УДК 517.538.52+517.538.53

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЯКОБИ И НЕЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЧЕБЫШЕВА

А. П. СТАРОВОЙТОВ[1], Е. П. КЕЧКО[1], Т. М. ОСНАЧ[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель, Беларусь*

Определены аналоги алгебраических аппроксимаций Эрмита – Паде, а именно тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби. Построены примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде.

Образец цитирования:
Старовойтов АП, Кечко ЕП, Оснач ТМ. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:6–17.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-6-17
EDN: XJRLWT

For citation:
Starovoitov AP, Kechko EP, Osnach TM. On the existence of trigonometric Hermite – Jacobi approximations and non-linear Hermite – Chebyshev approximations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:6–17. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-6-17
EDN: XJRLWT

Авторы:
Александр Павлович Старовойтов – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования.
Елена Петровна Кечко – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры вычислительной математики и программирования факультета математики и технологий программирования.
Татьяна Михайловна Оснач – аспирантка кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – А. П. Старовойтов.

Authors:
Alexander P. Starovoitov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.
svoitov@gsu.by, apsvoitov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1067-5744
Elena P. Kechko, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of computational mathematics and programming, faculty of mathematics and technologies of programming.
ekechko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1882-8781
Tatyana M. Osnach, postgraduate student at the department of mathematical analysis and differential equations, faculty of mathematics and technologies of programming.
osnach@gsu.by

Подобные примеры построены для линейных и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышева, являющихся кратными аналогами линейных и нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева. Оба типа примеров вытекают из известных представлений для числителя и знаменателя дробей, введенных Ш. Эрмитом при доказательстве трансцендентности числа *e*.

Ключевые слова: тригонометрические ряды; ряды Фурье; тригонометрические аппроксимации Паде; многочлены Эрмита – Паде; аппроксимации Паде – Чебышева.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025».

ON THE EXISTENCE OF TRIGONOMETRIC HERMITE – JACOBI APPROXIMATIONS AND NON-LINEAR HERMITE – CHEBYSHEV APPROXIMATIONS

A. P. STAROVOITOV[a]***, E. P. KECHKO***[a]***, T. M. OSNACH***[a]

[a]*Francisk Skorina Gomel State University, 104 Savieckaja Street, Gomiel 246028, Belarus*
Corresponding author: E. P. Kechko (ekechko@gmail.com)

In this paper, analogues of algebraic Hermite – Padé approximations are defined, being trigonometric Hermite – Padé approximations and Hermite – Jacobi approximations. Examples of functions are represented for which trigonometric Hermite – Jacobi approximations exist but are not the same as trigonometric Hermite – Padé approximations. Similar examples are made for linear and non-linear Hermite – Chebyshev approximations, which are multiple analogues of linear and non-linear Padé – Chebyshev approximations. Each type of examples follows from the well-known representations for the numerator and denominator of fractions, introduced by C. Hermite when proving the transcendence of number *e*.

Keywords: trigonometric series; Fourier sums; trigonometric Padé approximations; Hermite – Padé polynomials; Padé – Chebyshev approximations.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025».

Введение

Пусть функция $f(z)$ представлена степенным рядом

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i$$

с комплексными коэффициентами. Для любой пары (n, m) целых неотрицательных чисел существуют такие алгебраические многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$, имеющие степени $\deg Q_m \le m$, $\deg P_n \le n$, что

$$Q_m(z) f(z) - P_n(z) = O\left(z^{n+m+1}\right). \tag{1}$$

Здесь и далее под $O\left(z^p\right)$ понимается степенной ряд вида $l_1 z^p + l_2 z^{p+1} + \ldots$.

Многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ определяются условиями (1) не единственным образом, тем не менее дроби

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

определяют одну и ту же рациональную функцию, какие бы многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$, удовлетворяющие условиям (1), мы ни взяли [1, гл. 2, § 1]. Существование многочленов $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ доказано А. Паде [2, ч. 1, гл. 1, § 1.1]. По этой причине рациональные функции $\pi_{n,m}(z)$ принято называть аппроксимациями Паде или Паде – Фробениуса (Г. Фробениус [3] в 1881 г. исследовал аналогичную задачу).

Еще раньше, в 1846 г., близкая в идейном плане задача изучалась К. Якоби [4], который обобщил результат О. Коши, связанный с рациональной интерполяцией функции, заданной в $n + m + 1$ различных точках. К. Якоби рассмотрел $(n + m + 1)$-кратную рациональную интерполяцию в одной точке. Его интерполяционная конструкция приводит к следующему определению.

