УДК 519.64

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА С ДИАГОНАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ МАТРИЦЕЙ ДЛЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. В. ИГНАТЕНКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Рассматривается проблема приближенного вычисления интегралов от функциональных матриц, в частности вопросы построения и исследования квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций, которые являлись бы обобщениями соответствующих квадратурных правил (типа Гаусса) в случае скалярных функций. Получены квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности в различной форме для приближенного интегрирования матричнозначных функций второго порядка и, как обобщение, произвольного фиксированного порядка. Проанализированы частные случаи квадратурных правил, когда в качестве веса выступает скалярная функция либо диагональная функциональная матрица. Исследована сходимость предложенного квадратурного процесса к точному значению матричного интеграла. Представленные результаты основаны на применении отдельных известных фактов теории интерполирования и приближенного интегрирования скалярных функций. Изложение материала проиллюстрировано примерами.

Ключевые слова: интерполяционная квадратурная формула; алгебраическая степень точности; квадратуры типа Гаусса; матричнозначная функция; матричный алгебраический многочлен.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2).

Образец цитирования:
Игнатенко МВ. Квадратурные формулы типа Гаусса с диагональной весовой матрицей для матричнозначных функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:29–44.
EDN: AEJHDH

For citation:
Ignatenko MV. Quadrature formulas of the Gaussian type with a diagonal weight matrix for matrix-valued functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:29–44. Russian.
EDN: AEJHDH

Автор:
Марина Викторовна Игнатенко – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Author:
Marina V. Ignatenko, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
ignatenkomv@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024;1:29–44
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2024;1:29–44

QUADRATURE FORMULAS OF THE GAUSSIAN TYPE WITH A DIAGONAL WEIGHT MATRIX FOR MATRIX-VALUED FUNCTIONS

M. V. IGNATENKO[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Abstract. This paper in the field of matrix analysis is devoted to the problem of approximate calculation of functional matrix integrals. In particular, questions of constructing and studying quadrature formulas of the highest algebraic degree of accuracy for matrix-valued functions, which would be generalisations of the corresponding (Gaussian type) quadrature rules in the case of scalar functions, are considered. Quadrature formulas of the highest algebraic degree of accuracy of various form are constructed for the approximate integration of matrix-valued functions of the second order and, as a generalisation, of an arbitrary fixed order. Particular cases of quadrature rules are considered, when a scalar or diagonal functional matrix acts as a weight function. The convergence of the proposed quadrature process to the exact value of the matrix integral is investigated. The obtained results are based on the application of certain known facts of the theory of interpolation and approximate integration of scalar functions. The presentation of the material is illustrated by some examples.

Keywords: interpolation quadrature formula; algebraic degree of accuracy; quadratures of the Gaussian type; matrix-valued function; matrix algebraic polynomial.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.4.01.2).

Введение

Исследования в области матричного анализа вызывают интерес с точки зрения развития его теории и приложений. Квадратурные правила для вычисления интегралов от функций находят широкое применение при построении приближенных методов решения различных классов задач (например, решение интегральных уравнений).

Одним из обобщений задачи приближенного интегрирования функций является задача аппроксимации матричных интегралов. Основные вопросы, которые здесь возникают, – это разрешимость самой задачи, построение формул приближенного интегрирования матричнозначных функций, изучение их погрешностей, сходимости к точному значению матричного интеграла и др. Как и в скалярном случае, важным классом квадратурных формул для интегралов от функциональных матриц являются правила наивысшей алгебраической степени точности.

Цель работы состоит в построении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для приближенного вычисления матричных интегралов, которые являлись бы обобщением соответствующих квадратурных правил типа Гаусса, известных для скалярного случая.

В работе приведены необходимые сведения из теории полиномиальных матриц: их определение, представление в виде матричного многочлена, основные действия над матричными многочленами (сложение, вычитание, правое и левое умножение и деление) с учетом свойства некоммутативности умножения матриц. Определено понятие ортогональных матричных полиномов.

Построены квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности в различной форме для приближенного интегрирования матричнозначных функций второго порядка и, как обобщение, произвольного фиксированного порядка. Рассмотрены частные случаи квадратурных правил, когда в качестве веса выступает скалярная функция либо диагональная функциональная матрица. Исследована сходимость предложенного крадратурного процесса к точному значению матричного интеграла. Полученные результаты базируются на применении фактов теории приближенного интегрирования скалярных функций, понятия ортогональных матричных полиномов и обобщают класс квадратурных правил типа Гаусса, известных для скалярного случая.

