

УДК 519.642.7

## К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО<sup>1)</sup>, С. М. ШЕШКО<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрено сингулярное интегральное уравнение с логарифмической особенностью, использующееся в математической модели рассеяния электромагнитных волн. Для численного анализа его решений из разных функциональных классов Мухелишвили построены три вычислительные схемы, основанные на представлении части искомой функции в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода. После небольших преобразований и применения известных спектральных соотношений для сингулярного интеграла получены простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышева найдены как решение соответствующих систем линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 15–20 узлов погрешность приближенного решения не превышает вычислительной погрешности.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение; численное решение; метод ортогональных многочленов.

---

### Образец цитирования:

Расолько ГА, Шешко СМ. К численному решению слабосингулярного интегрального уравнения второго рода методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023; 2:55–62.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-55-62>

EDN: FFDWPC

### For citation:

Rasolko GA, Sheshko SM. On the numerical solution to a weakly singular integral equation of the second kind by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:55–62. Russian.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-55-62>

EDN: FFDWPC

---

### Авторы:

**Галина Алексеевна Расолько** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

**Сергей Михайлович Шешко** – старший преподаватель кафедры цифровой экономики экономического факультета.

### Authors:

**Galina A. Rasolko**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics. [rasolka@bsu.by](mailto:rasolka@bsu.by)

<https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

**Sergei M. Sheshko**, senior lecturer at the department of digital economy, faculty of economics.

[sheshkasm@bsu.by](mailto:sheshkasm@bsu.by)

<https://orcid.org/0000-0001-6366-4961>

## ON THE NUMERICAL SOLUTION TO A WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO<sup>a</sup>, S. M. SHESHKO<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: S. M. Sheshko (sheshkasm@bsu.by)

It is considered a singular integral equation with a logarithmic singularity. Such equations are used in the mathematical model of electromagnetic wave scattering. Three computational schemes are constructed for the numerical analysis of its solutions from different Muskhelishvili functional classes. They are based on the representation of a part of the determined function as a linear combination of Chebyshev polynomials of the first kind. After minor transformations and application of the known spectral relations for the singular integral, simple analytical expressions for the singular component of the equation are obtained. The solution is expanded in the basis of Chebyshev polynomials. The expansion coefficients are calculated as the solution of the corresponding systems of linear algebraic equations. The results of numerical experiments show that on a grid of 15–20 nodes, the error of the approximation does not exceed the computational error.

**Keywords:** integro-differential equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

### Введение

В работах [1; 2] рассматривается приближенное решение сингулярного интегрального уравнения второго рода с логарифмическим ядром в классе ограниченных на концах отрезка функций

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x,t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi(x)$  – неизвестная функция;  $K(x,t)$  – известная функция из класса  $\mathbb{C}[-1,1]$  по обоим аргументам;  $f(x) \in \mathbb{C}[-1,1]$ .

Обзор результатов исследований, посвященных вопросам разрешимости уравнений вида (1) и их численного решения, приведен в монографии [1, с. 27, 59]. В дальнейшем будем считать, что соответствующее однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Тогда решение уравнения (1) в классе непрерывных функций единственно [3; 4]. Показано, что при наличии в ядре интегрального уравнения второго рода, кроме логарифмической особенности, еще и регулярной части решение может быть получено лишь численно. Различные подходы к прямому численному решению данного уравнения содержат работы [5; 6].

В настоящей статье предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) с неизвестной функцией  $\varphi(x)$  в разных классах функций по Мусхелишвили методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

Известны спектральные соотношения для слабосингулярного интеграла [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \alpha_k T_k(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2)$$

где  $\alpha_0 = -\ln 2$ ;  $\alpha_k = -\frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$  – многочлены Чебышева первого рода,  $x \in [-1, 1]$ .

Напомним классы функций по Мусхелишвили [8, с. 31].

Говорят, что функция  $\psi(x) \in h(0)$ , если на отрезке  $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точек  $x = \pm 1$  допускает интегрируемую особенность.

