УДК 517.956.3

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. КОРЗЮК[1), 2)]***, Я. В. РУДЬКО***[1)]***, В. В. КОЛЯЧКО***[2)]

[1)]*Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрены различные подходы к решению смешанных задач с разрывными условиями для волнового уравнения, основанные на функциональных и классических методах. Показаны отличия в решениях, которые соответствуют разным методам (преобразование Лапласа и метод характеристик) и определениям. Результаты продемонстрированы на одной смешанной задаче из теории механического удара о продольных колебаниях

Образец цитирования:
Корзюк ВИ, Рудько ЯВ, Колячко ВВ. Решения задач с разрывными условиями для волнового уравнения. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:6–18.
EDN: IJYFBV

For citation:
Korzyuk VI, Rudzko JV, Kolyachko VV. Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;3:6–18. Russian.
EDN: IJYFBV

Авторы:
Виктор Иванович Корзюк – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений[1)], профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета[2)].
Ян Вячеславович Рудько – младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений.
Владислав Владимирович Колячко – ассистент кафедры системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиофизики и компьютерных технологий.

Authors:
Viktor I. Korzyuk, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; chief researcher at the department of differential equations[a] and professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics[b].
korzyuk@bsu.by
Jan V. Rudzko, junior researcher at the department of defferential equations.
janycz@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0002-1482-9106
Vladislav V. Kolyachko, assistant at the department of system analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies.
vladislav.kolyachko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3773-1187

полубесконечного упругого стержня с разрывными начальными и граничными условиями. Модельным примером служит задача о колебаниях стержня после продольного удара в торец (в частности, после выстрела пластилиновой пулей, прилипающей к концу стержня).

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение; неоднородное уравнение; смешанная задача; разрывные начальные условия; разрывные граничные условия; продольный удар; метод характеристик; преобразование Лапласа.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284) и Национальной академии наук Беларуси (договор № 2023-25-019).

SOLUTIONS OF PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS CONDITIONS FOR THE WAVE EQUATION

V. I. KORZYUK[a, b]***, J. V. RUDZKO***[a]***, V. V. KOLYACHKO***[b]

[a]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surganava Street, Minsk 220072, Belarus*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: J. V. Rudzko (janycz@yahoo.com)

In this paper, we consider various approaches to solving of mixed problems with discontinuous conditions based on functional and classical methods. We show differences in solutions, which correspond to different techniques (the Laplace transform and the method of characteristics) and definitions. We demonstrate the results on the case of one boundary-value problem from the theory of mechanical impact about longitudinal oscillations of a semi-infinite elastic rod with discontinuous initial and boundary conditions. A model example is the problem of vibrations of the rod after a longitudinal impact on the end (e. g., shooting a plasticine bullet sticking to the end of a rod).

Keywords: one-dimensional wave equation; inhomogeneous equation; mixed problem; discontinuous initial conditions; discontinuous boundary conditions; longitudinal impact; method of characteristics; Laplace transform.

Acknowledgements. This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the programme of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement No. 075-15-2022-284) and the National Academy of Sciences of Belarus (agreement No. 2023-25-019).

Введение

Уравнения с частными производными при наличии разрывных начальных и граничных условий довольно широко встречаются в различных приложениях, например при изучении ударных волн в среде [1]. Обычно подобные явления моделируются с помощью задачи Коши или смешанной задачи с разрывными условиями. Это приводит к трудностям в определениях и интерпретациях решений [2].

Такие задачи часто решаются с помощью преобразования Фурье [3–5], преобразования Лапласа [6–9] и иных интегральных и функциональных преобразований [10–19]. Однако эти методы не охватывают все возможные случаи задания условий Коши [20], поскольку обратные интегральные преобразования, как правило, сходятся к полусумме левостороннего и правостороннего пределов [21].

В настоящей статье рассмотрим одну задачу из теории механического удара по упругому однородному стержню. Решим ее двумя способами – с помощью преобразования Лапласа и методом характеристик. Эти подходы дадут отличающиеся решения, но найдем способ их согласовать. Также покажем, что имеется бесконечное множество различных вариантов определения классического решения задачи в силу неоднозначности выбора условий сопряжения на характеристике, однако в каждом из них решение существует, и оно единственно.

Простейшая задача

Постановка задачи. Рассмотрим простейшую задачу из теории механического удара. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ покоящийся стержень подвергся продольному удару грузом массой M по концу $x = 0$, который имеет упругое закрепление, причем в дальнейшем груз остается в соприкосновении со стержнем (т. е. удар является абсолютно неупругим). Кроме того, полагаем, что на стержень не действуют внешние объемные силы. Тогда, пренебрегая весом стержня как силой и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений u найдем решение смешанной задачи в замыкании $\overline{Q}$ области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2\right) u(t, x) = 0,\ 0 < t < \infty,\ 0 < x < \infty, \\ u(0, x) = 0,\ 0 \le x < \infty,\ \partial_t u(0, x) = \begin{cases} v,\ x = 0, \\ 0,\ x > 0, \end{cases} \\ \left(\partial_t^2 - b^2 \partial_x + c^2\right) u(t, 0) = 0,\ 0 \le t < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

В задаче (1) $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $b^2 = \dfrac{SE}{M}$, $c^2 = \dfrac{k}{M}$, где $E > 0$ – модуль упругости стержня; $\rho > 0$ – плотность материала стержня; $S > 0$ – площадь поперечного сечения стержня; $k > 0$ – коэффициент жесткости линейного упругого элемента, к которому прикреплен конец $x = 0$ стержня; v – скорость ударяющего груза. Кроме того, полагаем, что материал и поперечные размеры груза и стержня примерно одинаковые и удар центральный (груз не может ударить значительно выше или ниже центра поперечного сечения, так как иначе необходимо учитывать изгиб).

Следует отметить, что математически не имеет значения, какого знака величины b^2 и c^2. Несмотря на тот факт, что, исходя из физических предположений, $b^2 > 0$ и $c^2 > 0$, в дальнейшем задачи рассматриваются в общем виде независимо от знака величин b^2 и c^2.