Определение 1. Рациональную дробь вида

$$\hat{\pi}_{n,\,m}(z) = \hat{\pi}_{n,\,m}(z;\, f) = \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)},$$

где многочлены $\hat{Q}_m(z)$ и $\hat{P}_n(z)$ имеют степени не выше m и n соответственно, будем называть аппроксимацией Паде – Якоби для пары индексов $(n,\, m)$ и функции $f(z)$, если

$$f(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O\left(z^{n+m+1}\right).$$

Согласно теореме Паде [2, ч. 1, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1] аппроксимации Паде $\pi_{n,\,m}(z;\, f)$ существуют для любой пары индексов $(n,\, m)$, в то время как аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,\,m}(z;\, f)$ могут и не существовать. Соответствующий пример функции $f(z)$ и пары индексов $(n,\, m)$ приведен в работе [2, ч. 1, гл. 1, § 1.4]. Полное исследование условий, при наличии которых рациональные функции $\hat{\pi}_{n,\,m}(z;\, f)$ существуют, провел Дж. Бейкер [2, ч. 1, гл. 1, § 1.4]. В связи с этим рациональные функции $\hat{\pi}_{n,\,m}(z;\, f)$ иногда называют аппроксимациями Паде в смысле Бейкера.

Аналогичные конструкции рациональных дробей, но соответствующие одновременной интерполяции нескольких функций, были разработаны Ш. Эрмитом [5]. Они стали основой его доказательства трансцендентности числа *e*. Рациональные дроби Эрмита обычно называют совместными аппроксимациями Паде [1, гл. 4, § 1]. В случае когда рассматриваются несколько функций, совместные аппроксимации также могут быть двух типов. Будем называть их аппроксимациями Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Якоби. Изначально Ш. Эрмит рассматривал одновременную интерполяцию нескольких экспоненциальных функций. Для системы экспонент, рассматриваемых Ш. Эрмитом, две конструкции рациональных дробей совпадают. Однако для произвольного набора нескольких аналитических функций это не так. Соответствующий пример приведен далее.

Аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби

Рассмотрим систему $\mathbf{f} = \left(f_1(z),\, \ldots,\, f_k(z)\right)$, состоящую из k аналитических в окрестности нуля функций, представимых степенными рядами

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^j z^l,\ \ j = 1,\, \ldots,\, k, \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k-мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1,\, \ldots,\, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ есть сумма $m = m_1 + \ldots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1,\, \ldots,\, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Аппроксимации Эрмита – Паде для мультииндекса $(n,\, \vec{m})$, ассоциированные с системой функций $\mathbf{f}$, определяются равенствами

$$\pi_j(z) = \pi^j_{n_j,\, n,\, \vec{m}}(z;\, \mathbf{f}) = \frac{P^j_{n_j}(z)}{Q_m(z)},\ j = 1,\, \ldots,\, k,$$

где многочлены $Q_m(z) = Q_{n,\,\vec{m}}(z;\, \mathbf{f})$ и $P^j_{n_j}(z) = P^j_{n,\,\vec{m}}(z;\, \mathbf{f})$ являются решением следующей задачи [1, гл. 4, § 1, задача A].

Задача 1. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_{n,\,\vec{m}}(z;\, \mathbf{f})$, $\deg Q_m \le m$, и такие многочлены $P^j_{n_j}(z) = P^j_{n,\,\vec{m}}(z;\, \mathbf{f})$, $\deg P^j_{n_j} \le n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1,\, \ldots,\, k$ выполнялись условия

$$R^j_{n,\,\vec{m}}(z) := Q_m(z)\, f_j(z) - P^j_{n_j}(z) = O\left(z^{n+m+1}\right). \tag{3}$$

Многочлены $Q_m(z)$ и $P^1_{n_1}(z),\, \ldots,\, P^k_{n_k}(z)$, являющиеся решением задачи 1 (решение задачи 1 всегда существует), называют многочленами Эрмита – Паде для мультииндекса $(n,\, \vec{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$.

Особый интерес представляют системы функций $\mathbf{f}$, для которых рациональные дроби $\left\{\pi_j(z)\right\}_{j=1}^k$ однозначно определяются условиями (3) для любого мультииндекса $(n,\, \vec{m})$. Важным случаем таких систем являются совершенные системы (примеры систем, отличных от совершенных, для которых рациональные дроби $\left\{\pi_j(z)\right\}_{j=1}^k$ определяются однозначно, приведены в работе [6]).

Определение 2. Систему **f**, состоящую из функций (2), называют совершенной относительно задачи 1, если для любого мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и любого решения задачи 1 $Q_m(z)$, $P_{n_1}^1(z)$, …, $P_{n_k}^k(z)$ с этим мультииндексом

$$\deg Q_m = m,\ \deg P_{n_j}^j = n_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Примером совершенной системы функций является набор экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные не равные нулю комплексные числа. Совершенность этой системы (без формального определения) доказал Ш. Эрмит [5]. Его доказательство трансцендентности числа e основывается на том, что для некоторого простого числа p интегралы

$$M = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty}\left[x\prod_{i=1}^k (x-i)\right]^{p-1} e^{-x}\,dx,$$

$$M_j = \frac{e^j}{(p-1)!}\int_j^{+\infty}\left[x\prod_{i=1}^k (x-i)\right]^{p-1} e^{-x}\,dx,$$

$$\varepsilon_j = \frac{e^j}{(p-1)!}\int_0^{j}\left[x\prod_{i=1}^k (x-i)\right]^{p-1} e^{-x}\,dx$$