Приведенные примеры направлены на реализацию алгоритмов для вычисления приближенных значений матричных интегралов частного вида и демонстрацию их эффективности.

Предварительные сведения из теории полиномиальных матриц

Пусть $A(x)$ – квадратная матрица порядка n, элементами которой являются алгебраические многочлены относительно скалярной переменной x с коэффициентами из некоторого заданного числового поля:

$$A(x) = \left[a_{ik}(x)\right]_{i,\,k=1}^{n} = \left[a_{ik}^{(0)}x^{m} + a_{ik}^{(1)}x^{m-1} + \ldots + a_{ik}^{(m)}\right]_{i,\,k=1}^{n}. \quad (1)$$

Матрицу $A(x)$ вида (1) можно представить в форме матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \tag{2}$$

по степеням переменной x, где матричные коэффициенты $A_j = \left[a_{ik}^{(j)}\right]_{i,\,k=1}^{n}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$. Число m называется степенью многочлена (2), если $A_0 \neq 0$, а значение n – его порядком. Будем говорить [1], что многочлен (2) регулярный, если $\det A_0 \neq 0$.

Рассмотрим [1] основные действия над матричными многочленами. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – матричные многочлены одинакового порядка, а m – наибольшая из их степеней. Тогда эти многочлены можно записать в виде

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,\ B(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m.$$

Сумма (разность) данных матричных многочленов одного и того же порядка может быть представлена в форме многочлена, степень которого не превосходит большей из степеней этих многочленов:

$$A(x) \pm B(x) = \left(A_0 \pm B_0\right)x^m + \left(A_1 \pm B_1\right)x^{m-1} + \ldots + \left(A_m \pm B_m\right).$$

Пусть заданы матричные многочлены $A(x)$ и $B(x)$ степеней m и p соответственно одинакового порядка n:

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m\ (A_0 \neq 0),\ B(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p\ \ (B_0 \neq 0).$$

Тогда их произведение

$$A(x)B(x) = A_0 B_0 x^{m+p} + \left(A_0 B_1 + A_1 B_0\right)x^{m+p-1} + \ldots + A_m B_p. \tag{3}$$

Если же изменить порядок множителей, т. е. умножить $B(x)$ на $A(x)$, то в общем случае получим другой многочлен.

Заметим, что в отличие от произведения скалярных многочленов произведение матричных многочленов (3) может иметь степень, которая меньше суммы степеней множителей. Если хотя бы один из двух множителей является регулярным многочленом, то в этом случае степень произведения равна сумме степеней множителей.

Пусть, как и ранее, $A(x)$ и $B(x)$ – два матричных многочлена степеней m и p соответственно одинакового порядка n, причем $B(x)$ – регулярный многочлен:

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m\ (A_0 \neq 0),\ B(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p\ \ (\left|B_0\right| \neq 0).$$

Будем говорить, что матричные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ являются соответственно правым частным и правым остатком при делении $A(x)$ на $B(x)$, если

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \tag{4}$$

и степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя $B(x)$. Аналогично будем называть многочлены $\hat{Q}(x)$ и $\hat{R}(x)$ соответственно левым частным и левым остатком при делении $A(x)$ на $B(x)$, если

$$A(x) = B(x)\hat{Q}(x) + \hat{R}(x) \tag{5}$$

и степень остатка $\hat{R}(x)$ меньше степени делителя $B(x)$. В общем случае многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ не совпадают с многочленами $\hat{Q}(x)$ и $\hat{R}(x)$.

Известно [1], что как правое, так и левое деление матричных многочленов одинакового порядка всегда выполнимо и однозначно, если делитель является регулярным многочленом.

Формулы (4) и (5) будут использоваться далее при построении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для интегралов от матричнозначных функций.

О квадратурных формулах наивысшей алгебраической степени точности

Пусть $F(x)$ – функциональная матрица с элементами $f_{ij}(x)$. Рассмотрим матричнозначный интеграл со скалярным весом $p(x)$ вида

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \int_a^b p(x)\left[f_{ij}(x)\right]dx = \left[\int_a^b p(x)f_{ij}(x)dx\right]. \tag{6}$$

Для приближенного вычисления интеграла (6) обратимся к формуле

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k), \tag{7}$$

где квадратурная сумма

$$\sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k \left[f_{ij}(x_k) \right] = \left[\sum_{k=1}^{n} A_k f_{ij}(x_k) \right]$$

содержит в качестве параметров коэффициенты A_k, узлы x_k (чаще $x_k \in [a, b]$, что необязательно) ($k = 1, 2, \ldots, n$) и целое неотрицательное число n. Выбор этих параметров не всегда произволен и обычно подчинен одной или нескольким целям: 1) минимизации погрешности квадратурной формулы; 2) упрощению вычислений (для этого можно выбрать узлы равноотстоящими или же потребовать равенства коэффициентов $A_k \equiv C$ и рассмотреть формулу $\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \left[C\sum_{k=1}^{n} f_{ij}(x_k) \right]$, которая имеет $n + 2$ параметра: $C, n, x_1, x_2, \ldots, x_n$); 3) увеличению степени точности для определенных (например, алгебраических) матричных многочленов до наивысшей возможной.