Функция  $\psi(x) \in h(1)$ , если на отрезке  $[-1, 1 - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки  $x = 1$  допускает интегрируемую особенность.

Функция  $\psi(x) \in h(-1)$ , если на отрезке  $[-1 + \varepsilon, 1]$ ,  $\varepsilon > 0$ , она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки  $x = -1$  допускает интегрируемую особенность.

Класс функций  $h(-1, 1)$  представляет собой класс ограниченных в окрестности точек  $x = \pm 1$  функций.

Данная статья является продолжением серии работ по приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, в том числе со слабой особенностью, методом ортогональных многочленов (см., например, [9]).

### Предварительные сведения

При построении вычислительной схемы используем интерполяционный многочлен функции  $f(x)$  по узлам Чебышева первого рода [10, с. 104]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n T_j(x), \quad (3)$$

где

$$f_0^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k), \quad f_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Применяя разложения (3), несложно построить интерполяционный многочлен  $K_{n,n}(x, t)$  функции двух переменных  $K(x, t)$ :

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{r,j},$$

$$k_{r,j} = \frac{\delta_r \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_r(x_l) \sum_{q=0}^n K(x_l, x_q) T_j(x_q), \quad \delta_s = \begin{cases} 1, & s=0, \\ 2, & s \neq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

### Приближенное решение уравнения (1) в классе неограниченных на концах отрезка функций

Приближенное решение  $\varphi_n(x)$  уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции  $v_n(x)$ :

$$\frac{v_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} K_{n,n}(x, t) dt = F_n(x), \quad |x| < 1, \quad (5)$$

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен (4) функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обоим переменным;  $F_n(x)$  – некоторая функция из класса  $C[-1, 1]$  такая, что  $F_n(x_k) = f(x_k)$ ,  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Ре-

шения  $\varphi_n$  и  $v_n$  связаны равенством  $\varphi_n(x) = \frac{v_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ . Отметим, что уравнение (5), как и уравнение (1),

разрешимо в рассматриваемом классе  $h(0)$  [3; 4].

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$v_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m T_m(x), \quad (6)$$

где  $c_m$ ,  $m = \overline{0, n}$ , – неизвестные пока постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (5) с учетом представления (6) и равенств (2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n c_m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n T_m(x) c_m \alpha_m, \quad (7)$$

где согласно равенствам (2)  $\alpha_0 = -\ln 2$ ;  $\alpha_m = -\frac{1}{m}$ ,  $m = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (5). Учитывая представления (4) и (6) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n k_{r,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) k_{r,m} \omega_m, \quad \omega_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0,5, & m>0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя представления (6)–(8) в уравнение (5), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) \alpha_m + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) k_{r,m} \omega_m = F_n(x). \quad (9)$$

В качестве внешних узлов  $x$  в уравнении (9) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Из уравнения (9) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n a_{k,m} c_m &= f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \\ a_{k,m} &= \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}} T_m(x_k) + T_m(x_k) \alpha_m + \sum_{r=0}^n T_r(x_k) k_{r,m} \omega_m. \end{aligned} \quad (10)$$

Решив систему (10) относительно неизвестных  $c_m$ ,  $m = \overline{0, n}$ , найдем приближенное решение уравнения (1) с учетом представления (6) по формуле