дают нужные приближения к набору натуральных степеней e:

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M},\ j = 1, \ldots, k.$$

При $\vec{m} \neq (0, \ldots, 0)$ интегралы Эрмита легко преобразуются [1, гл. 4, § 2] в решения задачи 1 для системы $\mathbf{E_k} = \left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^k$: при нормировке $Q_m(0) = 1$ и $j = 1, \ldots, k$

$$Q_m(z) = Q_{n,\vec{m}}(z;\, \mathbf{E_k}) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{+\infty} T(x)e^{-zx}dx, \tag{4}$$

$$P_{n_j}^j(z) = P_{n,\vec{m}}^j(z;\, \mathbf{E_k}) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{+\infty} T(x)e^{-zx}dx, \tag{5}$$

$$R_j(z) = R_{n,\vec{m}}^j(z;\, \mathbf{E_k}) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j} T(x)e^{-zx}dx, \tag{6}$$

где $T(x) = x^n \prod_{p=1}^k \left(x - \lambda_p\right)^{m_p}$. Считается, что в формулах (4) и (5) $\mathrm{Re}\,z > 0$. В случае $\mathrm{Re}\,z \le 0$ значения многочленов $Q_m(z)$ и $P_{n_j}^j(z)$ определяются с помощью аналитического продолжения. Из формул (4) и (5) следует, что

$$\deg Q_{n,\vec{m}}(\cdot;\, \mathbf{E_k}) = m,\ \deg P_{n,\vec{m}}^j(\cdot;\, \mathbf{E_k}) = n_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Введем в рассмотрение аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 3. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j(z) = \hat{\pi}_{n_j, n, \vec{m}}(z;\, \mathbf{f}) = \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)},\ j = 1, \ldots, k,$$

где алгебраические многочлены $\hat{Q}_m(z) = \hat{Q}_{n,\vec{m}}(z;\, \mathbf{f})$ и $\hat{P}_{n_j}^j(z) = \hat{P}_{n,\vec{m}}^j(\cdot;\, \mathbf{f})$ имеют степени не выше m и n_j соответственно, $n_j = n + m - m_j$, будем называть аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы функций **f**, если

$$f_i(z) - \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O\left(z^{n+m+1}\right),\ j = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Многочлены $\hat{Q}_m(z)$ и $\hat{P}^1_{n_1}(z), \ldots, \hat{P}^k_{n_k}(z)$, удовлетворяющие условиям (7) (будем называть их многочленами Эрмита – Якоби), как и аппроксимации Эрмита – Якоби, могут не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть $k = 2$, $n = 1$, $m_1 = m_2 = 1$,

$$f_1(z) = 2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 + \ldots,$$

$$f_2(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \ldots.$$

Тогда $m = n_1 = n_2 = 2$, многочлены $\hat{Q}_2(z)$ и $\hat{P}^1_2(z)$, $\hat{P}^2_2(z)$, удовлетворяющие условиям (7), находятся с точностью до числового множителя и при определенном выборе этого числового множителя имеют вид

$$\hat{P}^1_2(z) = 2z - 3z^2,\ \hat{P}^2_2(z) = z - z^2,\ \hat{Q}_2(z) = z - 2z^2.$$

Легко проверить, что для найденных многочленов условия (7) не выполняются, т. е.

$$f_1(z) - \frac{2z - 3z^2}{z - 2z^2} \neq O\left(z^4\right),\ f_2(z) - \frac{z - z^2}{z - 2z^2} \neq O\left(z^4\right).$$

Многочлены Эрмита – Паде, удовлетворяющие условиям (3), как и аппроксимации Эрмита – Паде, существуют для любого мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E_k} = \left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$, *где* λ_j *– различные не равные нулю комплексные числа. Тогда для любого мультииндекса* $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ *аппроксимации Эрмита – Якоби* $\left\{\hat{\pi}_j(z; \mathbf{E_k})\right\}_{j=1}^{k}$ *существуют, определяются единственным образом и тождественно совпадают с соответствующими аппроксимациями Эрмита – Паде, т. е.*

$$\hat{\pi}_j(z; \mathbf{E_k}) = \pi_j(z; \mathbf{E_k}),\ j = 1, \ldots, k. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что $\vec{m} \neq (0, \ldots, 0)$. Тогда многочлены Эрмита – Паде $Q_m(z; \mathbf{E_k})$ и $P^j_{n_j}(z; \mathbf{E_k})$ при нормировке $Q_m(0; \mathbf{E_k}) = 1$ задаются формулами (4) и (5). Это значит, что многочлен $Q_m(z; \mathbf{E_k})$ можно записать в виде $Q_m(z; \mathbf{E_k}) = 1 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$, поэтому функция $\dfrac{1}{Q_m(z; \mathbf{E_k})}$ является аналитической в некоторой окрестности нуля и, следовательно, может быть представлена в этой окрестности степенным рядом

