b - 1)z^2 + uz^2 - bz^3. \end{cases} \tag{9}$$

Второе преобразование Пуанкаре

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{z}, \\ y = \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

приводит систему (1) к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -vz - v^3 + (\delta - b - c + 1)v^2 z + (b + \delta b)vz^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = (\delta - c)vz^2 + \delta b z^3. \end{cases} \tag{10}$$

Как видно из систем (9) и (10), прямая $z = 0$ состоит из траекторий данных систем. Единственным состоянием равновесия системы (9) при $z = 0$ является точка W_1 ($u = z = 0$), которая представляет собой простой неустойчивый узел, так как $\Delta(W_1) = 1$, $\sigma(W_1) = 2$, т. е. $\Delta(W_1) > 0$, $\sigma(W_1) > 0$.

Поскольку в системе (10) в правых частях уравнений нет линейных членов, то состояние равновесия W_2 ($v = z = 0$) сложное.

Известно [6], что сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия динамической системы, включая бесконечно удаленные, равна 1. Так как сумма индексов точек O, A, D, E, W_1 равна 1, то индекс состояния равновесия W_2 равен 0. Согласно формуле Бендиксона [4] $I = 1 + \dfrac{e - h}{2}$ получаем $h = e + 2$, где h и e – количество гиперболических и эллиптических секторов, примыкающих к точке W_2, соответственно. Покажем, что $e = 1$ и, следовательно, $h = 3$.

Расположение траекторий системы (10) в окрестности точки W_2 можно установить методом Фроммера [7]. Однако во избежание громоздких аналитических вычислений, связанных с этим методом, воспользуемся графическим представлением главных изоклин системы (1) в круге Пуанкаре (рис. 1) и упростим доказательство. Цифрами *1–11* обозначены области, на которые разбит круг Пуанкаре главными изоклинами системы (1).

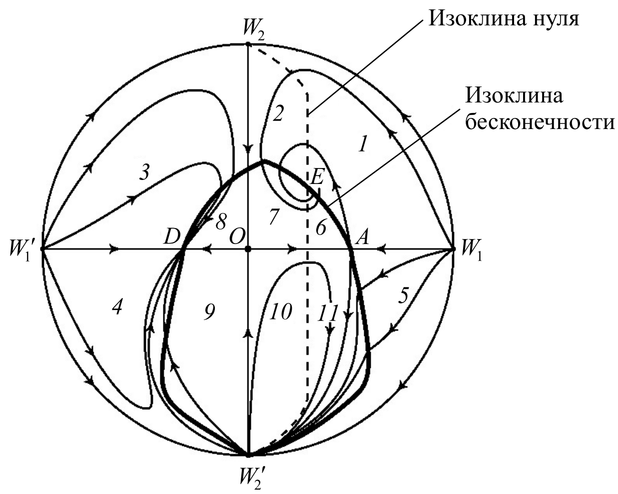

Рис. 1. Главные изоклины системы (1) в круге Пуанкаре

Fig. 1. The main isoclines of the system (1) in the Poincare disk

Непосредственной проверкой установлено, что $\frac{dy}{dt} > 0$ ($\frac{dy}{dt} < 0$) в областях *1*, *4*, *6*, *9*, *10* (*2*, *3*, *5*, *7*, *8*, *11*), $\frac{dx}{dt} > 0$ ($\frac{dx}{dt} < 0$) в областях *3*, *4*, *6*, *7*, *10*, *11* (*1*, *2*, *5*, *8*, *9*). Согласно указанному распределению знаков производных $\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}$ в областях делаем вывод: за исключением единственной траектории, которая одним концом примыкает к точке W_2', а другим концом – к узлу D, все остальные траектории, расположенные в области *4*, одним концом примыкают к точке W_1', а другим концом – к узлу D. Таким образом, к точке W_2' примыкает гиперболический сектор, расположенный в области *4*. Очевидно, что гиперболический сектор имеется в области *3*, и он примыкает к точке W_2. К этой точке примыкает еще один гиперболический сектор, расположенный в областях *1* и *2*. Следует отметить, что любая траектория, исходящая из точки W_2', при $t \to +\infty$ возвращается в эту же точку, не выходя из областей *10* и *11*. Тем самым мы утверждаем, что к точке W_2' примыкает эллиптический сектор. Согласно работе [4] точки W_2 и W_2' соответствуют одной и той же бесконечно удаленной точке покоя W_2 ($v = z = 0$), а точки W_1 и W_1' – одной и той же точке покоя W_1 ($u = z = 0$).