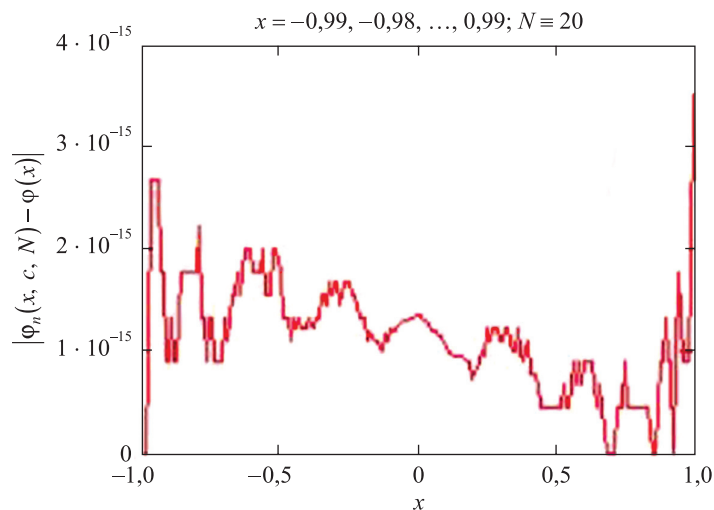
$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x). \quad (11)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1)

при  $k(x,t) = \frac{2t^2-1}{(x+2)(t+2)}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2x + \left(16 - \frac{28\sqrt{3}}{3}\right) \frac{1}{x+2}$ . Несложно показать, что решением

уравнения (1) в данном случае является функция  $\varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Как свидетельствуют расчеты, про-

веденные в среде компьютерной математики *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях  $n$ , равных 5, 15 и 20, погрешность приближенного решения  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (11), в системе точек  $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$  не превосходит  $1,0 \cdot 10^{-5}$ ,  $2,7 \cdot 10^{-15}$  и  $3,6 \cdot 10^{-15}$  соответственно (см. рисунок).



Погрешность приближенного решения  
 Error of the approximate solution

**Приближенное решение уравнения (1)  
в классе неограниченных на левом конце функций**

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим следующее уравнение относительно новой неизвестной функции  $v_n(x)$ :

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}v_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = F_n(x), |x| < 1, \quad (12)$$

где  $K_{n,n}(x,t)$  – интерполяционный многочлен функции  $K(x,t)$  степени  $n$  по обоим переменным;  $F_n(x)$  – некоторая функция из класса  $C[-1,1]$  такая, что  $F_n(x_k) = f(x_k)$ ,  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Решения  $\varphi_n$  и  $v_n$  связаны равенством  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}v_n(x)$ .

Отметим, что уравнение (12), как и уравнение (1), в данном случае разрешимо [1]. Докажем следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$L_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2 T_0(x) + T_1(x), & m=0, \\ \frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & m=1, \\ \frac{T_{m-1}(x)}{2(m-1)} - \frac{T_m(x)}{m} + \frac{T_{m+1}(x)}{2(m+1)}, & m \geq 2. \end{cases} \quad (13)$$

**Доказательство.** Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $\sqrt{1-t}$  и учтем соотношение  $xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x)$  [7, с. 23]. В результате подынтегральная функция в равенстве (13) сводится к виду (2), откуда следует истинность данного утверждения.

Пусть снова имеет место представление (6).

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (12). С учетом представления (6) и равенства (13) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n c_m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n L_m(x) c_m. \quad (14)$$

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (12) и в качестве интерполяционного многочлена  $K_{n,n}(x,t)$  выберем многочлен (4). Учитывая представление (6) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n k_{r,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \left( k_{r,m} \omega_m - \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} \right) - \sum_{m=0}^{n-1} c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{r,m} &= k_{r,m} \omega_m - \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} - \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} \delta_{m+1}, \\ \delta_m &= \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n} \\ 0, & m > n, \end{cases} \quad \omega_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0,5, & m > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Собирая вместе представление (6) и разложения каждого из этих интегралов по формулам (14)–(16), из уравнения (12) имеем

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m L_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m} = F_n(x). \quad (17)$$

В качестве внешних узлов  $x$  в уравнении (17) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Из уравнения (17) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^n a_{k,m} c_m = f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \quad (18)$$

$$a_{k,m} = \sqrt{\frac{1-x_k}{1+x_k}} T_m(x_k) + L_m(x_k) + \sum_{r=0}^n T_r(x_k) \Omega_{r,m}.$$