$$\frac{1}{Q_m(z; \mathbf{E_k})} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Рассматриваемые многочлены Эрмита – Паде удовлетворяют условиям

$$e^{\lambda_j z} Q_m(z; \mathbf{E_k}) - P^j_{n_j}(z; \mathbf{E_k}) = O\left(z^{n+m+1}\right),\ j = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Разделив левую и правую части равенства (9) на $Q_m(z; \mathbf{E_k})$, а затем перемножив соответствующие ряды в правой части нового равенства, получим

$$e^{\lambda_j z} - \frac{P^j_{n_j}(z; \mathbf{E_k})}{Q_m(z; \mathbf{E_k})} = O\left(z^{n+m+1}\right),\quad j = 1, \ldots, k. \tag{10}$$

Отсюда следует справедливость соотношений (8) при $\vec{m} \neq (0, \ldots, 0)$.

Если $\vec{m} = (0, \ldots, 0)$, то очевидно, что с точностью до числового множителя $Q_m(z; \mathbf{E_k}) = \hat{Q}_m(z; \mathbf{E_k}) \equiv 1$, а $P^j_{n_j}(z; \mathbf{E_k}) = \hat{P}^j_{n_j}(z; \mathbf{E_k})$ есть n-я частная сумма ряда $f_j(z)$, и справедливы равенства (8). Единственность аппроксимаций Эрмита – Якоби $\left\{\hat{\pi}_j(z; \mathbf{E_k})\right\}_{j=1}^{k}$ следует из единственности соответствующих аппроксимаций Эрмита – Паде. Теорема 1 доказана.

Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби

Пусть $\mathbf{f^t} = \left(f_1^t(x), \ldots, f_k^t(x)\right)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx\right), \ \ j = 1, \ldots, k, \tag{11}$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (11) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый из них задает функцию, определенную на всей действительной прямой.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Для набора тригонометрических рядов (11) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n,\vec{m}}^t\left(x; \mathbf{f^t}\right)$, $\deg Q_m^t \le m$, и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t\left(x; \mathbf{f^t}\right)$, $\deg P_j^t \le n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \ldots, k$ выполнялись условия

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty}\left(\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx\right),$$

где $\tilde{a}_l^j$ и $\tilde{b}_l^j$, как и коэффициенты тригонометрических многочленов $Q_m^t(x)$ и $P_j^t(x)$, могут быть комплексными числами.

Определение 4. Если пара $\left(Q_m^t, P^t\right)$, где $P^t := \left(P_1^t, \ldots, P_k^t\right)$, является решением задачи 2 с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндексом $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $Q_m^t(x)$ и $P_1^t(x), \ldots, P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^t\left(x; \mathbf{f^t}\right) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \ \ j = 1, \ldots, k,$$

будем называть тригонометрическими многочленами Эрмита – Паде и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для набора тригонометрических рядов $\mathbf{f^t}$ соответственно.

Как и в алгебраическом случае, доказывается, что решение задачи 2 существует для любого мультииндекса $(n, \vec{m})$ и любого набора тригонометрических рядов $\mathbf{f^t}$ (в том числе формальных). Это решение определяется с точностью до числового множителя, причем его неединственность, как и в алгебраическом случае, может быть и более существенной. Будем говорить, что задача 2 имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя. Аналогично алгебраическому случаю доказывается, что решение задачи 2 единственно для мультииндекса $(n, \vec{m})$, когда для любого решения задачи 2 $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x), \ldots, P_k^t(x)$ с этим мультииндексом

$$\deg Q_m^t = m, \ \deg P_j^t = n_j, \ j = 1, \ldots, k.$$

Определим теперь тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 5. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^t(x) = \hat{\pi}_{n_j, n, \vec{m}}^t\left(x; \mathbf{f^t}\right) = \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)}, \ j = 1, \ldots, k,$$

где тригонометрические многочлены $\hat{Q}_m^t(x) = \hat{Q}_{n,\vec{m}}^t\left(x; \mathbf{f^t}\right)$ и $\hat{P}_j^t(x) = \hat{P}_{n_j, n, \vec{m}}^t\left(x; \mathbf{f^t}\right)$ имеют степени не выше m и n_j соответственно, $n_j = n + m - m_j$, будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Якоби для мультииндекса $(n, \vec{m})$ и системы функций $\mathbf{f^t}$, если рациональные функции $\hat{\pi}_j^t(x)$ представимы своими рядами Фурье и выполняются условия

$$f_j^t(x) - \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty}\left(\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx\right), \ \ j = 1, \ldots, k. \tag{12}$$

Многочлены $\hat{Q}_m^t(x)$ и $\hat{P}_1^t(x), \ldots, \hat{P}_k^t(x)$, удовлетворяющие условиям (12), будем называть тригонометрическими многочленами Эрмита – Якоби.