Так как число параметров A_k и x_k равно $2n$, то естественно ожидать, что квадратурная формула (7) при заданном числе n узлов будет иметь алгебраическую степень точности $2n - 1$. Можно предполагать, что такая степень точности является, как правило, наивысшей возможной.

Известно (см., например, [2]), что в случае скалярных функций $f_{ij}(x)$ при произвольном выборе попарно различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ квадратурная формула $\int_a^b p(x) f_{ij}(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f_{ij}(x_k)$ с весом $p(x)$ ($p(x) \geq 0,\ x \in [a, b],\ \int_a^b p(x)dx > 0$) и коэффициентами

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} dx \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, является точной (инвариантной) для алгебраических многочленов степени не выше $n - 1$. Иными словами, если $f_{ij}(x)$ – алгебраические многочлены степени, меньшей или равной $n - 1$, то $\int_a^b p(x) f_{ij}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f_{ij}(x_k)$, что влечет $\int_a^b p(x)F(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k)$. Если же в дополнение к указанному правилу (8) для коэффициентов A_k в качестве квадратурных узлов x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) выбрать корни многочлена $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, ортогонального относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к любому алгебраическому многочлену степени не выше $n - 1$, то алгебраическая степень точности квадратурной формулы (7) увеличится и станет максимально возможной, равной $2n - 1$.

Вышеприведенная схема выбора узлов и коэффициентов квадратурного правила $\int_a^b p(x) f_{ij}(x)dx \approx$ $\approx \sum_{k=1}^{n} A_k f_{ij}(x_k)$ с весом $p(x)$ ($p(x) \geq 0,\ x \in [a, b],\ \int_a^b p(x)dx > 0$) обеспечивает (см., например, [2]) его существование и единственность для любого натурального значения n, что влечет существование и единственность соответствующей квадратурной формулы вида (7).

Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности, рассматриваемые далее для матричнозначных функций, как и в случае скалярных функций, будем называть квадратурными формулами типа Гаусса.

Квадратурные формулы типа Гаусса для матричнозначных функций в случае скалярной весовой функции

Рассмотрим аналогичные результаты, полученные при решении проблемы построения квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций $F(x) = \left[f_{ij}(x) \right]$ в случае скалярного веса. Пусть, как и ранее, весовая функция $p(x)$ удовлетворяет условиям $p(x) \geq 0$, $x \in [a, b],\ \int_a^b p(x)dx > 0.$

Теорема 1. *Если узлы* x_k *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*) являются корнями многочлена* $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$*, ортогонального относительно веса* $p(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *к любому алгебраическому многочлену степени, меньшей или равной* $n - 1$*, то квадратурная формула (7) с коэффициентами* A_k *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*) вида (8) точна для любых матричных алгебраических многочленов степени не выше* $2n - 1$.

Доказательство. Пусть $f_{ij}(x)$ – алгебраические многочлены степени, меньшей или равной $2n - 1$. Через $\omega_n(x)$ обозначим алгебраический многочлен степени n, ортогональный относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени: $\int\limits_a^b p(x)\omega_n(x)x^\nu dx = 0$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n - 1$).

Выполним деление $f_{ij}(x)$ на $\omega_n(x)$. Имеем

$$f_{ij}(x) = \omega_n(x)q_{ij}(x) + r_{ij}(x), \tag{9}$$

где $q_{ij}(x)$ и $r_{ij}(x)$ – частное и остаток, являющиеся алгебраическими многочленами степени не выше $n - 1$. Умножим обе части равенства (9) на $p(x)$, проинтегрируем их от a до b и получим

$$\int\limits_a^b p(x)f_{ij}(x)dx = \int\limits_a^b p(x)\omega_n(x)q_{ij}(x)dx + \int\limits_a^b p(x)r_{ij}(x)dx = \int\limits_a^b p(x)r_{ij}(x)dx, \tag{10}$$

так как интеграл $\int\limits_a^b p(x)\omega_n(x)q_{ij}(x)dx$ равен нулю в силу условия ортогональности $\omega_n(x)$ относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени.