Решение задачи с помощью преобразования Лапласа. Следуя работе [22], применим формально к задаче (1) преобразование Лапласа по переменной t

$$y(p, x) = \mathcal{L}[u](p, x) = \int_0^\infty u(t, x) \exp(-pt)\, dt.$$

Имеем

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](p, x) = pu(p, x) - u(0, x),\ \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](p, x) = \frac{\partial y}{\partial x}(p, x),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](p, x) = p^2 u(p, x) - pu(0, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(0, x),\ \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](p, x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(p, x).$$

Из вышеприведенных выражений видно, что внеинтегральные члены в формулах преобразования Лапласа для производных отбрасываются и данный метод является, по сути, эвристическим.

В таком случае получим спектральную задачу

$$\begin{cases} \left(p^2 - a^2 \partial_x^2\right) y(p, x) = 0,\ 0 < x < \infty, \\ \left(p^2 - b^2 \partial_x + c^2\right) y(p, 0) = v,\ y(p, \infty) = 0, \end{cases}$$

решение которой легко записывается в виде

$$y(p, x) = \frac{av}{ac^2 + b^2 p + ap^2} \exp\left(-\frac{px}{a}\right),\ 0 \le x < \infty.$$

Применив обратное преобразование Лапласа

$$u(t, x) = \mathcal{L}^{-1}[y](t, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} y(p, x) \exp(pt)\, dp,$$

получим решение исходной задачи (1) в виде

$$u(t, x) = \frac{2av}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \theta\left(t - \frac{x}{a}\right) \exp\left(\frac{b^2(x - at)}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(at - x)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right), \tag{2}$$

где θ – функция Хевисайда.

Отметим, что согласно формуле (2) при ударе в каждой точке в некоторый момент времени возникает скачок силы, движущийся вдоль стержня и проходящий через каждую точку мгновенно. Физически это, конечно, невозможно, так как удар имеет свою продолжительность, но в рамках данной задачи этим временем пренебрегаем.

Если $b^4 - 4a^2c^2 < 0$, то при любом выборе значения комплексного корня $\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}$ в формуле (2) получается одно и то же вещественное решение.

Решение задачи методом характеристик. Решая задачу (1) методом характеристик [23], получаем

$$u(t,\, x) = \begin{cases} 0,\ x - at \ge 0, \\ \dfrac{av}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}} \exp\left(\dfrac{b^2(x - at)}{2a^2}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{(at - x)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right),\ x - at < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Видно, что данное решение вдвое меньше, чем то решение, которое получается с помощью преобразования Лапласа. Возникает вопрос: «Почему это произошло и какое решение следует считать верным?» Однозначного ответа на указанный вопрос не существует. Так, например, в книге Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко относительно задачи Коши в классе разрывных функций сказано, что «различные процессы могут описываться одними и теми же дифференциальными уравнениями, но разными интегральными законами сохранения. Поэтому различие этих процессов проявляется лишь на разрывных решениях» [24, с. 507]. Вводя некоторое определение решения, «мы однозначно фиксируем интегральные законы сохранения» [24, с. 507]. Примерно такой же подход изложен в монографии Дж. Б. Уизема [25, p. 139], где также подчеркнута неединственность определения решения, но правильным предложено считать то решение, которое соответствует исходным физическим предположениям. Хотя там же отмечено, что чисто математически любое из полученных решений является корректно определенным. Некоторые причины возникновения неединственности проанализированы в публикации [26]. В статье [27] показано, что обобщение классических решений даже в простом случае второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения без потери общности может быть сделано бесконечным числом различных способов, но в каждом из таких случаев решение обобщенной задачи единственно. В работе [28] сформулированы идея свободы выбора пространств, в которых ищутся решения начально-краевых задач, и правила переформулировки всех требований задачи в соответствии с этим выбором.

Следует отметить, что в решении (3) нарушается закон сохранения импульса: ударяющий груз массой M в момент соприкосновения с концом упругого стержня мгновенно теряет половину скорости. По сути, это и есть иллюстрация вышеизложенного, несмотря на математически корректное построение решения.

Обобщение решения задачи методом характеристик

Рассмотрим детально построение решения задачи (1) методом характеристик. В работе [23] изучен более общий случай задачи (1), который имеет вид

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)u(t,\, x) = f(t,\, x),\ 0 < t < \infty,\ 0 < x < \infty, \\ u(0,\, x) = \varphi(x),\ 0 \le x < \infty,\ \partial_t u(0,\, x) = \begin{cases} \psi_1,\ x = 0, \\ \psi_2(x),\ x > 0, \end{cases} \\ \left(\partial_t^2 - b^2\partial_x + c^2\right)u(t,\, 0) = \begin{cases} \mu_1,\ t = 0, \\ \mu_2(t),\ t > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

Решение задачи (4) методом характеристик строится из решения вспомогательной аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)u(t,\, x) = f(t,\, x),\ 0 < t < \infty,\ 0 < x < \infty, \\ u(0,\, x) = \varphi(x),\ 0 \le x < \infty,\ \partial_t u(0,\, x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x),\ x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x),\ x > x^*, \end{cases} \\ \left(\partial_t^2 - b^2\partial_x + c^2\right)u(t,\, 0) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t),\ t < \dfrac{x^*}{a}, \\ \tilde{\mu}_2(t),\ t > \dfrac{x^*}{a}, \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

причем $x^* > 0$, $\tilde{\mu}_1(0) = \mu_1$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$, $\psi_2\big|_{[x^*,\,\infty)} = \tilde{\psi}_2$, $\mu_2\big|_{\left[\frac{x^*}{a},\,\infty\right)} = \tilde{\mu}_2$. В свою очередь, классическое решение задачи (5) определяется как классическое решение задачи с условиями сопряжения [23]: требуется найти классическое решение уравнения, удовлетворяющее условиям Коши, граничному условию, а также условиям сопряжения

$$\left[(u)^+ - (u)^-\right](t,\, x^* + at) = \left[(u)^+ - (u)^-\right](t,\, x^* - at) = 0, \tag{6}$$

$$\left[(u)^+ - (u)^-\right](t,\, at) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\, at) = 0, \tag{7}$$

$$\left[(u)^+ - (u)^-\right](t,\, at - x^*) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\, at - x^*) = 0. \tag{8}$$

Здесь использованы обозначения $()^{\pm}$, которые соответствуют предельным значениям функции u и ее производных $\partial_t^k \partial_x^p u$ с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е.

$$\left(\partial_t^k \partial_x^p u\right)^{\pm}(t,\, r(t)) = \lim_{\Delta t \to 0+} \partial_t^k \partial_x^p u(t,\, r(t) \pm \Delta t),$$

где $k \geq 0$, $p \geq 0$ и r есть функция действительного переменного.