В отличие от тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби могут не существовать. Более того, в случае своего существования они могут не совпадать с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде. В частности, при $k = 1$ тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби не существуют (см. [7]) для недифференцируемой функции Вейерштрасса

$$f^t(x) = \sum_{l=0}^{\infty} q^l \cos(2p+1)^l x, \;\; p \in \mathbb{N}, \;\; 0 < q < 1.$$

Другие примеры функций, для которых при $k = 1$ тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби не существуют, а также примеры функций, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, но не совпадают с тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде, можно построить, опираясь на результаты работ [8; 9].

Примеры тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство функций (параметр $\lambda \in \mathbb{R}$), представленных тригонометрическими рядами

$$G(x;\lambda) = e^{\lambda\cos x}\left(\cos(\lambda \sin x)\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!}\cos lx, \tag{13}$$

$$H(x;\lambda) = e^{\lambda\cos x}\left(\sin(\lambda \sin x)\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!}\sin lx. \tag{14}$$

Тождества (13) и (14) легко получить, если в равенстве

$$e^{\lambda z} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} z^l$$

положить, что $z = e^{ix}$, а затем приравнять действительные и мнимые части выражений, стоящих слева и справа от знака равенства.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ *– набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса* $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \ldots, 0)$, *удовлетворяющего условию* $n \geq \max_{1\leq j\leq k} m_j$, *и системы функций* $\mathbf{G_k} = \{G(x;\lambda_j)\}_{j=1}^{k}$ *существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби* $\{\hat{\pi}_j^t(x;\mathbf{G_k})\}_{j=1}^{k}$ *и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителей справедливы представления*

$$\hat{Q}_m^t(x;\mathbf{G_k}) = \hat{Q}_{n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{G_k}) = Q_m\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)\cdot\overline{Q_m\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left[(n+m)!\right]^2}\left|\int_0^{+\infty} T(t)e^{-t(\cos x + i\sin x)}dt\right|^2,$$

$$\hat{P}_j^t(x;\mathbf{G_k}) = \hat{P}_{n_j,n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{G_k}) = \operatorname{Re}\left\{P_{n_j}^j\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)\cdot\overline{Q_m\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)}\right\},\; j = 1,\ldots,k,$$

где многочлены $Q_m(z;\mathbf{E_k})$ *и* $P_{n_j}^j(z;\mathbf{E_k})$ *представляются в виде интегралов Эрмита (4) и (5).*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для многочленов $Q_m(z;\mathbf{E_k})$ и $P_{n_j}^j(z;\mathbf{E_k})$, представимых интегралами Эрмита (4) и (5), в некоторой окрестности нуля справедливы равенства (10). Положим, что в равенстве (10) $z = e^{ix}$, а затем приравняем действительные части выражений, стоящих слева и справа от знака равенства. В результате получим

$$G(x;\lambda_j) - \operatorname{Re}\left\{\frac{P_{n_j}^j\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)}{Q_m\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)}\right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx. \tag{15}$$

Остается доказать, что при $n \geq \max_{1\leq j\leq k} m_j$

$$\hat{\pi}_j^t(x;\mathbf{G_k}) = \operatorname{Re}\left\{\pi_{n_j,\vec{m}}^j\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{P_{n_j}^j\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)}{Q_m\left(e^{ix};\mathbf{E_k}\right)}\right\}. \tag{16}$$

Для этого представим многочлены $Q_m(z;\,\mathbf{E_k})$ и $P^j_{n_j}(z;\,\mathbf{E_k})$ в виде

$$Q_m(z;\,\mathbf{E_k}) = \sum_{p=0}^{m} b_p z^p,\ P^j_{n_j}(z;\,\mathbf{E_k}) = \sum_{p=0}^{n_j} a^j_p z^p.$$

Поскольку b_p и a^j_p – действительные числа, то при $z = e^{ix}$

$$\operatorname{Re}\left\{\pi^j_{n_j,\,\vec{m}}\left(e^{ix};\,\mathbf{E_k}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{P^j_{n_j}(z)}{Q_m(z)} + \frac{\overline{P^j_{n_j}(z)}}{\overline{Q_m(z)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sum_{p=0}^{n_j} a^j_p e^{ikx}\cdot\sum_{l=0}^{m} b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p e^{-ipx}\cdot\sum_{s=0}^{m} b_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^{m} b_s e^{isx}\cdot\sum_{p=0}^{m} b_p e^{-ipx}}.$$

Заметим, что (см. [2, ч. 2, гл. 1, § 1.6])

$$\sum_{s=0}^{m} b_s e^{isx}\cdot\sum_{l=0}^{m} b_l e^{-ilx} = \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} b_s b_l \cos(s-l)x,$$

$$\sum_{p=0}^{n_j} a^j_p e^{ikx}\cdot\sum_{l=0}^{m} b_l e^{-ilx} + \sum_{p=0}^{n_j} a_p e^{-ipx}\cdot\sum_{s=0}^{m} b_s e^{isx} =$$

$$= 2\sum_{p=0}^{n_j}\sum_{l=0}^{m} a^j_p b_l \cos(p-l)x,$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\left\{\pi^j_{n_j,\,\vec{m}}\left(e^{ix};\,\mathbf{E_k}\right)\right\} = \frac{\sum_{p=0}^{n_j}\sum_{l=0}^{m} a^j_p b_l \cos(p-l)x}{\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} b_s b_l \cos(s-l)x} =: \frac{\tilde{P}^t_j(x)}{\tilde{Q}^t_m(x)},\ j = 1,\,\ldots,\,k. \tag{17}$$

