
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.4

D- И A-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. П. КИРЛИЦА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Для регрессионной функции

$$y(x) = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx),$$

представляющей тригонометрическую сумму порядка k , построены непрерывные D - и A -оптимальные планы экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

с точками спектров

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1,$$

Образец цитирования:

Кирлица В.П. D- и A-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:35–44. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-35-44>
EDN: KDGPZW

For citation:

Kirlitsa VP. D- and A-optimal designs of experiments for trigonometric regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:35–44. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-35-44>
EDN: KDGPZW

Автор:

Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Valery P. Kirlitsa, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kirlitsa@bsu.by



где φ – произвольный угол ($\varphi \geq 0$) такой, что информационная матрица плана эксперимента является невырожденной. Данные планы экспериментов сконструированы для неравноточных наблюдений с дисперсиями

$$d(x) \geq \sigma^2, d(x_i^0) = \sigma^2, \sigma \neq 0, i = \overline{1, n}.$$

Для частного случая рассматриваемой регрессионной функции ($k = 1$) построены насыщенные планы экспериментов для неравноточных наблюдений с дисперсиями, принимающими различные значения в точках спектров этих планов.

Ключевые слова: непрерывные D - и A -оптимальные планы экспериментов; тригонометрическая регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения.

D- AND A-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR TRIGONOMETRIC REGRESSION WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS

V. P. KIRLITSA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Herein for the regression function

$$y(x) = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx)$$

representing a trigonometrical sum of an k order, we constructed continuous D - and A -optimal designs of experiments

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \begin{array}{l} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{array} \right\}$$

with points of a spectrum

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, i = \overline{1, n}, n \geq 2k + 1,$$

where φ is an arbitrary angle ($\varphi \geq 0$), for which the determinant of the information matrix of the experiment design is not equal to zero. These designs of experiments are constructed for heteroscedastic observations with variances

$$d(x) \geq \sigma^2, d(x_i^0) = \sigma^2, \sigma \neq 0, i = \overline{1, n}.$$

For a special case of the considered regression function ($k = 1$), we constructed the saturated designs of experiments for observations with unequal accuracy and dispersions accepting various values in the points of a spectrum of such plans.

Keywords: continuous D - and A -optimal designs of experiments; trigonometric regression; homoscedastic observations; heteroscedastic observations.

Рассмотрим модель наблюдений

$$y_j = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx_j + \theta_{2s+1} \sin sx_j) + \varepsilon(x_j), j = \overline{1, n}, n \geq 2k + 1, \quad (1)$$

где y_j – наблюдаемые переменные; x_j – контролируемые переменные, принадлежащие интервалу $[0, 2\pi)$; $\theta_1, \theta_{2s}, \theta_{2s+1}$ – неизвестные параметры, подлежащие оцениванию; $\varepsilon(x_j)$ – некоррелированные ошибки наблюдений со средним значением, равным нулю, и дисперсией, зависящей от точки наблюдения:

$$D(\varepsilon(x_j)) = d(x_j) > 0, j = \overline{1, n}, n \geq 2k + 1. \quad (2)$$

Здесь функция $d(x)$ – некоторая положительная функция.

В монографиях [1; 2] для модели равноточных наблюдений ($d(x) = \sigma^2, \sigma^2 > 0$) доказано, что план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \begin{array}{l} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{array} \right\} \quad (3)$$

является непрерывным D -оптимальным. Точки спектра плана (3) имеют вид

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1. \quad (4)$$

Для частного случая $n = 2k + 2$ оптимальный план (3) впервые был построен в публикации [3]. В статье [4] обосновано, что план (3) остается D -оптимальным для определенного класса неравноточных наблюдений. Такие планы удалось построить, опираясь на теорему эквивалентности Кифера – Вольфовица. В работе [5] предлагаются другие методы построения планов экспериментов с неравноточными наблюдениями.

В данной публикации будет показано, что план (3) с точками спектра

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k + 1, \quad (5)$$

где φ – произвольный угол ($\varphi \geq 0$) такой, что информационная матрица плана эксперимента является невырожденной, не только D -оптимальный, но и A -оптимальный для определенного класса неравноточных наблюдений. Также будут построены так называемые насыщенные D -оптимальные планы экспериментов для некоторых частных случаев модели наблюдений (1), (2).