Через $R(x)$ обозначим функциональную матрицу с элементами $r_{ij}(x)$. Из равенств (6) и (10) имеем

$$\int\limits_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int\limits_a^b p(x)f_{ij}(x)dx\right] = \left[\int\limits_a^b p(x)r_{ij}(x)dx\right] = \int\limits_a^b p(x)R(x)dx.$$

В качестве квадратурных узлов x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) выберем корни многочлена $\omega_n(x)$. Интеграл $\int\limits_a^b p(x)r_{ij}(x)dx$ точно равен квадратурной сумме $\sum\limits_{k=1}^n A_k r_{ij}(x_k)$, так как степень многочлена $r_{ij}(x)$ не выше $n - 1$, а квадратурные коэффициенты по условию определены правилом (8), т. е. квадратурная формула является интерполяционной и, следовательно, точной для всех алгебраических многочленов степени, меньшей или равной $n - 1$.

В силу представления (9) имеем $r_{ij}(x_k) = f_{ij}(x_k)$. С учетом равенства (10) получим $\int\limits_a^b p(x)f_{ij}(x)dx = \sum\limits_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k)$ и придем к точному равенству $\int\limits_a^b p(x)F(x)dx = \sum\limits_{k=1}^n A_k F(x_k)$, если $F(x)$ – матричный алгебраический многочлен степени не выше $2n - 1$.

Покажем, что квадратурная формула (7), в которой выбор узлов и коэффициентов определен теоремой 1, не может быть точна для всех матричных алгебраических многочленов степени $2n$, т. е. число $2n - 1$ является наивысшей алгебраической степенью точности этой формулы, и, следовательно, приближенное равенство (7) – квадратура типа Гаусса.

Теорема 2. *Ни при каких коэффициентах* A_k *и узлах* x_k *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*) приближенное равенство (7) не может быть точным для всех матричных алгебраических многочленов степени* $2n$.

Доказательство. По квадратурным узлам x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) образуем функцию $\omega_n(x) = (x - x_1) \times (x - x_2)\ldots(x - x_n)$ и рассмотрим случай функциональной матрицы $F(x)$ с одинаковыми элементами $f_{ij}(x) = \omega_n^2(x)$ – алгебраическими многочленами степени $2n$. Очевидно, что $f_{ij}(x_k) = \omega_n^2(x_k) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. квадратурная сумма $\sum\limits_{k=1}^n A_k F(x_k) = \left[\sum\limits_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k)\right]$ будет нулевой матрицей, в то время как интеграл $\int\limits_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int\limits_a^b p(x)\omega_n^2(x)dx\right] \neq [0]$. Таким образом, существует матричный алгебраический многочлен степени $2n$, для которого равенство (7) не является точным.

Квадратурные формулы типа Гаусса для матричнозначных функций в случае диагональной весовой матрицы

Рассмотрим построение квадратурных формул вида

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k), \tag{11}$$

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k), \tag{12}$$

где весовая функция $p(x) = \operatorname{diag}\left[p_1(x),\ p_2(x),\ \ldots,\ p_m(x)\right]$ и ее элементы $p_i(x)$ удовлетворяют условиям $p_i(x) \geq 0,\ x \in [a,\ b],\ \int_a^b p_i(x)dx > 0$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$).

Заметим, что в левой части правила (11) произведение $p(x)F(x)$ – матрица с элементами $p_i(x)f_{ij}(x)$, а в левой части равенства (12) произведение $F(x)p(x)$ – матрица с элементами $p_j(x)f_{ij}(x)$, поэтому

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int_a^b p_i(x)f_{ij}(x)dx\right],\ \int_a^b F(x)p(x)dx = \left[\int_a^b p_j(x)f_{ij}(x)dx\right].$$

Через $P_{n\nu}(x)$ обозначим алгебраический многочлен степени n, ортогональный относительно веса $p_\nu(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ ко всем алгебраическим многочленам низшей степени, т. е.

$$\int_a^b p_\nu(x)P_{n\nu}(x)x^i dx = 0$$

для значений $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ и $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Корни многочлена $P_{n\nu}(x)$ различны, будем обозначать их через $x_k^{(\nu)}$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Для скалярных функций $f(x)$ квадратурная формула вида

$$\int_a^b p_\nu(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(\nu)} f\left(x_k^{(\nu)}\right), \tag{13}$$

где квадратурные коэффициенты

$$A_k^{(\nu)} = \int_a^b p_\nu(x)\frac{\omega_{n\nu}(x)}{\left(x - x_k^{(\nu)}\right)\omega'_{n\nu}\left(x_k^{(\nu)}\right)}dx,\ \ \omega_{n\nu}(x) = \left(x - x_1^{(\nu)}\right)\left(x - x_2^{(\nu)}\right)\ldots\left(x - x_n^{(\nu)}\right),$$