Таким образом, установлено, что к сложной точке покоя W_2 ($v = z = 0$) примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.

Предельный цикл не окружает негрубый устойчивый фокус E. Действительно, в силу леммы 2 выражение $\alpha_x' + \beta_y' = \frac{b-1}{\delta b y}$ меньше нуля в первом квадранте. Согласно теореме 4.4, представленной в работе [3], если существует предельный цикл, то он должен быть устойчивым. Предположение о существовании устойчивого предельного цикла, окружающего устойчивый фокус, допускает по принципу кольца [4] существование хотя бы одного неустойчивого предельного цикла вокруг фокуса E. Данное противоречие доказывает, что система (1) не имеет замкнутой траектории в первом квадранте. Теорема доказана.

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 1 изображен на рис. 2.

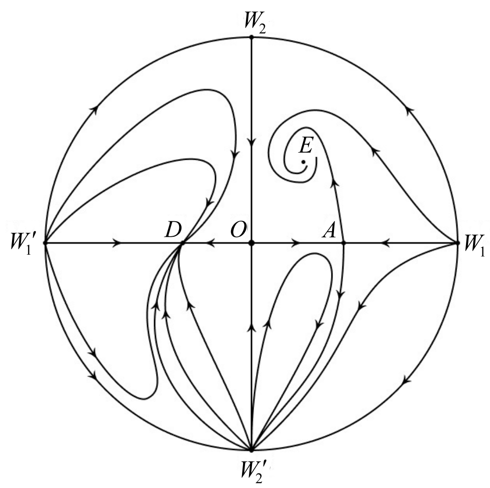

Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 1

Fig. 2. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 1

Замечание 2. Схема расположения траекторий в окрестности точки W_2 в работе [1] установлена не полностью. Согласно рис. 4.1, *c*, приведенному в указанной работе, окрестность точки W_2 содержит четыре гиперболических сектора, что не соответствует картине, изображенной на рис. 2.

В этом можно убедиться на конкретном примере следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left(3 - 2x - y - x^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left(-3 + 4x\right). \end{cases} \tag{11}$$

Фазовый портрет данной системы в круге Пуанкаре, представленный на рис. 3, показывает, что окрестность точки равновесия W_2 состоит из трех гиперболических секторов и одного эллиптического сектора.

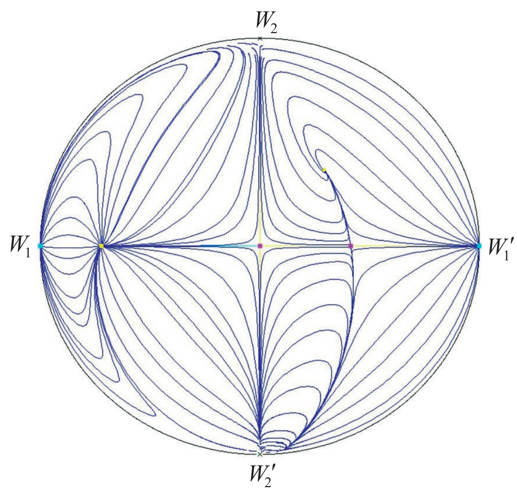

Рис. 3. Фазовый портрет системы (11)
(W_2 – состояние равновесия на экваторе сферы Пуанкаре, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор)