Возникает вопрос: «Почему взяты именно эти условия согласования?» Их выбор обусловливается следующими факторами.

1. Условие (6) задается так, чтобы решение было непрерывным. Другой выбор условий сопряжения на характеристиках $x = x^* \pm at$ не позволяет удовлетворить условия Коши.

2. Условие (7) берется по тем же причинам.

3. Первое из условий (8) выбирается, исходя из требования непрерывности решения, тогда как обоснование второго из условий (8) отсутствует. Оно просто взято, чтобы функция была непрерывно-дифференцируемой при переходе через характеристику $x - at = -x^*$. Но существуют и другие варианты задания этого условия. Например, можно потребовать, чтобы изменения скорости $\partial_t u$ на характеристиках $x = at \pm x^*$ были одинаковыми, как это сделано в работе [29, с. 70–73], т. е.

$$\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\, at - x^*) = \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\, at + x^*). \tag{9}$$

Но математически, не теряя общности, лучше было бы выбрать

$$\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\, at - x^*) = C^{(1)}, \tag{10}$$

где $C^{(1)}$ – некоторая константа, вычисляемая из физических соображений, которые представлены в различных работах по теории удара и механике сплошных сред [1; 30–32].

Решение такой задачи будет единственным. Из него можно получить решение задачи (4) предельным переходом. Оно существует только при выполнении равенства $f(0,\, 0) - \tilde{\mu}_1(0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) - b^2D\varphi(0) = 0$ и удовлетворяет условиям согласования

$$\left[(u)^+ - (u)^-\right](t,\, at) = 0,\ \left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\, at) = C^{(1)} + \frac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2}.$$

Если выбрать $C^{(1)} = \dfrac{\psi_2(0+) - \psi_1}{2}$, то это решение будет согласовано с тем решением, которое было получено с помощью преобразования Лапласа в простейшем случае.

Основной результат

Теперь строго обоснуем рассуждения предыдущего абзаца.

Определение 1. Непрерывную функцию u назовем классическим решением задачи (5), если функция u является дважды непрерывно-дифференцируемой и удовлетворяет уравнению $\left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)u(t,\, x) = f(t,\, x)$ всюду, за исключением характеристик $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ и $x + at = x^*$, первому начальному условию $u(0,\, x) = \varphi(x)$, $x \geq 0$, второму условию Коши

$$\partial_t u(0,\, x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x),\ x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x),\ x > x^*, \end{cases} \tag{11}$$

на множестве $\left[0, x^*\right) \cup \left(x^*, \infty\right)$ и граничному условию

$$\left(\partial_t^2 - b^2\partial_x + c^2\right)u(t, 0) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \tilde{\mu}_1(t), \ t < \dfrac{x^*}{a}, \\ \tilde{\mu}_2(t), \ t > \dfrac{x^*}{a}, \end{cases} \tag{12}$$

на множестве $\left[0, \dfrac{x^*}{a}\right) \cup \left(\dfrac{x^*}{a}, \infty\right)$. Кроме того, функция u на характеристиках $x - at = 0$, $x - at = \pm x^*$ и $x + at = x^*$ удовлетворяет условиям сопряжения (6), (7), (10).

Определение 2. Непрерывную функцию u назовем классическим решением задачи (4), если она и ее частные производные первого и второго порядка (там, где существуют) являются поточечным пределом классических решений задачи (4) и их частных производных соответственно при $x^* \to 0$.

Замечание 1. Определение 1 данной работы отличается от определения 1, приведенного в статье [23], поскольку условия сопряжения (6), (7), (10) отличаются от условий сопряжения в публикации [23].

Теорема 1. *Если выполняются условия гладкости* $f \in C^1\left(\bar{Q}\right)$, $\varphi \in C^2\left(\left[0, \infty\right)\right)$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1\left(\left[0, x^*\right]\right)$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1\left(\left[x^*, \infty\right)\right)$, $\tilde{\mu}_1 \in C^1\left(\left[0, \dfrac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2 \in C^1\left(\left[\dfrac{x^*}{a}, \infty\right)\right)$ *для заданных функций, то существует единственное классическое решение задачи (5) в смысле определения 1.*

Доказательство. 1. Сначала докажем существование данного решения. Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [33]. Пусть $w : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ и $\partial_t^2 w(0, x) = f(0, x)$. Такое решение w существует [28; 33; 34], и оно имеет вид [34]

$$w(t, x) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f\left(\tau, |\xi|\right) d\xi.$$

Если $f \in C^1\left(\bar{Q}\right)$, то $w \in C^2\left(\bar{Q}\right)$.

Тогда общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(t, x) = w(t, x) + g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at), \tag{13}$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые почти всюду дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Удовлетворяя условия Коши, получаем формулы

$$\begin{gathered} g^{(1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi + C_1, \ x \in \left(0, x^*\right), \\ g^{(2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi - C_1, \ x \in \left(0, x^*\right), \\ g^{(1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi + C_2, \ x \in \left(x^*, \infty\right), \\ g^{(2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi - C_2, \ x \in \left(x^*, \infty\right), \end{gathered} \tag{14}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Из условия сопряжения (6) следует, что $C_1 = C_2$.