Теорема 1. Для модели наблюдений (1), (2) план (3) с точками спектра (5) является одновременно непрерывным D - и A -оптимальным для неравноточных наблюдений с дисперсиями $d(x)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x) \geq \sigma^2, \quad \sigma \neq 0, \quad (6)$$

в котором равенство выполняется в точках спектра (5) плана (3).

Доказательство. Вначале докажем D -оптимальность плана (3) с точками спектра (5). Для этого нужно показать, что будут выполняться условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] для D -оптимальных планов:

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) \leq 2k + 1, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (7)$$

где $f(x) = (1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx)$ – вектор базисных функций; $M(\varepsilon_n^0)$ – информационная матрица плана (3). В неравенстве (7) равенство должно выполняться в точках спектра (5) плана (3).

Докажем, что информационная матрица плана (3), (4) с неравноточными наблюдениями (6) имеет диагональный вид:

$$M(\varepsilon_n^0) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В монографиях [1; 2] приводится доказательство утверждения (8) для равноточных наблюдений с углом $\varphi = 0$. Однако оно фрагментарно и в работе [1, с. 123] представлено для четных значений n . Приведем полное доказательство утверждения (8) для любых n и φ .

Сначала докажем выполнение утверждения (8) для угла $\varphi = 0$. Будем использовать формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

и формулу для суммы геометрической прогрессии. Пусть m и l – натуральные числа, принимающие значения от 1 до k , причем $m \neq l$. Применяя формулы Эйлера, вычислим диагональные элементы информационной матрицы, начиная со второго:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left(1 + \cos \frac{4\pi m(j-1)}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^n \left(e^{i \frac{4\pi m(j-1)}{n}} + e^{-i \frac{4\pi m(j-1)}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{1 - e^{i4\pi m}}{1 - e^{i \frac{4\pi m}{n}}} + \frac{1 - e^{-i4\pi m}}{1 - e^{-i \frac{4\pi m}{n}}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{(1 - e^{i4\pi m}) \left(1 - e^{-i \frac{4\pi m}{n}} \right) + (1 - e^{-i4\pi m}) \left(1 - e^{i \frac{4\pi m}{n}} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4\pi m}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \frac{2 - 2 \cos 4\pi m - 2 \cos \frac{4\pi m}{n} + 2 \cos 4\pi m \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4\pi m}{n}} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left(1 - \cos \frac{4\pi m(j-1)}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{4\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Недиагональные элементы равны нулю. Используя формулы Эйлера, получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{2\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1 - e^{i2\pi m}}{1 - e^{i \frac{2\pi m}{n}}} + \frac{1 - e^{-i2\pi m}}{1 - e^{-i \frac{2\pi m}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{-2 \cos \frac{2\pi m}{n} + 2 \cos \frac{2\pi m}{n}}{2 - 2 \cos \frac{2\pi m}{n}} = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi m(j-1)}{n} = \frac{1}{2ni} \left(\frac{1 - e^{i2\pi m}}{1 - e^{i \frac{2\pi m}{n}}} - \frac{1 - e^{-i2\pi m}}{1 - e^{-i \frac{2\pi m}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{2 \sin \frac{2\pi m}{n} + 2 \sin 2\pi m \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{2\pi m}{n}} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi m(j-1)}{n} \cos \frac{2\pi l(j-1)}{n} = \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n \sin \frac{2\pi(m+l)(j-1)}{n} + \sum_{j=1}^n \sin \frac{2\pi(m-l)(j-1)}{n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (9)–(13) обосновывают, что для точек спектра (4) плана (3) будет иметь место формула (8).