Fig. 3. The phase portrait of the system (11)
(W_2 – the state of equilibrium at the equator of the Poincare sphere, to which three hyperbolic and one elliptical sectors adjoin)

Теорема 2. *Если* $\delta > 0$, $b > 0$, $c = \delta$, *то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три состояния равновесия:* $O(0, 0)$ *– простое седло,* $D(-b, 0)$, $A(1, 0)$ *– простые устойчивые узлы. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел* W_1 ($u = z = 0$) *и сложное состояние равновесия* W_2 ($v = z = 0$)*, к которому примыкают четыре гиперболических сектора.*

Согласно упомянутой выше формуле Бендиксона $I = 1 + \dfrac{e-h}{2}$ индекс точки покоя W_2 равен –1, поэтому $h = e + 4$. Об отсутствии эллиптических секторов в окрестности точки W_2 свидетельствует тот факт, что $\dfrac{dy}{dt} > 0$ ($\dfrac{dy}{dt} < 0$) в третьем и четвертом (первом и втором) квадрантах в силу системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = bx + (1-b)x^2 - xy - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\delta by. \end{cases}$$

Действительно, в указанных парах квадрантов изображающая точка движется вдоль фазовых траекторий либо только в направлении возрастания y, либо только в направлении убывания y.

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 2 изображен на рис. 4.

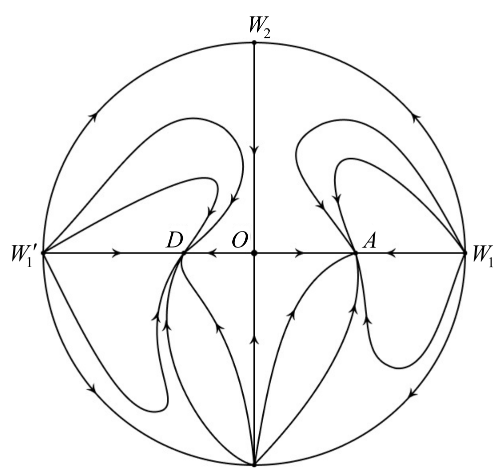

Рис. 4. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 2

Fig. 4. The phase portrait of the system (1)
under the conditions of the theorem 2

Теорема 3. *Если* $\delta > 0$, $b > 0$, $c = (b+1)\delta$, *то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три состояния равновесия:* $O(0, 0)$ *– простое седло,* $D(-b, 0)$ *– простой устойчивый узел,* $A(1, 0)$ *– седлоузел. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел* W_1 $(u = z = 0)$ *и сложное состояние равновесия* W_2 $(v = z = 0)$*, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.*

Замечание 3. При $c = (b+1)\delta$ седло A и топологический узел E сливаются в одно состояние равновесия – двукратный седлоузел.

Замечание 4. Топологическим узлом в терминологии работы [2] называется состояние равновесия, являющееся узлом или фокусом.

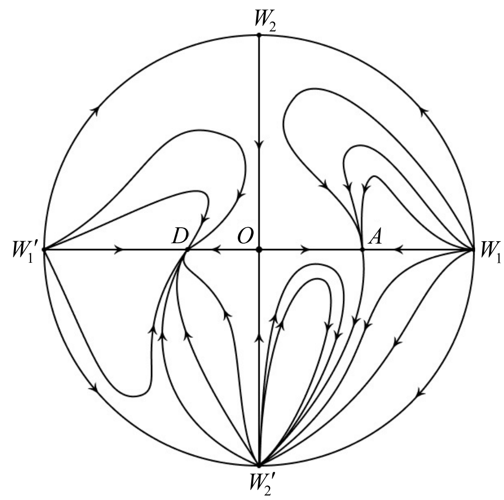

Рис. 5. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 3
Fig. 5. The phase portrait of the system (1) under the conditions of the theorem 3

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 3 изображен на рис. 5.