Согласно представлению (13) и граничному условию (12)

$$\left(\partial_t^2 - b^2\partial_x + c^2\right)u(t, 0) = -b^2\left(\partial_x w(t, 0) + Dg^{(1)}(-at) + Dg^{(2)}(at)\right) + \partial_t^2 w(t, 0) +$$

$$+ c^2\left(w(t, 0) + g^{(1)}(-at) + g^{(2)}(at)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1)}(-at) + D^2 g^{(2)}(at)\right) = \tilde{\mu}_1(t), \ t \in \left(0, \frac{x^*}{a}\right).$$

Отсюда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $g^{(1)}$ на отрезке $\left[-x^*, 0\right]$

$$c^2\left(w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + g^{(1)}(z) + g^{(2)}(-z)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1)}(z) + D^2 g^{(2)}(-z)\right) -$$

$$- b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + Dg^{(1)}(z) + Dg^{(2)}(-z)\right) = \tilde{\mu}_1\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a}, 0\right),\ z \in \left(-x^*, 0\right). \tag{15}$$

Учитывая условие сопряжения (7), должны выполняться условия

$$g^{(1)}(0-) = \varphi^{(0)} = g^{(1)}(0+) = C_1 + \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*} \tilde{\psi}_1(\xi)\,d\xi,$$

$$Dg^{(1)}(0-) = \psi^{(0)} = Dg^{(1)}(0+) = \frac{1}{2}D\varphi(0) - \frac{1}{2a}\tilde{\psi}_1(0). \tag{16}$$

Уравнение (15) относительно функции $g^{(1)}$ вместе с условиями (16) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Решая эту задачу, получаем

$$g^{(1)}(z) = \exp\left(\frac{b^2 z}{2a^2}\right)\left(\varphi^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{2a^2\psi^{(0)} - b^2\varphi^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{z\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$

$$+ \int_0^z \frac{2\mathcal{M}(\xi)}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2(z-\xi)}{2a^2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{(z-\xi)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi,\ z \in \left(-x^*, 0\right), \tag{17}$$

где

$$\mathcal{M}(z) = \tilde{\mu}\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + Dg^{(2)}(-z)\right) -$$

$$- c^2\left(w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + g^{(2)}(-z)\right) - a^2 D^2 g^{(2)}(-z),\ z \in (-\infty, 0).$$

В целях получения обыкновенного дифференциального уравнения для определения функции $g^{(1)}$ на луче $\left(-\infty, -x^*\right]$ воспользуемся граничным условием (12). В результате имеем

$$c^2\left(w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + g^{(1)}(z) + g^{(2)}(-z)\right) + a^2\left(D^2 g^{(1)}(z) + D^2 g^{(2)}(-z)\right) -$$

$$- b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) + Dg^{(1)}(z) + Dg^{(2)}(-z)\right) = \tilde{\mu}_2\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a}, 0\right),\ z \in \left(-\infty, -x^*\right). \tag{18}$$

Условия Коши в этом случае найдем, исходя из условия согласования (10). Они примут вид

$$g^{(1)}\left(-x^* - 0\right) = \varphi_2^{(0)} = g^{(1)}\left(-x^* + 0\right),$$

$$Dg^{(1)}\left(-x^* - 0\right) = \psi_2^{(0)} = \frac{C^{(1)}}{a} + Dg^{(1)}\left(-x^* + 0\right). \tag{19}$$

Величины $g^{(1)}\left(-x^* + 0\right)$ и $Dg^{(1)}\left(-x^* + 0\right)$ вычисляются по формуле (17). Решая задачу Коши (18), (19) относительно функции $g^{(1)}$, получаем

$$g^{(1)}(z) = \exp\left(\frac{b^2\left(z + x^*\right)}{2a^2}\right) \times$$

$$\times\left(\varphi_2^{(0)}\mathrm{ch}\left(\frac{\left(z + x^*\right)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right) + \frac{2a^2\psi_2^{(0)} - b^2\varphi_2^{(0)}}{\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}\mathrm{sh}\left(\frac{\left(z + x^*\right)\sqrt{b^4 - 4a^2c^2}}{2a^2}\right)\right) +$$

$$+\int_{-x^*}^{z}\frac{2\mathcal{M}(\xi)}{\sqrt{b^4-4a^2c^2}}\exp\left(\frac{b^2(z-\xi)}{2a^2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{(z-\xi)\sqrt{b^4-4a^2c^2}}{2a^2}\right)d\xi,\ z\in\left(-\infty,\ -x^*\right). \tag{20}$$

Таким образом, согласно формулам (14), (17) и (20), поскольку функция $g^{(1)}$ была определена для всех действительных чисел, а функция $g^{(2)}$ – для положительных чисел, то построена функция u, определенная соотношением (13) на всем первом квадранте плоскости. Но при построении были введены константы C_1 и C_2. Покажем, что функция u, заданная формулами (13), (14), (17) и (20), не зависит от выбора констант интегрирования C_1 и $C_1 = C_2$. Из представлений (13), (14), (17) и (20) следует, что функция u является непрерывно-дифференцируемой, если рассматривать ее как функцию от констант C_1 и C_2. Теперь, подставляя выражения (14), (17) и (20) и равенство $C_1 = C_2$ в соотношение (13), получаем

$$\frac{\partial\left(u\big|_{C_1=C_2}\right)}{\partial C_2}=0.$$

Таким образом, функция u, заданная формулами (13), (14), (17) и (20), не зависит от выбора константы $C^{(1)}$. Здесь было использовано обозначение $\tilde{v}=v\big|_{X=\beta}$ – применение функции к части аргументов, которое преобразует функцию $v: X\times Y\ni(x,\ y)\mapsto z\in Z$ в функцию $\tilde{v}: Y\ni y\mapsto z\in Z$ по формуле $\tilde{v}(y)=v(\beta,\ y)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция u удовлетворяет уравнению (1) и условиям (6), (7), (10)–(12), т. е. является решением исходной задачи в смысле определения 1.

2. Теперь докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения – u_1 и u_2. Тогда можно показать, что их разность $U = u_1 - u_2$ является функцией класса $C^2\left(\bar{Q}\right)$ и удовлетворяет смешанной задаче

$$\begin{cases}\left(\partial_t^2-a^2\partial_x^2\right)U(t,\ x)=0,\ 0<t<\infty,\ 0<x<\infty,\\ U(0,\ x)=\partial_t U(0,\ x)=0,\ 0\le x<\infty,\\ \left(\partial_t^2-b^2\partial_x+c^2\right)U(t,\ 0)=0,\ 0\le t<\infty.\end{cases}$$

В свою очередь, решение $U\equiv 0$ такой задачи единственно [35; 36] в классе $C^2\left(\bar{Q}\right)$. Отсюда следует, что $u_1 - u_2 = 0$.