Из условия на мультииндекс следует, что $n_j \ge m$. Опираясь на формулу (17), легко показать, что $\deg\tilde{Q}^t_m \le m$, $\deg\tilde{P}^t_j \le n_j$, $j = 1,\,\ldots,\,k$. Следовательно, тождество (16) и теорема 2 доказаны.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n,\,\vec{m}) \in \mathbb{Z}^{k+1}_+$, $\vec{m} \ne (0,\,\ldots,\,0)$, удовлетворяющего условию $n \ge \max_{1\le j\le k} m_j$, и системы функций $\mathbf{H_k} = \{H(x;\,\lambda_j)\}_{j=1}^{k}$ существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}^t_j(x;\,\mathbf{H_k})\}_{j=1}^{k}$ и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителей справедливы представления*

$$\hat{Q}^t_m(x;\,\mathbf{H_k}) = \hat{Q}^t_{n,\,\vec{m}}(x;\,\mathbf{H_k}) = Q_m\left(e^{ix};\,\mathbf{E_k}\right)\cdot\overline{Q_m\left(e^{ix};\,\mathbf{E_k}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left[(n+m)!\right]^2}\left|\int_0^{+\infty} T(t)e^{-t(\cos x + i\sin x)}dt\right|^2,$$

$$\hat{P}^t_j(x;\,\mathbf{H_k}) = \hat{P}^t_{n_j,\,n,\,\vec{m}}(x;\,\mathbf{H_k}) = \operatorname{Im}\left\{P^j_{n_j}\left(e^{ix};\,\mathbf{E_k}\right)\cdot\overline{Q_m\left(e^{ix};\,\mathbf{E_k}\right)}\right\},\ j = 1,\,\ldots,\,k,$$

где многочлены $Q_m(z;\,\mathbf{E_k})$ и $P^j_{n_j}(z;\,\mathbf{E_k})$ представляются в виде интегралов Эрмита (4) и (5).

Следствие 1. *Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – набор различных не равных нулю действительных чисел, для которого при $j^* \in \{1,\,\ldots,\,k\}$*

$$l_{j^*} = \frac{1}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_{j^*}} T(x)\,dx \neq 0. \tag{18}$$

Тогда для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \ldots, 0)$, *удовлетворяющего условию* $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, *существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби* $\left\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G_k})\right\}_{j=1}^k$ *для систем функций* $\mathbf{G_k}$, *а также тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби* $\left\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{H_k})\right\}_{j=1}^k$ *для систем функций* $\mathbf{H_k}$, *но* $\left\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G_k})\right\}_{j=1}^k$ и $\left\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{H_k})\right\}_{j=1}^k$ *не являются тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде для систем функций* $\mathbf{G_k}$ *и* $\mathbf{H_k}$ *соответственно.*

Доказательство. Докажем только утверждение для системы функций $\mathbf{G_k}$ (для системы функций $\mathbf{H_k}$ доказательство аналогично). Из формул (15) и (17) следует, что

$$G(x; \lambda_j) - \hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G_k}) = G(x; \lambda_j) - \frac{\tilde{P}_j^t(x)}{\tilde{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j \cos lx.$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для умножения двух косинусов, из последних равенств формул (6) и (17) получаем

$$\tilde{Q}_m^t(x) G(x; \lambda_{j^*}) - \tilde{P}_{j^*}^t(x) = c_{n+1}^{j^*} \cos(n+1)x + c_{n+2}^{j^*} \cos(n+2)x + \ldots,$$

где $c_{n+1}^{j^*} = 2b_m b_0 l_{j^*} \neq 0$. Отсюда и из определения тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде вытекает утверждение следствия 1 для системы функций $\mathbf{G_k}$.

Замечание 1. Условие (18) выполняется при $j^* = 1$, например когда $\lambda_j = j$, $j = 1, \ldots, k$, а также в более общем случае, когда $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$.

Линейные и нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева

Пусть $\mathbf{f^{ch}} = \left(f_1^{ch}(x), \ldots, f_k^{ch}(x)\right)$ – система функций, которые представимы рядами Фурье по многочленам Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ вида

$$f_j^{ch}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_n(x), \; j = 1, \ldots, k, \tag{19}$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Для набора рядов (19) найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m^{ch}(x) = Q_{n,\vec{m}}^{ch}\left(x; \mathbf{f^{ch}}\right) = \sum_{p=0}^{m} u_p T_p(x)$ и такие многочлены $P_j^{ch}(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^{ch}\left(x; \mathbf{f^{ch}}\right) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x)$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \ldots, k$ выполнялись условия

$$Q_m^{ch}(x) f_j^{ch}(x) - P_j^{ch}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x),$$

где $\tilde{a}_l^j$ и коэффициенты многочленов $Q_m^{ch}(x)$ и $P_j^{ch}(x)$ могут быть комплексными числами.