Теорема 4. *Если* $\delta > 0$, $0 < b < 1$, $c > \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, *то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:* $O(0, 0)$ *– простое седло,* $D(-b, 0)$ *– простой устойчивый узел,* $A(1, 0)$ *– простое седло,* $E\left(\dfrac{\delta b}{c-\delta}, \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2}\right)$ *– простой неустойчивый узел или фокус, окруженный устойчивым предельным циклом. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел* W_1 $(u = z = 0)$ *и сложное состояние равновесия* W_2 $(v = z = 0)$*, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.*

Доказательство. Из неравенств $\delta > 0$, $0 < b < 1$, $c > \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$ следует неравенство $\Delta(A) < 0$, согласно которому A является простым седлом. Также выполняются неравенства $\sigma(E) > 0$, $\Delta(E) > 0$, из которых следует, что E представляет собой неустойчивый топологический узел. Вместе с тем W_1 $(u = z = 0)$ есть неустойчивый узел. Так как E – единственное состояние равновесия в первом квадранте, то по теореме Пуанкаре – Бендиксона точку E окружает хотя бы один устойчивый предельный цикл. Единственность предельного цикла, окружающего точку E, гарантирована в соответствии с результатами работы [8].

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 4 изображен на рис. 6.

Теорема 5. *Если* $\delta > 0$, $0 < b < 1$, $(b+1)\delta < c < \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, *то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:* $O(0, 0)$ *– простое седло,* $D(-b, 0)$ *– простой устойчивый узел,* $A(1, 0)$ *– простое седло,* $E\left(\dfrac{\delta b}{c-\delta}, \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2}\right)$ *– простой устойчивый тополо-*

гический узел. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел W_1 ($u = z = 0$) *и сложное состояние равновесия* W_2 ($v = z = 0$)*, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.*

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 5 изображен на рис. 7.

Замечание 5. Система (1) в условиях теоремы 5 ациклична в силу работы [8].

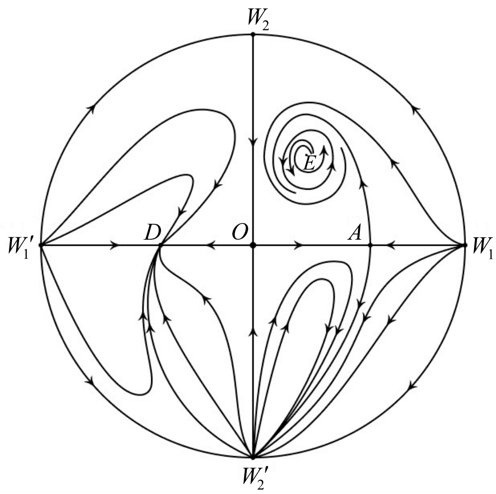

Рис. 6. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 4
Fig. 6. The phase portrait of the system (1)
under the conditions of the theorem 4

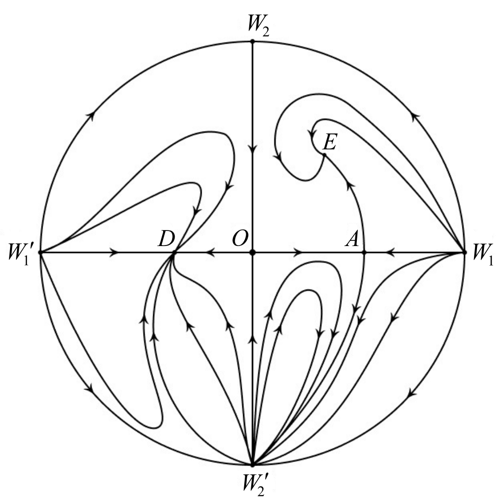

Рис. 7. Фазовый портрет системы (1)
в условиях теоремы 5 (E – устойчивый узел)
Fig. 7. The phase portrait of the system (1)
under the conditions of the theorem 5 (E – the stable node)