Для построения решения можно было воспользоваться тем фактом, что оно представляет собой совокупность решений задач Коши, Гурса и Пикара. При таком подходе единственность вытекает из построения, поскольку решение полученных задач определяется единственным образом (для задачи Коши см. [28; 33], для задачи Гурса см. [33; 37–39], а для задачи Пикара см. [23; 35; 36; 40]).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия гладкости* $f\in C^1\left(\bar{Q}\right)$, $\varphi\in C^2\left([0,\ \infty)\right)$, $\psi_2\in C^1\left([0,\ \infty)\right)$, $\mu_2\in C^1\left([0,\ \infty)\right)$ *для заданных функций. Тогда решение задачи (4) в смысле определения 2 существует и является единственным тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования* $\mu_1 = f(0,\ 0) + c^2\varphi(0) + a^2D^2\varphi(0) - b^2D\varphi(0)$.

Доказательство. Необходимо повторить рассуждения статей [23; 41–43].

Замечание 2. Если в задачах (4) и (5) $c = 0$, то в теоремах 1 и 2 можно понизить требования гладкости $\tilde{\mu}_1\in C^1\left(\left[0,\ \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2\in C^1\left(\left[\frac{x^*}{a},\ \infty\right)\right)$ и $\mu_2\in C^1\left([0,\ \infty)\right)$ до $\tilde{\mu}_1\in C\left(\left[0,\ \frac{x^*}{a}\right]\right)$, $\tilde{\mu}_2\in C\left(\left[\frac{x^*}{a},\ \infty\right)\right)$ и $\mu_2\in C\left([0,\ \infty)\right)$ соответственно. Обоснование данного факта фактически представлено в работе [41].

О выборе константы в условии сопряжения

В начале ударного процесса на отрезке $\left[0,\ x^*\right]$ сформирована ударная волна (рис. 1).

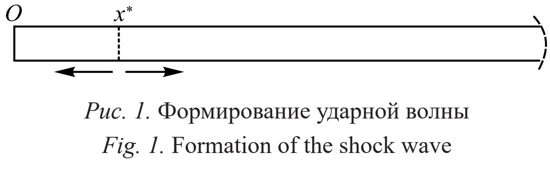

Рис. 1. Формирование ударной волны

Fig. 1. Formation of the shock wave

Из точки x^* ударная волна начинает распространяться в сторону ∞ (прямая волна) и в сторону точки O (обратная волна) (рис. 2).

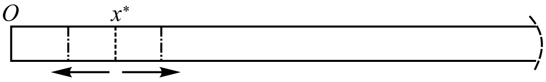

Рис. 2. Распространение ударной волны
Fig. 2. Propagation of the shock wave

При $t = \frac{x^*}{a}$ обратная волна достигает точки O и создает волну в противоположном направлении, т. е. еще одну прямую волну (рис. 3).

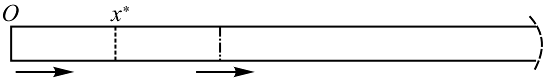

Рис. 3. Формирование отраженной ударной волны
Fig. 3. Formation of the reflected shock wave

Отраженная волна в силу физических свойств должна распространяться (рис. 4) с такой же скоростью (с таким же разрывом скоростей), что и исходная волна, порожденная ударным процессом, так как в упругих однородных стержнях ударные волны распространяются с одинаковыми скоростями [1; 32]. Это влечет условие сопряжения (9).

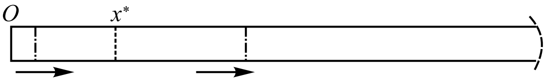

Рис. 4. Распространение исходной и отраженной ударных волн
Fig. 4. Propagation of the original and reflected shock waves

В работе [32] приведена явная формула для расчета разрыва напряжения при ударе

$$\left[(\sigma)^+ - (\sigma)^-\right] = v\rho c, \tag{21}$$

где σ – напряжение в сечении стержня; v – скорость ударившего груза; ρ – плотность материала; $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – стандартная скорость распространения напряженного состояния вдоль стержня (постоянная величина в данном случае). Применяя закон Гука в виде $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга, а $\varepsilon = \partial_x u$ – деформация стержня, записываем выражение (21) в виде

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\right] = \frac{v\rho c}{E} = \frac{v}{a} = \text{const}. \tag{22}$$

Таким образом, с одной стороны, чисто физически вместо условия сопряжения (9) лучше взять условие

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\right](t,\ at - x^*) = \left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\right](t,\ at + x^*). \tag{23}$$

Оно является корректно заданным, поскольку из волнового уравнения, условия сопряжения (6) и формул (13) и (14) следует равенство

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\right](t,\ at + x^*) = \frac{\tilde{\psi}_1(x^*) - \tilde{\psi}_2(x^*)}{2a}.$$

С другой стороны, исходя из общего решения волнового уравнения (13), при хотя бы непрерывно-дифференцируемом частном решении w можем вычислить

$$\begin{gathered} \partial_t u(t,\ x) = \partial_t w(t,\ x) - aDg^{(1)}(x - at) + aDg^{(2)}(x + at), \\ \partial_x u(t,\ x) = \partial_x w(t,\ x) + Dg^{(1)}(x - at) + Dg^{(2)}(x + at). \end{gathered} \tag{24}$$

Отсюда следуют равенства

$$\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\right](t,\ at \pm x^*) = -a\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t,\ at \pm x^*).$$

Это позволяет говорить о некоторой физической эквивалентности условий сопряжения (23) и (9). Хотя для вывода условия (9) воспользовались условием (23), непрерывностью функции f и общим решением волнового уравнения.

В предельном случае задачи (5), исходя из формул (24) и (10), можем вычислить

$$\left[\left(\partial_x u\right)^+ - \left(\partial_x u\right)^-\right]\left(t,\ at\right) = \left(\frac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \frac{\psi_2\left(0+\right)}{2}\right)a^{-1}. \tag{25}$$

Сравнивая формулы (25) и (23), приходим к выводу, что величина $\frac{\psi_1}{2} - C^{(1)} - \frac{\psi_2\left(0+\right)}{2}$ равна скорости ударившего груза. Это говорит о том, что если мы хотим, чтобы величина $\psi_2\left(0+\right) - \psi_1$ численно равнялась скорости ударившего груза, то следует выбрать $C^{(1)} = \frac{\psi_2\left(0+\right) - \psi_1}{2}$.