будет точна, если $f(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше $2n - 1$. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int_a^b p_i(x)f_{ij}(x)dx\right] \approx \left[\sum_{k=1}^{n} A_k^{(i)} f_{ij}\left(x_k^{(i)}\right)\right], \tag{14}$$

$$\int_a^b F(x)p(x)dx = \left[\int_a^b p_j(x)f_{ij}(x)dx\right] \approx \left[\sum_{k=1}^{n} A_k^{(j)} f_{ij}\left(x_k^{(j)}\right)\right]. \tag{15}$$

Заметим, что в развернутом виде матрица $\left[\sum_{k=1}^{n} A_k^{(i)} f_{ij}\left(x_k^{(i)}\right)\right]$ в правой части приближенного равенства (14) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & A_k^{(1)} f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) & \ldots & A_k^{(1)} f_{1m}\left(x_k^{(1)}\right) \\ A_k^{(2)} f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & A_k^{(2)} f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) & \ldots & A_k^{(2)} f_{2m}\left(x_k^{(2)}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_k^{(m)} f_{m1}\left(x_k^{(m)}\right) & A_k^{(m)} f_{m2}\left(x_k^{(m)}\right) & \ldots & A_k^{(m)} f_{mm}\left(x_k^{(m)}\right) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Через A_k обозначим диагональную матрицу с элементами $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \ldots, A_k^{(m)}$, а через $\tilde{F}(x_k)$ – матрицу, полученную подстановкой корня $x_k^{(i)}$ в i-ю строку матрицы $F(x)$ вместо аргумента x. Тогда запишем матрицу (16) в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \tilde{F}(x_k)$ и получим квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \tilde{F}(x_k), \tag{17}$$

которая точна для полиномиальных матриц $F(x)$ степени не выше $2n - 1$. Этим же свойством обладает квадратурная формула $\int\limits_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{F}(x_k)A_k$ для вычисления интеграла в левой части приближенного равенства (15).

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности другой формы в случае диагональной весовой матрицы

Сначала рассмотрим случай функциональных матриц второго порядка

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix}, \; p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}.$$

Для алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ степени n, ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, выполняются равенства

$$\int_a^b p_1(x)P_{n1}(x)x^i dx = \int_a^b p_2(x)P_{n2}(x)x^i dx = 0 \;\; (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Будем считать, что они ортонормированные, т. е. $\int\limits_a^b p_1(x)P_{n1}^2(x)x^i dx = \int\limits_a^b p_2(x)P_{n2}^2(x)x^i dx = 1.$

Положим, что $P_n(x) = \begin{bmatrix} P_{n1}(x) & 0 \\ 0 & P_{n2}(x) \end{bmatrix}$. Тогда $\int\limits_a^b p(x)P_n(x)Q_{n-1}(x)dx = 0$, где $Q_{n-1}(x)$ – произвольная матрица вида $Q_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix}$ с элементами $q_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2$) – алгебраическими многочленами степени не выше $n - 1$. В этом случае формула (17) в поэлементной записи имеет вид

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \int_a^b \begin{bmatrix} p_1(x)f_{11}(x) & p_1(x)f_{12}(x) \\ p_2(x)f_{21}(x) & p_2(x)f_{22}(x) \end{bmatrix} dx \approx \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & A_k^{(1)} f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) \\ A_k^{(2)} f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & A_k^{(2)} f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) \\ f_{21}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(1)}\right) \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(2)}\right) \\ f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} E_1 F\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} E_2 F\left(x_k^{(2)}\right),$$

где $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Введя обозначения $A_{k1} = A_k^{(1)} E_1 = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = A_k^{(2)} E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$, придем к формуле

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left[A_{k1}F\left(x_k^{(1)}\right) + A_{k2}F\left(x_k^{(2)}\right)\right]. \tag{18}$$

Аналогично формуле (18) для интеграла (12) имеем

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left[F\left(x_k^{(1)}\right)A_{k1} + F\left(x_k^{(2)}\right)A_{k2}\right].$$

Пример 1. Пусть заданы весовая матричная функция $p(x) = \begin{bmatrix} x^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & x^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ и полиномиальная матрица $F(x) = \begin{bmatrix} x^7 + 2 & x^6 \\ x^5 + 4 & x^4 + 2x \end{bmatrix}$.