Теорема 6. *Если* $\delta > 0$, $b > 0$, $\delta < c < (b+1)\delta$, *то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия:* $O(0, 0)$ *– простое седло,* $D(-b, 0)$, $A(1, 0)$ *– простые устойчивые узлы,* $E\left(\dfrac{\delta b}{c-\delta}, \dfrac{bc\left[c-(b+1)\delta\right]}{(c-\delta)^2}\right)$ *– простое седло. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простой неустойчивый узел* W_1 ($u = z = 0$) *и сложное состояние равновесия* W_2 ($v = z = 0$)*, к которому примыкают три гиперболических сектора и один эллиптический сектор.*

Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 6 изображен на рис. 8.

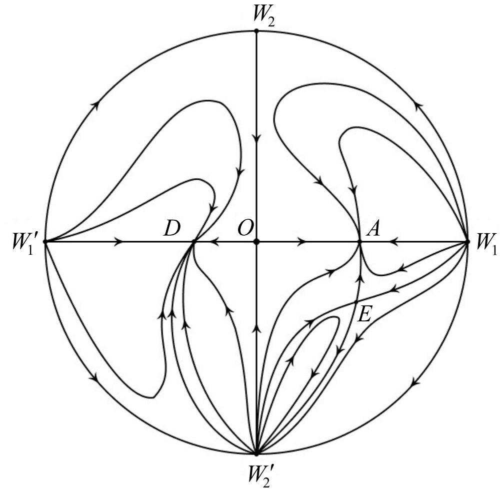

Рис. 8. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 6

Fig. 8. The phase portrait of the system (1)
under the conditions of the theorem 6

Замечание 6. Так как единственное состояние равновесия, не принадлежащее инвариантной прямой, есть седло E, то система (1) ациклична.

Заключение

Проведенное исследование дает возможность проследить изменение фазового портрета системы в зависимости от параметра c:

1) если $\delta > 0$, $b > 0$, $c = \delta$, то O – простое седло, D, A – простые устойчивые узлы (см. рис. 4);

2) если $\delta > 0$, $b > 0$, $\delta < c < (b+1)\delta$, то O – простое седло, D, A – простые устойчивые узлы, E – простое седло (см. рис. 8);

3) если $\delta > 0$, $b > 0$, $c = (b+1)\delta$, то O – простое седло, D – простой устойчивый узел, $A \equiv E$ – седлоузел (см. рис. 5);

4) если $\delta > 0$, $0 < b < 1$, $(b+1)\delta < c < \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, то O – простое седло, D – простой устойчивый узел, A – простое седло, E – простой устойчивый топологический узел (см. рис. 7);

5) если $\delta > 0$, $0 < b < 1$, $c = \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, то O – простое седло, D – простой устойчивый узел, A – простое седло, E – негрубый устойчивый фокус (см. рис. 2);

6) если $\delta > 0$, $0 < b < 1$, $c > \dfrac{(b+1)\delta}{1-b}$, то O – простое седло, D – простой устойчивый узел, A – простое седло, E – простой неустойчивый топологический узел, окруженный устойчивым предельным циклом (см. рис. 6).

Результаты исследования еще раз подтверждают тезис о том, что процессы, протекающие в многочисленных реальных динамических системах, удовлетворительно моделируются автономными системами дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Установление схемы поведения траекторий таких систем на всей фазовой плоскости возможно только на основе использования сведений из классической качественной теории, связанных с решением труднейших проблем: центра и фокуса, существования или отсутствия предельных циклов, их взаимного расположения и т. п. Со времен создателя качественной теории дифференциальных уравнений А. Пуанкаре и по настоящий момент усилиями ученых создаются различные методы решения данных проблем для отдельных классов полиномиальных дифференциальных систем. Так, в работе [9], посвященной проблеме центра и фокуса кубической системы, для проведения больших аналитических выкладок уже привлекаются системы компьютерной алгебры типа *Maple* или *Mathematica*. В статье [10] изучается квадратичная система, имеющая четыре предельных цикла, три из которых окружают один фокус. При этом обсуждается важный вопрос о предельных циклах нормального размера, т. е. таких предельных циклах, которые могут быть обнаружены численными методами.