Заключение

Рассмотрены два различных подхода (на основе метода характеристик и преобразования Лапласа) к определению решения смешанной задачи с разрывными условиями. Показано, что метод характеристик позволяет получить больше решений за счет варьирования условий согласования. Но в каждом конкретном случае будет существовать единственное классическое решение. Также отметим, что при решении задач с разрывными условиями интегральные преобразования не всегда применимы, тогда как метод характеристик избавлен от этих проблем.

Библиографические ссылки

1. Журавков МА, Старовойтов ЭИ. *Математические модели механики твердых тел.* Минск: БГУ; 2021. 535 с. (Классическое университетское издание).

2. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* Шугаев ФВ, переводчик; Белоцерковский ОМ, редактор. Москва: Наука; 1978. 352 с.

3. Babeshko VA, Ratner SV, Syromyatnikov PV. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics.* 2007;52(2):90–95. DOI: 10.1134/s102833580702005x.

4. Глушко АВ, Баева СА. Об одной начально-краевой задаче гидродинамики с разрывными граничными условиями. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2005;2:128–132.

5. Trogdon T, Biondini G. Evolution partial differential equations with discontinuous data. *Quarterly of Applied Mathematics.* 2019;77(4):689–726. DOI: 10.1090/qam/1526.

6. Kozlov VP, Mandrik PA, Yurchuk NI. Method for solving nonstationary heat problems with mixed discontinuous boundary conditions on the boundary of a half-space. *Differential Equations.* 2001;37(8):1171–1175. DOI: 10.1023/A:1012431821479.

7. Kozlov VP, Mandrik PA. Solution of nonlinear two-dimensional differential equations of transfer with discontinuity boundary conditions on the surface of an isotropic semiinfinite body in its heating through a circle of known radius. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2001;74(2):471–476. DOI: 10.1023/A:1016685329003.

8. Гайдук СИ, Добрушкин ВА. Решение одной задачи из теории термоупругости, связанной с механическим и тепловым ударами. *Дифференциальные уравнения.* 1979;15(9):1632–1645.

9. Cerv J, Adamek V, Vales F, Gabriel D, Plesek J. Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact. *Wave Motion.* 2016;66:88–105. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2016.05.007.

10. Yurchuk NI, Kozlov VP, Mandrik PA. A method of paired integral equations in the region of laplace transforms for solving nonstationary heat conduction problems with mixed discontinuous boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 1999;72(3):534–549. DOI: 10.1007/BF02699221.

11. Kozlov VP, Yurchuk NI, Mandrik PA. Method of paired integral equations in the region of L-transforms for solving two-dimensional problems of nonstationary heat conduction with mixed boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 1998;71(4):731–739. DOI: 10.1007/BF03449555.

12. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Задача о продольном ударе по упругому стержню с упругим закреплением одного из концов. В: Гусев ОК, Воробей РИ, Гуревич ВЛ, Князев МА, Кулешов НВ, Маляревич АМ и др., редакторы. *Приборостроение-2022. Материалы 15-й Международной научно-технической конференции; 16–18 ноября 2022 г.; Минск, Беларусь = Instrumentation Engineering – 2022. Proceedings of the 15th International scientific and technical conference; 2022 November 16–18; Minsk, Belarus.* Минск: Белорусский национальный технический университет; 2022. с. 305–307.

13. Бахшинян РМ, Вейнерт ЯВ, Денисова ИВ. Об одном методе решения задачи нестационарной теплопроводности шара с разрывными граничными условиями. В: Шульга ОА, Ахметова МН, Иванова ЮВ, Лактионов КС, Комогорцев МГ, Ахметова ВВ и др., редакторы. *Технические науки: теория и практика. Материалы Международной заочной научной конференции; апрель 2012 г.; Чита, Россия.* Чита: Молодой ученый; 2012. с. 120–123.

14. Gaiduk SI. Application of the contour integral method to the solution of a problem on transverse vibrations of a viscoelastic membrane caused by an impact. *Differential Equations.* 1991;27(8):977–985.

15. Akhondizadeh M. Analytical solution of the longitudinal wave propagation due to the single impact. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control.* 2018;37(4):849–858. DOI: 10.1177/1461348418793122.

16. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Beating in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Mechanics of Solids.* 2015;50(4):451–462. DOI: 10.3103/s0025654415040111.

17. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Parametric resonances in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics.* 2016;49(1):53–67. DOI: 10.3103/s1063454116010040.

18. Valeš F, Morávka Š, Brepta R, Červ J. Wave propagation in a thick cylindrical bar due to longitudinal impact. *JSME International Journal. Series A, Solid Mechanics and Material Engineering.* 1996;39(1):60–70. DOI: 10.1299/jsmea1993.39.1_60.

19. Yurko V. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions.* 2000;10(2):141–164. DOI: 10.1080/10652460008819282.

20. Bateman H. Physical problems with discontinuous initial conditions. *PNAS.* 1930;16(3):205–211. DOI: 10.1073/pnas.16.3.205.

21. Polyanin AD. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists.* New York: Chapman & Hall/CRC; 2001. 800 p. DOI: 10.1201/9781420035322.

22. Пикулин ВП, Похожаев СИ. *Практический курс по уравнениям математической физики.* 2-е издание. Москва: МЦНМО; 2004. 208 с.

23. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню с линейным упругим элементом на конце. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:34–46. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-34-46.

24. Рождественский БЛ, Яненко НН. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* 2-е издание. Москва: Наука; 1978. 688 с.

25. Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*. New York: John Wiley & Sons; 1999. XVI, 636 p. (Pure and applied mathematics; volume 1237). DOI: 10.1002/9781118032954.

26. Куликовский АГ, Свешникова ЕИ, Чугайнова АП. *Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений.* Москва: МИАН; 2010. 120 с. (Лекционные курсы НОЦ; выпуск 16). DOI: 10.4213/lkn16.