Решив систему (18) относительно неизвестных  $c_m$ ,  $m = \overline{0, n}$ , найдем приближенное решение уравнения (1) по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x). \quad (19)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при  $k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}$ ,  $f(x) = (2x+2x^2) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{2}{3} x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3}) \frac{1}{x+2}$ . Решением уравнения (1) в данном случае является функция  $\varphi(x) = (2x+2x^2) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . Как свидетельствуют расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях  $n$ , равных 5, 15 и 20, погрешность приближенного решения  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (19), в системе точек  $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$  не превосходит  $6,1 \cdot 10^{-5}$ ,  $1,8 \cdot 10^{-14}$  и  $1,4 \cdot 10^{-14}$  соответственно.

### Приближенное решение уравнения (1) в классе неограниченных на правом конце функций

По аналогии с предыдущим случаем приближенное решение уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции  $v_n(x)$ :

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = F_n(x), \quad |x| < 1, \quad (20)$$

где  $K_{n,n}(x, t)$  – интерполяционный многочлен функции  $K(x, t)$  степени  $n$  по обеим переменным;  $F_n(x)$  – некоторая функция из класса  $C[-1, 1]$  такая, что  $F_n(x_k) = f(x_k)$ ,  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Решения  $\varphi_n$  и  $v_n$  связаны равенством  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_n(x)$ .

Отметим, что уравнение (20), как и уравнение (1), разрешимо в заданном классе. Докажем следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Для  $|x| < 1$  имеет место равенство

$$D_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2 T_0(x) - T_1(x), & m=0, \\ -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) - \frac{1}{4} T_2(x), & m=1, \\ -\frac{T_{m-1}(x)}{2(m-1)} - \frac{T_m(x)}{m} - \frac{T_{m+1}(x)}{2(m+1)}, & m \geq 2. \end{cases} \quad (21)$$

**Доказательство.** Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $\sqrt{1+t}$  и учтем соотношение  $xT_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)$  [7]. В результате подынтегральная функция в равенстве (21) сводится к виду (2), откуда следует истинность данного утверждения.

Пусть снова имеет место представление (6).

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (20). С учетом представления (6) и равенства (21) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n c_m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_m(t) \ln|t-x| dt = \sum_{m=0}^n D_m(x) c_m. \quad (22)$$

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (20) и в качестве интерполяционного многочлена  $K_{n,n}(x, t)$  выберем многочлен (4). Учитывая представление (6) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \sum_{j=0}^n k_{r,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_j(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \left( k_{r,m} \omega_m + \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} \right) + \sum_{m=0}^{n-1} c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m}^*, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{r,m}^* &= k_{r,m} \omega_m + \frac{1}{2} k_{r,|m-1|} \omega_{|m-1|} + \frac{1}{2} k_{r,m+1} \omega_{m+1} \delta_{m+1}, \\ \delta_m &= \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n} \\ 0, & m > n, \end{cases} \quad \omega_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0,5, & m > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Собирая вместе представление (6) и разложения каждого из этих интегралов по формулам (22)–(24), из уравнения (20) имеем

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m L_m(x) + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{r=0}^n T_r(x) \Omega_{r,m}^* = F_n(x). \quad (25)$$

В качестве внешних узлов  $x$  в уравнении (25) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Из уравнения (25) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n a_{k,m} c_m &= f(x_k), \quad k = \overline{0, n}, \\ a_{k,m} &= \sqrt{\frac{1+x_k}{1-x_k}} T_m(x_k) + D_m(x_k) + \sum_{r=0}^n T_r(x_k) \Omega_{r,m}^*. \end{aligned} \quad (26)$$

Решив систему (26) относительно неизвестных  $c_m$ ,  $m = \overline{0, n}$ , найдем приближенное решение уравнения (1) по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sum_{m=0}^n c_m T_m(x). \quad (27)$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при  $f(x) = (2x - 2x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{2}{3} x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3}) \frac{1}{x+2}$ ,  $k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}$ . Решением уравнения (1)

в данном случае является функция  $\varphi(x) = (2x - 2x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ . Как показывают расчеты, проведенные

в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях  $n$  достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения.