Теперь покажем, что и в общем случае для точек спектра (5) формулы (9)–(13) останутся справедливыми. Но доказательство этих формул претерпит некоторые изменения. Выполним расчеты только для формулы (9) (доказательство формул (10)–(13) может быть проведено по аналогичной схеме). Чтобы доказать выполнимость формулы (9), нам понадобятся уже обоснованные формулы (9), (10) и (12). Итак, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 m \left(\frac{2\pi(j-1)}{n} + \varphi \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \left(\cos \frac{2\pi m(j-1)}{n} \cos m\varphi - \sin \frac{2\pi m(j-1)}{n} \sin m\varphi \right)^2 = \\ &= \cos^2 m\varphi \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} + \sin^2 m\varphi \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2\pi m(j-1)}{n} - \frac{\sin 2m\varphi}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{4\pi m(j-1)}{n} = \\ &= \frac{\cos^2 m\varphi}{2} + \frac{\sin^2 m\varphi}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для плана экспериментов (3) с точками спектра (5) выполняется формула (8). Опираясь на формулу (8), легко проверить выполнимость критерия D -оптимальности (7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) &= \frac{\sigma^2}{d(x)} \left(1 + 2(\cos^2 x + \sin^2 x + \dots + \cos^2 kx + \sin^2 kx) \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{d(x)} (2k + 1) \leq 2k + 1. \end{aligned} \quad (14)$$

В неравенстве (14) равенство достигается в точках спектра (5) плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. D -оптимальность плана (3) с точками спектра (5) доказана.

Множество функций, удовлетворяющих неравенству (6), обширно. Ему удовлетворяют равнооточные наблюдения с дисперсиями $d(x) = \sigma^2$, а также, например, функции ($\varphi = 0$)

$$d(x) = \sigma^2 + \beta |\sin 2nx|, \quad \beta > 0,$$

$$d(x) = \sigma^2 + \beta (x \bmod \Delta), \quad \beta > 0, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n},$$

$$d(x) = \sigma^2 \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \left(x - s\Delta + \frac{\Delta}{2} \right)^2}, \quad x \in [(s-1)\Delta, s\Delta], \quad s = \overline{1, n}, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n}.$$

Можно предложить и ряд других функций.

Перейдем к доказательству того, что план (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) будет также и A -оптимальным.

Наряду с регрессионной функцией

$$y = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx) \quad (15)$$

рассмотрим регрессионную функцию

$$y_1 = \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx). \quad (16)$$

В теореме 1 было доказано, что для регрессионной функции (15) план экспериментов (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) является D -оптимальным. Информационная матрица этого плана определяется формулой (8). Тот же план экспериментов с точками спектра (5) будет D -оптимальным и для регрессионной функции (16) в силу выполнимости критерия D -оптимальности Кифера – Вольфовица. Действительно, информационная матрица этого плана для регрессионной функции (16) имеет вид

$$M_1(\varepsilon_n^0) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Матрица (17) имеет размерность $2k \times 2k$. Дисперсионная матрица в соответствии с формулой (17) равна

$$D_1(\varepsilon_n^0) = M_1^{-1}(\varepsilon_n^0) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В силу формулы (18) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(x)} f'(x) M_1^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) &= \\ = \frac{\sigma^2}{d(x)} 2(\cos^2 x + \sin^2 x + \dots + \cos^2 kx + \sin^2 kx) &= \frac{\sigma^2}{d(x)} 2k \leq 2k. \end{aligned} \quad (19)$$

В неравенстве (19) равенство достигается в точках спектра (5) плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. План (3) с точками спектра (5) является D -оптимальным для регрессионной функции (16).

Итак, для плана экспериментов (3) с точками спектра (5) регрессионные функции (15) и (16) являются эквивалентными. Более того, этот план не только D -оптимален, но и A -оптимален для регрессионной функции (16). Чтобы обосновать это, обратимся к следующей теореме.

Теорема 2 [2, с. 150, теорема 2.11.1]. *План ε^0 является одновременно D - и A -оптимальным, если*

$$kD(\varepsilon^0) = D^2(\varepsilon^0), \quad D(\varepsilon^0) = M^{-1}(\varepsilon^0),$$

при этом

$$\text{Sp}D(\varepsilon^0) = km,$$

где k – некоторая константа и m – число неизвестных параметров.