27. Ладыженская ОА. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье – Стокса, существование и гладкость. *Успехи математических наук.* 2003;58(2):45–78. DOI: 10.4213/rm610.

28. Корзюк ВИ, Козловская ИС. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Часть 2.* Минск: БГУ; 2017. 48 с.

29. Кошляков НС, Глинер ЭБ, Смирнов ММ. *Уравнения в частных производных математической физики.* Москва: Высшая школа; 1970. 712 с.

30. Новацкий ВК. *Волновые задачи теории пластичности.* Шачнев ВА, переводчик; Шапиро ГС, редактор. Москва: Мир; 1978. 307 с.

31. Горбач НИ. *Теоретическая механика. Динамика.* 2-е издание. Минск: Вышэйшая школа; 2012. 320 с.

32. Работнов ЮН. *Механика деформируемого твердого тела.* Москва: Наука; 1979. 744 с.

33. Корзюк ВИ. *Уравнения математической физики.* 2-е издание. Москва: URSS; 2021. 480 с.

34. Юрчук НИ, Новиков ЕН. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2016;4:116–120.

35. Ломовцев ФЕ, Лысенко ВВ. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. *Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.* 2019;3:5–17.

36. Лысенко ВВ, Ломовцев ФЕ. Решение и критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны при нехарактеристических и нестационарных вторых производных на границе. В: Деменчук АК, Красовский СГ, Макаров ЕК, редакторы. *Еругинские чтения – 2019. Материалы XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 14–17 мая 2019 г.; Могилёв, Беларусь. Часть 2.* Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2019. с. 30–32.

37. Корзюк ВИ, Ковнацкая ОА. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(2):148–155. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155.

38. Корзюк ВИ, Ковнацкая ОА. Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения. В: Амелькин ВВ, Антоневич АБ, Астровский АИ, Башун СЮ, Васьковский ММ, Гладков АЛ и др., редакторы. *Еругинские чтения – 2022. Материалы XX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 31 мая – 3 июня 2022 г.; Новополоцк, Беларусь. Часть 2.* Новополоцк: Полоцкий государственный университет; 2022. с. 16–17.

39. Korzyuk VI, Stolyarchuk II. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients. *Differential Equations.* 2017;53(1):74–85. DOI: 10.1134/s0012266117010074.

40. Корзюк ВИ, Наумовец СН, Сериков ВП. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2020;56(3):287–297. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297.

41. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(4):417–427. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.

42. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2021;57(1):23–32. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.

43. Корзюк ВИ, Рудько ЯВ. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с негладким вторым условием Коши. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2020;64(6):657–662. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

References

1. Zhuravkov MA, Starovoitov EI. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid mechanics]. Minsk: Belarusian State University; 2021. 535 p. (Klassicheskoe universitetskoe izdanie). Russian.

2. Hadamard J. *Zadacha Koshi dlya lineinykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Cauchy's problem for linear partial differential equations of hyperbolic type]. Shugaev FV, translator; Belotserkovskii OM, editor. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. Russian.

3. Babeshko VA, Ratner SV, Syromyatnikov PV. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics.* 2007;52(2):90–95. DOI: 10.1134/s102833580702005x.

4. Glushko AV, Baeva SA. Upon an initial-boundary value hydrodynamic problem with discontinuous boundary conditions. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2005;2:128–132. Russian.

5. Trogdon T, Biondini G. Evolution partial differential equations with discontinuous data. *Quarterly of Applied Mathematics.* 2019;77(4):689–726. DOI: 10.1090/qam/1526.

6. Kozlov VP, Mandrik PA, Yurchuk NI. Method for solving nonstationary heat problems with mixed discontinuous boundary conditions on the boundary of a half-space. *Differential Equations.* 2001;37(8):1171–1175. DOI: 10.1023/A:1012431821479.

7. Kozlov VP, Mandrik PA. Solution of nonlinear two-dimensional differential equations of transfer with discontinuity boundary conditions on the surface of an isotropic semiinfinite body in its heating through a circle of known radius. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2001;74(2):471–476. DOI: 10.1023/A:1016685329003.

8. Gaiduk SI, Dobrushkin VA. [Solution of a problem in the theory of thermoelasticity related to mechanical and thermal impacts]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1979;15(9):1632–1645. Russian.

9. Cerv J, Adamek V, Vales F, Gabriel D, Plesek J. Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact. *Wave Motion.* 2016;66:88–105. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2016.05.007.

10. Yurchuk NI, Kozlov VP, Mandrik PA. A method of paired integral equations in the region of laplace transforms for solving nonstationary heat conduction problems with mixed discontinuous boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 1999;72(3):534–549. DOI: 10.1007/BF02699221.

11. Kozlov VP, Yurchuk NI, Mandrik PA. Method of paired integral equations in the region of L-transforms for solving two-dimensional problems of nonstationary heat conduction with mixed boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 1998;71(4):731–739. DOI: 10.1007/BF03449555.

12. Korzyuk VI, Rudzko JV. The problem of a longitudinal impact on an elastic bar with an elastic attachment of one of its ends. In: Gusev OK, Vorobei RI, Gurevich VL, Knyazev MA, Kuleshov NV, Malyarevich AM, et al., editors. *Instrumentation Engineering – 2022. Proceedings of the 15th International scientific and technical conference; 2022 November 16–18; Minsk, Belarus.* Minsk: Belarusian National Technical University; 2022. p. 305–307. Russian.

13. Bakhshinyan RM, Veinert YaV, Denisova IV. [On a method for solving the problem of nonstationary heat conduction of a ball with discontinuous boundary conditions]. In: Shul'ga OA, Akhmetova MN, Ivanova YuV, Laktionov KS, Komogortsev MG, Akhmetova VV, et al., editors. *Tekhnicheskie nauki: teoriya i praktika. Materialy Mezhdunarodnoi zaochnoi nauchnoi konferentsii; aprel' 2012 g.; Chita, Rossiya* [Technical sciences: theory and practice. Proceedings of the International correspondence scientific conference; April 2012; Chita, Russia]. Chita: Molodoi uchenyi; 2012. p. 120–123. Russian.