По условию $p_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $p_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. Найдем приближенное значение матричного интеграла $\int_a^b p(x)F(x)dx$ по правилу (18), где $n = 8$. Для этого сначала составим и решим две системы линейных алгебраических уравнений $\int_a^b p_i(x)\left(x^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(i)}x^j\right)x^k dx = 0$ ($i = 1, 2$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$) относительно неизвестных коэффициентов $c_j^{(i)}$ ($i = 1, 2$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$) двух приведенных алгебраических многочленов $P_{ni}(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(i)}x^j$ ($i = 1, 2$) степени n, затем вычислим значения $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) как корни многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ соответственно. Далее определим квадратурные коэффициенты $A_k^{(i)} = \int_a^b p_i(x)\frac{P_{ni}(x)}{\left(x - x_k^{(i)}\right)P'_{ni}\left(x_k^{(i)}\right)}dx$, $P_{ni}(x) = \left(x - x_1^{(i)}\right)\left(x - x_2^{(i)}\right)\ldots\left(x - x_n^{(i)}\right)$ ($i = 1, 2$) и соответствующие матрицы $A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$ и воспользуемся формулой (18). В итоге получим, что

$$\sum_{k=1}^{2}\left[F\left(x_k^{(1)}\right)A_{k1} + F\left(x_k^{(2)}\right)A_{k2}\right] = \begin{bmatrix} \frac{74}{51} & \frac{2}{15} \\ \frac{90}{11} & \frac{14}{9} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}450\,98 & 0{,}133\,33 \\ 8{,}181\,82 & 1{,}555\,56 \end{bmatrix}$$

с округлением значений матричных элементов до пяти десятичных знаков.

Отметим, что результаты нахождения точного значения

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \begin{bmatrix} \frac{74}{51} & \frac{2}{15} \\ \frac{90}{11} & \frac{14}{9} \end{bmatrix}$$

и результаты приближенного вычисления данного интеграла совпадают. Это является следствием того, что формула (18) инвариантна для рассматриваемой полиномиальной матрицы $F(x)$, степень которой равна 7, т. е. меньше $2n - 1 = 15$.

Обобщим результаты, полученные при построении квадратурных формул с диагональными весовыми матрицами второго порядка в данном разделе, на случай более общего интеграла

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx,$$

где, как и ранее, $p(x)$ – диагональная матрица с элементами $p_1(x)$ и $p_2(x)$, ее элементы $p_i(x)$ удовлетворяют условиям $p_i(x) \geq 0,\ x \in [a, b],\ \int\limits_a^b p_i(x)dx > 0$ ($i = 1, 2$), а $F(x)$ и $G(x)$ – произвольные полиномиальные матрицы второго порядка вида

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix},\ G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$\int\limits_a^b F(x)p(x)G(x)dx = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\left[\int\limits_a^b f_{is}(x)p_{st}(x)g_{tj}(x)dx\right],$$

причем элементы $p_{12}(x) = p_{21}(x) = 0$, а функции $p_{11}(x) = p_1(x),\ p_{22}(x) = p_2(x)$, поэтому

$$\int\limits_a^b F(x)p(x)G(x)dx = I_1 + I_2,$$

где интегралы I_1 и I_2 определены следующими правилами:

$$I_1 = \int\limits_a^b p_1(x)\begin{bmatrix} f_{11}(x)g_{11}(x) & f_{11}(x)g_{12}(x) \\ f_{21}(x)g_{11}(x) & f_{21}(x)g_{12}(x) \end{bmatrix}dx,$$
$$I_2 = \int\limits_a^b p_2(x)\begin{bmatrix} f_{12}(x)g_{21}(x) & f_{12}(x)g_{22}(x) \\ f_{22}(x)g_{21}(x) & f_{22}(x)g_{22}(x) \end{bmatrix}dx. \tag{19}$$

Заметим, что в равенствах (19) подынтегральные множители $p_1(x)$ и $p_2(x)$ являются скалярными функциями, и, следовательно, для вычисления интегралов I_1 и I_2 можно воспользоваться квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности, построенными выше.

Через $F_1(x)$ обозначим матрицу под знаком интеграла I_1, а через $F_2(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_2 в формулах (19). Если $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ степени n, ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то следующая квадратурная формула будет иметь наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n - 1$:

$$\int\limits_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}F_1\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)}F_2\left(x_k^{(2)}\right), \tag{20}$$

где коэффициенты $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ такие, как в формуле (13) при $\nu = 1$ и $\nu = 2$.