Первое равенство в нашем случае принимает вид

$$k\sigma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} = \sigma^4 \begin{pmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Из формулы (20) вытекает, что $k = 2\sigma^2$. Так как $m = 2k$, имеем

$$\text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0) = km = 2\sigma^2 \cdot 2k = 4k\sigma^2.$$

Регрессионные функции (15) и (16) также эквивалентны в смысле их A -оптимальности для плана экспериментов (3) с точками спектра (5), причем

$$\text{Sp}D(\varepsilon_n^0) = \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0) + \sigma^2 = (4k + 1)\sigma^2.$$

Действительно, пусть ε – произвольный невырожденный план экспериментов

$$\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} x_1, \dots, x_n \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{matrix} \right\},$$

где точки спектра x_1, \dots, x_n принадлежат интервалу $[0, 2\pi)$. Наблюдения являются неравноточными и имеют дисперсии, удовлетворяющие неравенству (6), в котором равенство выполняется в точках спектра плана ε . Обозначим через $D_1(\varepsilon) = M_1^{-1}(\varepsilon)$ дисперсионную матрицу для регрессионной функции (16). Тогда дисперсионная матрица для регрессионной функции (15) для плана экспериментов ε имеет следующий блочный вид:

$$D(\varepsilon) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & \dots & b_{1,2k+1} \\ b_{1,2} & & & \\ \vdots & & D_1(\varepsilon) & \\ b_{1,2k+1} & & & \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\text{Sp}D_1(\varepsilon) \geq \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0)$, так как ε_n^0 – A -оптимальный план для регрессионной функции (16). Очевидно, что

$$\text{Sp}D(\varepsilon) = \sigma^2(1 + \text{Sp}D_1(\varepsilon)) \geq \sigma^2(1 + \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0)).$$

Из последнего неравенства следует, что $\text{Sp}D(\varepsilon)$ принимает минимальное значение тогда, когда $\varepsilon = \varepsilon_n^0$, т. е. план ε_n^0 является A -оптимальным планом для регрессионной функции (15),

$$\text{Sp}D(\varepsilon_n^0) = \text{Sp}D_1(\varepsilon_n^0) + \sigma^2 = (4k + 1)\sigma^2.$$

Теорема 1 доказана.

Для регрессионной функции

$$y = \theta_1 + \theta_2 \cos x + \theta_3 \sin x \quad (21)$$

были проведены компьютерные расчеты для планов экспериментов

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} x, & y, & z \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Чтобы планы (22) были невырожденными, должны выполняться неравенства $x < y < z$. Компьютерные расчеты подтвердили правильность утверждений теоремы 1.

Следствие теоремы 1. Для регрессионной функции (16) план экспериментов (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) является одновременно D - и A -оптимальным.

Особенность построенных планов экспериментов (3) с неравноточными наблюдениями состоит в том, что в точках спектров (5) этих планов дисперсии наблюдений принимают одни и те же значения, равные σ^2 . Оказывается, что для регрессионной функции (21) и ее частного случая, когда свободный член отсутствует, можно построить насыщенные D -оптимальные планы, у которых дисперсии наблюдений в точках спектров этих планов могут быть различными. Насыщенные планы экспериментов – это планы, у которых число точек спектра совпадает с числом неизвестных параметров.

Теорема 3. Для регрессионной функции

$$y = \theta_1 \cos x + \theta_2 \sin x \quad (23)$$

план экспериментов

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{4} + \varphi, & \frac{3\pi}{4} + \varphi \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

является D -оптимальным для дисперсий наблюдений $d(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$d(x) \geq \frac{1}{2} \left((d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi)) \cos^2 x + (d_2(1 - \sin 2\varphi) + d_1(1 + \sin 2\varphi)) \sin^2 x + (d_1 - d_2) \cos 2\varphi \sin 2x \right), \quad (25)$$

где $d_1(x) = d\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$; $d_2(x) = d\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right)$; φ – произвольный угол ($\varphi \geq 0$) такой, для которого план экспериментов (24) является невырожденным.