Решая систему (26) при  $n$ , равных 5, 15 и 20, видим, что точное решение  $\varphi(x)$  отличается от приближенного решения  $\varphi_n(x)$ , вычисленного по формуле (27), в системе точек  $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$  не более чем на  $6,8 \cdot 10^{-5}$ ,  $1,8 \cdot 10^{-14}$  и  $1,3 \cdot 10^{-14}$  соответственно.

### Заключение

Построенные схемы численного решения сингулярного интегрального уравнения второго рода со слабой особенностью вида (1) в разных классах функций, в отличие от ранее известных методик [1], позволяют получить приближенное решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря

этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближенного решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью. Доказательство сходимости приближенных решений к точным и оценка погрешностей решения являются целью другой работы.

### Библиографические ссылки

1. Панасюк ВВ, Саврук МП, Назарчук ЗТ. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции*. Киев: Наукова думка; 1984. 344 с.
2. Шешко СМ. Численное решение одного слабосингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;3:98–103. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-98-103.
3. Vainikko G, Pedas A. The properties of solutions of weakly singular integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):419–430. DOI: 10.1017/S0334270000002769.
4. Vainikko G, Uba P. A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):431–438. DOI: 10.1017/S0334270000002770.
5. Anselone PM, Krabs W. Approximate solution of weakly singular integral equations. *Journal of Integral Equations*. 1979;1(1):61–75.
6. Anselone PM. Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):408–418. DOI: 10.1017/S0334270000002757.
7. Попов ГЯ. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. *Известия Академии наук Армянской ССР. Серия физико-математических наук*. 1961;14(3):81–96.
8. Мухелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 512 с.
9. Расолько ГА, Волков ВМ. Численное решение одного слабо сингулярного интегрального уравнения методом ортогональных многочленов в разных классах функций. *Дифференциальные уравнения*. 2022;58(4):545–553. DOI: 10.31857/S0374064122040100.
10. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Кири СН, переводчик; Лебедев ВИ, редактор. Москва: Наука; 1983. 384 с.

### References

1. Panasyuk VV, Savruk MP, Nazarchuk ZT. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv: Naukova dumka; 1984. 344 p. Russian.
2. Sheshko SM. Numerical solution of a weakly singular integral equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:98–103. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-98-103.
3. Vainikko G, Pedas A. The properties of solutions of weakly singular integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):419–430. DOI: 10.1017/S0334270000002769.
4. Vainikko G, Uba P. A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):431–438. DOI: 10.1017/S0334270000002770.
5. Anselone PM, Krabs W. Approximate solution of weakly singular integral equations. *Journal of Integral Equations*. 1979;1(1):61–75.
6. Anselone PM. Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied Mathematics*. 1981;22(4):408–418. DOI: 10.1017/S0334270000002757.
7. Popov GYa. [On one approximate method for solving some plane contact problems of elasticity theory]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1961;14(3):81–96. Russian.
8. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya: granichnye zadachi teorii funktsii i nekotorye ikh prilozheniya k matematicheskoi fizike* [Singular integral equations: boundary value problems of function theory and some of their applications to mathematical physics]. 3<sup>rd</sup> edition. Moscow: Nauka; 1968. 512 p. Russian.
9. Rasolko GA, Volkov VM. [Numerical solution of a weakly singular integral equation by the method of orthogonal polynomials in various function classes]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2022;58(4):545–553. Russian. DOI: 10.31857/S0374064122040100.
10. Paszkowski S. *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe; 1975. 481 s.  
Russian edition: Paszkowski S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva*. Kiro SN, translator; Lebedev VI, editor. Moscow: Nauka; 1983. 384 p.

Получена 15.02.2023 / исправлена 04.04.2023 / принята 10.05.2023.  
Received 15.02.2023 / revised 04.04.2023 / accepted 10.05.2023.