14. Gaiduk SI. Application of the contour integral method to the solution of a problem on transverse vibrations of a viscoelastic membrane caused by an impact. *Differential Equations.* 1991;27(8):977–985.

15. Akhondizadeh M. Analytical solution of the longitudinal wave propagation due to the single impact. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control.* 2018;37(4):849–858. DOI: 10.1177/1461348418793122.

16. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Beating in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Mechanics of Solids.* 2015;50(4):451–462. DOI: 10.3103/s0025654415040111.

17. Belyaev AK, Morozov NF, Tovstik PE, Tovstik TP. Parametric resonances in the problem of longitudinal impact on a thin rod. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics.* 2016;49(1):53–67. DOI: 10.3103/s1063454116010040.

18. Valeš F, Morávka Š, Brepta R, Červ J. Wave propagation in a thick cylindrical bar due to longitudinal impact. *JSME International Journal. Series A, Solid Mechanics and Material Engineering.* 1996;39(1):60–70. DOI: 10.1299/jsmea1993.39.1_60.

19. Yurko V. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions.* 2000;10(2):141–164. DOI: 10.1080/10652460008819282.

20. Bateman H. Physical problems with discontinuous initial conditions. *PNAS.* 1930;16(3):205–211. DOI: 10.1073/pnas.16.3.205.

21. Polyanin AD. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists.* New York: Chapman & Hall/CRC; 2001. 800 p. DOI: 10.1201/9781420035322.

22. Pikulin VP, Pokhozhaev SI. *Prakticheskii kurs po uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Equations in mathematical physics: a practical course]. 2nd edition. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education; 2004. 208 p. Russian.

23. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of one problem of a perfectly inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar with a linear elastic element at the end. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:34–46. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-34-46.

24. Rozhdestvenskii BL, Yanenko NN. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1978. 688 p. Russian.

25. Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*. New York: John Wiley & Sons; 1999. XVI, 636 p. (Pure and applied mathematics; volume 1237). DOI: 10.1002/9781118032954.

26. Kulikovskii AG, Sveshnikova EI, Chugainova AP. *Matematicheskie metody izucheniya razryvnykh reshenii nelineinykh giperbolicheskikh sistem uravnenii* [Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations]. Moscow: Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences; 2010. 120 p. (Lektsionnye kursy NOTs; issue 16). Russian. DOI: 10.4213/lkn16.

27. Ladyzhenskaya OA. [Sixth problem of the millennium: Navier – Stokes equations, existence and smoothness]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 2003;58(2):45–78. Russian. DOI: 10.4213/rm610.

28. Korzyuk VI, Kozlovskaya IS. *Klassicheskie resheniya zadach dlya giperbolicheskikh uravnenii. Chast' 2* [Classical solutions of problems for hyperbolic equations. Part 2]. Minsk: Belarusian State University; 2017. 48 p. Russian.

29. Koshlyakov NS, Gliner EB, Smirnov MM. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola; 1970. 712 p. Russian.

30. Nowacki WK. *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe; 1974. 207 s. (Biblioteka mechaniki stosowanej).

Russian edition: Nowacki WK. *Volnovye zadachi teorii plastichnosti.* Shachnev VA, translator; Shapiro GS, editor. Moscow: Mir; 1978. 307 p.

31. Gorbach NI. *Teoreticheskaya mekhanika. Dinamika* [Theoretical mechanics. Dynamics]. 2nd edition. Minsk: Vyshjejshaja shkola; 2012. 320 p. Russian.

32. Rabotnov YuN. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid]. Moscow: Nauka; 1979. 744 p. Russian.

33. Korzyuk VI. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. 2nd edition. Moscow: URSS; 2021. 480 p. Russian.

34. Yurchuk NI, Novikov EN. Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2016;4:116–120. Russian.

35. Lomovtsev FE, Lysenko VV. Non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta.* 2019;3:5–17. Russian.

36. Lysenko VV, Lomovtsev FE. [Solution and well-posedness criterion for a mixed problem for the general equation of vibrations of a semi-bounded string with non-characteristic and non-stationary second derivatives on the boundary]. In: Demenchuk AK, Krasovskii SG, Makarov EK, editors. *Eruginskie chteniya – 2019. Materialy XIX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 14–17 maya 2019 g.; Mogilev, Belarus'. Chast' 2* [Erugin readings – 2019. Proceedings of the 19th International scientific conference on differential equations; 2019 May 14–17; Mogilev, Belarus. Part 2]. Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus; 2019. p. 30–32. Russian.

37. Korzyuk VI, Kovnatskaya OA. Solutions of problems for the wave equation with conditions on the characteristics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021;57(2):148–155. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155.

38. Korzyuk VI, Kovnatskaya OA. [The Goursat problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation]. In: Amel'kin VV, Antonevich AB, Astrovskii AI, Bashun SYu, Vas'kovskii MM, Gladkov AL, et al., editors. *Eruginskie chteniya – 2022. Materialy XX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 31 maya – 3 iyunya 2022 g.; Novopolotsk, Belarus'. Chast' 2* [Erugin readings – 2022. Proceedings of the 20th International scientific conference on differential equations; 2022 May 31 – June 3; Novopolotsk, Belarus. Part 2]. Novopolotsk: Polotsk State University; 2022. p. 16–17. Russian.

39. Korzyuk VI, Stolyarchuk II. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients. *Differential Equations.* 2017;53(1):74–85. DOI: 10.1134/s0012266117010074.

40. Korzyuk VI, Naumavets SN, Serikov VP. Mixed problem for a one-dimensional wave equation with conjugation conditions and second-order derivatives in boundary conditions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2020;56(3):287–297. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297.

41. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of one problem of an absolutely inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021;57(4):417–427. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427.

42. Korzyuk VI, Rudzko JV. The classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the non-smooth second initial condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2021; 57(1):23–32. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32.

43. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the nonsmooth second initial condition. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2020;64(6):657–662. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2020-64-6-657-662.

Получена 24.01.2023 / исправлена 14.10.2023 / принята 17.10.2023.
Received 24.01.2023 / revised 14.10.2023 / accepted 17.10.2023.