Доказательство. Информационная матрица плана (24) равна

$$\begin{aligned} M(\varepsilon^0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right), & \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right), & \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} (\cos \varphi - \sin \varphi)^2 & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 & -\cos 2\varphi \\ -\cos 2\varphi & (\cos \varphi - \sin \varphi)^2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1}(1 - \sin 2\varphi) + \frac{1}{d_2}(1 + \sin 2\varphi) & \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \cos 2\varphi \\ \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \cos 2\varphi & \frac{1}{d_1}(1 + \sin 2\varphi) + \frac{1}{d_2}(1 - \sin 2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (26) \end{aligned}$$

Матрица, обратная к матрице (26), если пропустить промежуточные вычисления, имеет вид

$$M^{-1}(\varepsilon^0) = \begin{pmatrix} d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi) & (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \\ (d_1 - d_2)\cos 2\varphi & d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Для D -оптимального плана экспериментов (24) должны выполняться условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица:

$$\frac{1}{d(x)}(\cos x, \sin x)M^{-1}(\varepsilon^0)\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \frac{1}{d(x)}\left((d_2(1 + \sin 2\varphi) + d_1(1 - \sin 2\varphi))\cos^2 x + (d_2(1 - \sin 2\varphi) + d_1(1 + \sin 2\varphi))\sin^2 x + (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \sin 2x\right) \leq 2. \quad (27)$$

Разрешая неравенство (27) относительно функции $d(x)$, получаем требуемое неравенство (25). Нетрудно проверить, что в точках спектра плана (24) неравенство (25) обращается в равенство. Теорема 3 доказана.

Замечание. Для регрессионной функции (23) невырожденный план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \varphi \geq 0, p_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n}, n \geq 3 \right\} \quad (28)$$

с дисперсиями наблюдений $d(x)$, удовлетворяющими неравенству $d(x) \geq \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$, в котором равенство выполняется в точках спектра плана (28), является одновременно D - и A -оптимальным в силу доказанной теоремы 1. Таким образом, для регрессионной функции (23) существуют два различных типа D -оптимальных планов экспериментов. Это планы (24) и (28).

Для регрессионной функции (21) можно построить насыщенные D -оптимальные планы экспериментов с дисперсиями наблюдений $d(x)$, принимающими различные значения в точках спектров этих планов. Введем следующие обозначения: $d_1 = d(0) > 0$, $d_2 = d\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0$, $d_3 = d\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$.

Теорема 4. Для регрессионной функции (21) насыщенный D -оптимальный план экспериментов имеет вид

$$\varepsilon_3^0 = \left\{ \begin{matrix} 0, & \frac{2\pi}{3}, & \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \quad (29)$$

с дисперсиями наблюдений $d(x)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x) \geq \frac{1}{9}\left((4d_1 + d_2 + d_3)\cos^2 x + 3(d_2 + d_3)\sin^2 x + \sqrt{3}(d_3 - d_2)\sin 2x + 2(2d_1 - d_2 - d_3)\cos x + 2\sqrt{3}(d_2 - d_3)\sin x + d_1 + d_2 + d_3\right), \quad (30)$$

в котором равенство выполняется в точках спектра плана (29).

Доказательство. Для D -оптимального плана ε_3^0 по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x)}(1, \cos x, \sin x)M^{-1}(\varepsilon_3^0)\begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \leq 3, x \in [0, 2\pi), \quad (31)$$

причем в неравенстве (31) равенство должно достигаться в точках спектра плана (29). Проверим справедливость этого утверждения.

Информационная матрица плана равна

$$M(\varepsilon_3^0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} (1, 1, 0) + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & k & e \\ c & e & m \end{pmatrix},$$

где

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1}, b = d_1^{-1} - \frac{1}{2}d_2^{-1} - \frac{1}{2}d_3^{-1}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}d_3^{-1}, e = -\frac{\sqrt{3}}{4}d_2^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4}d_3^{-1},$$

$$k = d_1^{-1} + \frac{1}{4}d_2^{-1} + \frac{1}{4}d_3^{-1}, m = \frac{3}{4}d_2^{-1} + \frac{3}{4}d_3^{-1}. \quad (32)$$