Библиографические ссылки

1. Diz-Pita É, Llibre J, Otero-Espinar MV. Global phase portraits of a predator – prey system. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* 2022;16:1–13. DOI: 10.14232/ejqtde.2022.1.16.

2. Баутин НН, Леонтович ЕА. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* Москва: Наука; 1976. 496 с. (Справочная математическая библиотека).

3. Отроков НФ. *Аналитические интегралы и предельные циклы.* Горький: Волго-Вятское книжное издательство; 1972. 216 с.

4. Андронов АА, Леонтович ЕА, Гордон ИИ, Майер АГ. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. Москва: Наука; 1966. 568 с.

5. Андронов АА, Леонтович ЕА, Гордон ИИ, Майер АГ. *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*. Москва: Наука; 1967. 488 с.

6. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. Леонтович Е, Майер А, переводчики; Андронов АА, редактор. Москва: ОГИЗ; 1947. 392 с. Совместно с Государственным издательством технико-теоретической литературы (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).

7. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. *Успехи математических наук.* 1941;9:212–253.

8. Liou Lii-Perng, Cheng Kuo-Shung. On the uniqueness of a limit cycle for a predator – prey system. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1988;19(4):867–878. DOI: 10.1137/0519060.

9. Садовский АП, Щеглова ТВ. Центры кубической системы с одиннадцатью параметрами. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2011;1:71–75.

10. Сидоренко ИН. Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2008;3:63–68.

References

1. Diz-Pita É, Llibre J, Otero-Espinar MV. Global phase portraits of a predator – prey system. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* 2022;16:1–13. DOI: 10.14232/ejqtde.2022.1.16.

2. Bautin NN, Leontovich EA. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane]. Moscow: Nauka; 1976. 496 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka). Russian.

3. Otrokov NF. *Analiticheskie integraly i predel'nye tsikly* [Analytical integrals and limit cycles]. Gorky: Volgo-Vyatskoe knizhnoe izdatel'stvo; 1972. 216 p. Russian.

4. Andronov AA, Leontovich EA, Gordon II, Mayer AG. *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative theory of dynamical systems of the second order]. Moscow: Nauka; 1966. 568 p. Russian.

5. Andronov AA, Leontovich EA, Gordon II, Mayer AG. *Teoriya bifurkatsii dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane]. Moscow: Nauka; 1967. 488 p. Russian.

6. Poincare A. *O krivykh, opredelyaemykh differentsial'nymi uravneniyami* [On curves defined by differential equations]. Leontovich E, Mayer A, translators; Andronov AA, editor. Moscow: OGIZ; 1947. 392 p. Co-published by the Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury (Klassiki estestvoznaniya. Matematika. Mekhanika. Fizika. Astronomiya). Russian.

7. Frommer M. [Integral curves of an ordinary differential equation of the first order in the vicinity of a singular point having a rational character]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1941;9:212–253. Russian.

8. Liou Lii-Perng, Cheng Kuo-Shung. On the uniqueness of a limit cycle for a predator – prey system. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1988;19(4):867–878. DOI: 10.1137/0519060.

9. Sadovskii AP, Shcheglova TV. [Centers of a cubic system with eleven parameters]. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2011;1:71–75. Russian.

10. Sidorenko IN. [Limit cycles of normal size of some classes of quadratic systems on the plane]. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2008;3:63–68. Russian.

Получена 30.11.2022 / исправлена 06.02.2023 / принята 13.02.2023.
Received 30.11.2022 / revised 06.02.2023 / accepted 13.02.2023.