Определение 6. Если пара $\left(Q_m^{ch}, P^{ch}\right)$, где $P^{ch} = \left(P_1^{ch}, \ldots, P_k^{ch}\right)$, является решением задачи 3 с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндексом $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $Q_m^{ch}(x)$ и $P_1^{ch}(x), \ldots, P_k^{ch}(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^{ch}(x) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^{ch}\left(x; \mathbf{f^{ch}}\right) = \frac{P_j^{ch}(x)}{Q_m^{ch}(x)}, \; j = 1, \ldots, k,$$

будем называть многочленами Эрмита – Чебышева и линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева для системы функций $\mathbf{f^{ch}}$ соответственно.

Определение 7. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^{ch}(x) = \hat{\pi}_{n_j,\,n,\,\vec{m}}^{ch}\left(x;\, \mathbf{f^{ch}}\right) = \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)},$$

где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch}(x) = \hat{Q}_{n,\,\vec{m}}^{ch}\left(x;\, \mathbf{f^{ch}}\right) = \sum_{p=0}^{m} \hat{u}_p T_p(x),$$

$$P_j^{ch}(x) = P_{n_j,\,n,\,\vec{m}}^{ch}\left(x;\, \mathbf{f^{ch}}\right) = \sum_{p=0}^{n_j} \hat{v}_p^j T_p(x) \ \ (n_j = n + m - m_j)$$

подобраны так, что при $j = 1, \ldots, k$

$$f_i^{ch}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch}(x)}{\hat{Q}_m^{ch}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l^j T_n(x),$$

будем называть нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева.

Известно (см., например, [9]), что в случае $k = 1$ существуют функции, разлагающиеся в ряд по многочленам Чебышева, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева (при $k = 1$ их называют нелинейными аппроксимациями Паде – Чебышева; терминология в этом разделе частично заимствована из работы [9]) не существуют, и функции, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева существуют, но не совпадают с линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева.

Приведем пример системы функций, для которой существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева, но они не совпадают с линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева.

С этой целью определим семейство функций, представимых на отрезке $[-1, 1]$ рядами по многочленам Чебышева

$$F(x;\, \lambda) = e^{\lambda x} \cos\left(\lambda\sqrt{1-x^2}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} T_l(x) \ \ (\lambda \in \mathbb{R}),$$

и рассмотрим систему функций $\mathbf{F_k} = \left\{F\left(x;\, \lambda_j\right)\right\}_{j=1}^{k}$, где $\left\{\lambda_j\right\}_{j=1}^{k}$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Очевидно, что $F(\cos x;\, \lambda) = G(x;\, \lambda)$, т. е. $G(x;\, \lambda)$ является индуцированной функцией для $F(x;\, \lambda)$, поэтому, заменяя в формуле (15) x на $\arccos x$, получаем

$$F\left(x;\, \lambda_j\right) - \operatorname{Re}\left\{\frac{P_{n_j}^j\left(e^{i\arccos x};\, \mathbf{E_k}\right)}{Q_m\left(e^{i\arccos x};\, \mathbf{E_k}\right)}\right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x).$$

Отсюда и из формулы (17) вытекает, что

$$\hat{\pi}_{n_j,\,n,\,\vec{m}}^{ch}\left(x;\, \mathbf{F_k}\right) = \operatorname{Re}\left\{\frac{P_{n_j}^j\left(e^{i\arccos x};\, \mathbf{E_k}\right)}{Q_m\left(e^{i\arccos x};\, \mathbf{E_k}\right)}\right\}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\left\{\lambda_j\right\}_{j=1}^{k}$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n,\, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0, \ldots, 0)$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций $\mathbf{F_k} = \left\{F\left(x;\, \lambda_j\right)\right\}_{j=1}^{k}$ существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\left\{\hat{\pi}_j^t\left(x;\, \mathbf{F_k}\right)\right\}_{j=1}^{k}$ и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителя справедливы представления*

$$\hat{Q}_m^{ch}\left(x;\, \mathbf{F_k}\right) = \hat{Q}_{n,\,\vec{m}}^{ch}\left(x;\, \mathbf{F_k}\right) = Q_m\left(e^{i\arccos x};\, \mathbf{E_k}\right) \cdot \overline{Q_m\left(e^{i\arccos x};\, \mathbf{E_k}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left[(n+m)!\right]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(t)\, e^{-t\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)} dt \right|^2,$$

$$\widehat{P}_j^{ch}\left(x;\, \mathbf{F_k}\right) = \widehat{P}_{j,\, n,\, \vec{m}}^{ch}\left(x;\, \mathbf{F_k}\right) = \mathrm{Re}\left\{P_{n_j}^{j}\left(e^{i \arccos x};\, \mathbf{E_k}\right) \cdot \overline{Q_m\left(e^{i \arccos x};\, \mathbf{E_k}\right)}\right\},$$