Матрица, обратная к матрице $M(\varepsilon_3^0)$, имеет вид

$$M^{-1}(\varepsilon_3^0) = \frac{3}{akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m} \begin{pmatrix} km - e^2 & ce - bm & be - kc \\ ce - bm & am - c^2 & bc - ae \\ be - kc & bc - ae & ak - b^2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Используя формулу (32), преобразуем элементы матрицы (33):

$$km - e^2 = \frac{3(d_1 + d_2 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, ce - bm = \frac{3(2d_1 - d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3}, be - kc = \frac{3\sqrt{3}(d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3},$$

$$am - c^2 = \frac{3(d_2 + 4d_1 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, bc - ae = \frac{3\sqrt{3}(d_3 - d_2)}{4d_1d_2d_3}, ak - b^2 = \frac{9(d_3 + d_2)}{4d_1d_2d_3}, \quad (34)$$

$$akm + 2bec - c^2k - e^2a - b^2m = \frac{27}{4d_1d_2d_3}.$$

Разрешая неравенство (31) относительно функции $d(x)$ и учитывая соотношения (33) и (34), получаем требуемое неравенство (30). Легко проверить, что неравенство (30) обращается в равенство в точках спектра плана (29). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 4 доказана.

Точки спектра плана (29) можно сдвинуть на угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда

$$x_1^0 = \varphi, x_2^0 = \frac{2\pi}{3} + \varphi, x_3^0 = \frac{4\pi}{3} + \varphi \quad (35)$$

есть точки спектра такого плана экспериментов, при этом изменится вид функций $d(x)$ в неравенстве (30). Расчеты, проведенные для угла $\varphi = \frac{\pi}{6}$, подтверждают это. Пусть $d_1 = d(x_1^0)$, $d_2 = d(x_2^0)$, $d_3 = d(x_3^0)$. Следуя теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица, получим выражение для дисперсий наблюдений $d(x)$, соответствующих оптимальному плану экспериментов с точками спектра (35):

$$d(x) \geq \frac{1}{9}(3(d_1 + d_2)\cos^2 x + (d_1 + d_2 + 4d_3)\sin^2 x + \sqrt{3}(d_1 - d_2)\sin 2x + 2\sqrt{3}(d_1 - d_2)\cos x + 2(d_1 + d_2 - 2d_3)\sin x + d_1 + d_2 + d_3). \quad (36)$$

В точках спектра (35) плана с углом $\varphi = \frac{\pi}{6}$ неравенство (36) обращается в равенство.

Можно было бы получить и обобщение неравенства (36) для произвольных углов φ так, как это было сделано в теореме 3. Однако расчеты в данном случае становятся намного более сложными и громоздкими.

Итак, для регрессионной функции (21) и ее частного случая без свободного члена существуют два различных типа D -оптимальных планов. Это планы (24), (29) и планы, которые строятся на основе теоремы 1.

Возникает вопрос: можно ли для регрессионной функции (21) с четырьмя наблюдениями построить оптимальный план

$$\varepsilon_4^0 = \left\{ \begin{matrix} 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \quad (37)$$

с неравноточными наблюдениями, для которого дисперсии наблюдений в точках спектра плана (37) будут различными? В публикации [4] доказано, что сделать это нельзя.

Библиографические ссылки

1. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1987. 320 с.
2. Федоров ВВ. *Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов)*. Москва: Наука; 1971. 312 с. (Физико-математическая библиотека инженера).
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimension regression. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Кирлица ВП. D-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии на отрезке с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:80–85. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-80-85.
5. Ермаков СМ, Бродский ВЗ, Жиглявский АА, Козлов ВП, Малютков МБ, Мелас ВБ и др. *Математическая теория планирования эксперимента*. Ермаков СМ, редактор. Москва: Наука; 1983. 392 с. (Справочная математическая библиотека).

References

1. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.
2. Fedorov VV. *Teoriya optimal'nogo eksperimenta (planirovanie regressionnykh eksperimentov)* [The theory of optimal design (planning regression experiments)]. Moscow: Nauka; 1971. 312 p. (Fiziko-matematicheskaya biblioteka inzhenera). Russian.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimension regression. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Kirlitsa VP. D-optimal designs of experiments for trigonometric regression on interval with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:80–85. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-80-85.
5. Ermakov SM, Brodskii VZ, Zhiglyavskii AA, Kozlov VP, Maluytov MB, Melas VB, et al. *Matematicheskaya teoriya planirovaniya eksperimenta* [The mathematical theory of experiment design]. Ermakov SM, editor. Moscow: Nauka; 1983. 392 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka). Russian.

Получена 22.05.2023 / исправлена 02.06.2023 / принята 05.06.2023.
Received 22.05.2023 / revised 02.06.2023 / accepted 05.06.2023.