Пример 2. Пусть весовая функция $p(x)$, функциональная матрица $F(x)$ такие, как в примере 1, и задана полиномиальная матрица $G(x) = \begin{bmatrix} x^5 + 3x & x^2 + 1 \\ x^5 + x^2 & x^4 \end{bmatrix}.$

Найдем приближенное значение матричного интеграла $\int\limits_a^b F(x)p(x)G(x)dx$ по правилу (20), где $n = 8$. Вычислим значения квадратурных узлов $x_k^{(i)}$ и коэффициентов $A_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots, n$) по схеме, описанной в примере 1, и воспользуемся формулой (20). В итоге получим, что

$$\sum_{k=1}^{2} A_k^{(1)}F_1\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{2} A_k^{(2)}F_2\left(x_k^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{43\,053\,208}{13\,037\,895} & \dfrac{790}{357} \\ \dfrac{1\,399\,912}{198\,835} & \dfrac{232\,910}{51\,051} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3{,}30216 & 2{,}21289 \\ 7{,}04057 & 4{,}56230 \end{bmatrix}$$

с округлением значений матричных элементов до пяти десятичных знаков.

Отметим, что результаты нахождения точного значения

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx = \begin{bmatrix} \dfrac{43\,053\,208}{13\,037\,895} & \dfrac{790}{357} \\ \dfrac{1\,399\,912}{198\,835} & \dfrac{232\,910}{51\,051} \end{bmatrix}$$

и результаты приближенного вычисления данного интеграла совпадают. Как и ранее, это является следствием того, что формула (20) инвариантна для рассматриваемых полиномиальных матриц $F(x)$ и $G(x)$, суммарная степень которых равна 12, т. е. меньше $2n - 1 = 15$.

Далее перепишем формулу (18) в несколько ином виде. Для этого $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ обозначим через x_k и x_{n+k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а матрицы $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ – через Λ_k и Λ_{n+k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соответственно. Тогда формула (18) примет вид

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2n} \Lambda_k F(x_k).$$

Запишем формулу (20) также в другом виде. Для этого воспользуемся равенством

$$F(x)p(x)G(x) = F(x)\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}G(x) + F(x)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}G(x) =$$

$$= p_1(x)F(x)G_1(x) + p_2(x)F(x)G_2(x),$$

где $G_1(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}$. Здесь $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – скалярные веса, поэтому искомая формула наивысшей алгебраической степени точности будет иметь вид

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} F\left(x_k^{(1)}\right) G_1\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} F\left(x_k^{(2)}\right) G_2\left(x_k^{(2)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F\left(x_k^{(1)}\right) A_{k1} G\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} F\left(x_k^{(2)}\right) A_{k2} G\left(x_k^{(2)}\right).$$

Пусть матрица $\Lambda_k = A_{k1}$, а матрица $\Lambda_{n+k} = A_{k2}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Напомним, что $A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$, где $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ – квадратурные коэффициенты формулы (13), для произвольного натурального числа n и значений $\nu = 1$, $\nu = 2$.

Последовательность корней $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$ будем обозначать через $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}\right)$. Тогда формулу (20) можно записать в более компактном виде:

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2n} F(x_k)\Lambda_k G(x_k). \tag{21}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $p(x)$ *– диагональная матрица с элементами* $p_i(x)$, *удовлетворяющими условиям* $p_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x)dx > 0$ *(i = 1, 2). Если* x_k *и* x_{n+k} *(k = 1, 2, …, n) – корни алгебраических многочленов* $P_{n1}(x)$ *и* $P_{n2}(x)$ *степени n, ортогональных относительно весов* $p_1(x)$ *и* $p_2(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то формула (21), в которой квадратурные коэффициенты* Λ_k *задаются равенствами* $\Lambda_k = A_{k1}$ *и* $\Lambda_{n+k} = A_{k2}$ *(k = 1, 2, …, n), имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равную* $2n - 1$.

Рассмотрим далее случай диагональной весовой матрицы более высокого порядка. Пусть $F(x)$ – функциональная матрица произвольного фиксированного порядка m вида

$$F(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \dots & f_{mm}(x) \end{bmatrix},$$

а $p(x)$ – диагональная весовая матрица вида

$$p(x)=\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m(x) \end{bmatrix}$$

с элементами $p_i(x)$, удовлетворяющими условиям $p_i(x)\geq 0,\ x\in[a,\,b],\ \int\limits_a^b p_i(x)dx>0$ (i = 1, 2, …, m).