где многочлены $Q_m\left(z;\, \mathbf{E_k}\right)$ *и* $P_{n_j}^{j}\left(z;\, \mathbf{E_k}\right)$ *представляются в виде интегралов Эрмита (4) и (5).*

Следствие 2. *Пусть* $\left\{\lambda_j\right\}_{j=1}^{k}$ *– набор различных не равных нулю действительных чисел, для которого при* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *интеграл* $\int_0^{\lambda_j} T\left(x\right) dx$ *не равен нулю. Тогда для мультииндекса* $\left(n,\, \vec{m}\right) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq \left(0, \ldots, 0\right)$*, удовлетворяющего условию* $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$*, и системы функций* $\mathbf{F_k}$ *существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышева* $\left\{\widehat{\pi}_j^{ch}\left(x;\, \mathbf{F_k}\right)\right\}_{j=1}^{k}$*, которые при этом не являются линейными тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Чебышева для системы функций* $\mathbf{F_k}$.

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Замечание 2. Условия следствия 2 выполняются, например когда $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$.

В заключение заметим, что в работе [10] по схеме, ранее предложенной О. Коши, построены интерполяционные рациональные операторы с узлами интерполяции в нулях дробей Чебышева – Маркова.

Библиографические ссылки

1. Никишин ЕМ, Сорокин ВН. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* Москва: Наука; 1988. 256 с.
2. Бейкер Дж мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* Рахманов ЕА, Суетин СП, переводчики; Гончар АА, редактор. Москва: Мир; 1986. 502 с.
3. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1881;90:1–17. DOI: 10.1515/crll.1881.90.1.
4. Jacobi CGJ. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1846;30:127–156. DOI: 10.1515/crll.1846.30.127.
5. Hermite M. Sur la fonction exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1873;77:18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
6. Старовойтов АП, Рябченко НВ. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде. *Труды Московского математического общества.* 2022;83(1):17–36.
7. Лабыч ЮА, Старовойтов АП. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье. *Математический сборник.* 2009;200(7):107–130. DOI: 10.4213/sm4523.
8. Суетин СП. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда. *Успехи математических наук.* 2002;57(1):45–142. DOI: 10.4213/rm475.
9. Суетин СП. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева для аналитических функций. *Математические заметки.* 2009;86(2):290–303. DOI: 10.4213/mzm5262.
10. Медведева ВЮ, Ровба ЕА. Рациональная интерполяция функции $|x|^{\alpha}$ с узлами Чебышева – Маркова первого рода. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;1:6–19. DOI: 10.33581/2520-6508-2023-1-6-19.

References

1. Nikishin EM, Sorokin VN. *Ratsional'nye approksimatsii i ortogonal'nost'* [Rational approximations and orthogonality]. Moscow: Nauka; 1988. 256 p. Russian.
2. Baker GA Jr, Graves-Morris P. *Padé approximants.* London: Addison-Wesley Publishing Company; 1981. 2 volumes (Rota G-C, editor. Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 13–14).

   Russian edition: Baker G Jr, Graves-Morris P. *Approksimatsii Pade. 1. Osnovy teorii. 2. Obobshcheniya i prilozheniya.* Rakhmanov EA, Suetin SP, translators; Gonchar AA, editor. Moscow: Mir; 1986. 502 p.
3. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1881;90:1–17. DOI: 10.1515/crll.1881.90.1.
4. Jacobi CGJ. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1846;30:127–156. DOI: 10.1515/crll.1846.30.127.
5. Hermite M. Sur la fonction exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1873;77:18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
6. Starovoitov AP, Ryabchenko NV. [On determinantal representations of Hermite – Padé polynomials]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva.* 2022;83(1):17–36. Russian.
7. Labych YuA, Starovoitov AP. [Trigonometric Padé approximations for functions with regularly decreasing Fourier coefficients]. *Matematicheskii sbornik.* 2009;200(7):107–130. Russian. DOI: 10.4213/sm4523.

8. Suetin SP. [The Padé approximations and efficient analytic continuation of a power series]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 2002;57(1):45–142. Russian. DOI: 10.4213/rm475.

9. Suetin SP. [On the existence of non-linear Padé – Chebyshev approximations for analytic functions]. *Matematicheskie zametki.* 2009;86(2):290–303. Russian. DOI: 10.4213/mzm5262.

10. Medvedeva VYu, Rouba YA. Rational interpolation of a function $|x|^{\alpha}$ with Chebyshev – Markov nodes of the first kind. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;1:6–19. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2023-1-6-19.

Получена 05.03.2023 / исправлена 05.06.2023 / принята 05.06.2023.
Received 05.03.2023 / revised 05.06.2023 / accepted 05.06.2023.