Предположим, что для алгебраических многочленов n-й степени $P_{n1}(x),\ P_{n2}(x),\ \dots,\ P_{nm}(x)$, ортогональных относительно весов $p_1(x),\ p_2(x),\ \dots,\ p_m(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, выполняются равенства

$$\int\limits_a^b p_1(x)P_{n1}(x)x^i dx=\int\limits_a^b p_2(x)P_{n2}(x)x^i dx=\dots=\int\limits_a^b p_m(x)P_{nm}(x)x^i dx=0 \ \ (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Будем считать, что они ортонормированные, т. е.

$$\int\limits_a^b p_1(x)P_{n1}^2(x)dx=\int\limits_a^b p_2(x)P_{n2}^2(x)dx=\dots=\int\limits_a^b p_m(x)P_{nm}^2(x)dx=1.$$

Положим, что

$$P_n(x)=\begin{bmatrix} P_{n1}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{n2}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nm}(x) \end{bmatrix}.$$

Тогда $\int\limits_a^b p(x)P_n(x)Q_{n-1}(x)dx=0$, где $Q_{n-1}(x)$ – произвольная матрица вида

$$Q_{n-1}(x)=\begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) & \dots & q_{1m}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) & \dots & q_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1}(x) & q_{m2}(x) & \dots & q_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

с элементами $q_{ij}(x)$ (i, j = 1, 2, …, m) – алгебраическими многочленами степени не выше n – 1. В этом случае формула (17) в поэлементной записи имеет вид

$$\int\limits_a^b p(x)F(x)dx=\int\limits_a^b \begin{bmatrix} p_1(x)f_{11}(x) & p_1(x)f_{12}(x) & \dots & p_1(x)f_{1m}(x) \\ p_2(x)f_{21}(x) & p_2(x)f_{22}(x) & \dots & p_2(x)f_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m(x)f_{m1}(x) & p_m(x)f_{m2}(x) & \dots & p_m(x)f_{mm}(x) \end{bmatrix} dx \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} A_k^{(1)}f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & A_k^{(1)}f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) & \dots & A_k^{(1)}f_{1m}\left(x_k^{(1)}\right) \\ A_k^{(2)}f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & A_k^{(2)}f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) & \dots & A_k^{(2)}f_{2m}\left(x_k^{(2)}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k^{(m)}f_{m1}\left(x_k^{(m)}\right) & A_k^{(m)}f_{m2}\left(x_k^{(m)}\right) & \dots & A_k^{(m)}f_{mm}\left(x_k^{(m)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) & \dots & f_{1m}\left(x_k^{(1)}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) & \dots & f_{2m}\left(x_k^{(2)}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(m)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{m1}\left(x_k^{(m)}\right) & f_{m2}\left(x_k^{(m)}\right) & \dots & f_{mm}\left(x_k^{(m)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(1)}\right) & \dots & f_{1m}\left(x_k^{(1)}\right) \\ f_{21}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(1)}\right) & \dots & f_{2m}\left(x_k^{(1)}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}\left(x_k^{(1)}\right) & f_{m2}\left(x_k^{(1)}\right) & \dots & f_{mm}\left(x_k^{(1)}\right) \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(2)}\right) & \dots & f_{1m}\left(x_k^{(2)}\right) \\ f_{21}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(2)}\right) & \dots & f_{2m}\left(x_k^{(2)}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}\left(x_k^{(2)}\right) & f_{m2}\left(x_k^{(2)}\right) & \dots & f_{mm}\left(x_k^{(2)}\right) \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(m)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}\left(x_k^{(m)}\right) & f_{12}\left(x_k^{(m)}\right) & \dots & f_{1m}\left(x_k^{(m)}\right) \\ f_{21}\left(x_k^{(m)}\right) & f_{22}\left(x_k^{(m)}\right) & \dots & f_{2m}\left(x_k^{(m)}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}\left(x_k^{(m)}\right) & f_{m2}\left(x_k^{(m)}\right) & \dots & f_{mm}\left(x_k^{(m)}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} E_1 F\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} E_2 F\left(x_k^{(2)}\right) + \dots + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(m)} E_m F\left(x_k^{(m)}\right),$$

где

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, E_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Введя обозначения

$$A_{k1}=A_k^{(1)}E_1=\begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ A_{k2}=A_k^{(2)}E_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ \dots,$$

$$A_{km}=A_k^{(m)}E_m=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{(m)} \end{bmatrix},$$

придем к формуле

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left[A_{k1}F\left(x_k^{(1)}\right)+A_{k2}F\left(x_k^{(2)}\right)+\dots+A_{km}F\left(x_k^{(m)}\right)\right]. \tag{22}$$

Аналогично формуле (22) для правила (12) имеем

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\left[F\left(x_k^{(1)}\right)A_{k1}+F\left(x_k^{(2)}\right)A_{k2}+\dots+F\left(x_k^{(m)}\right)A_{km}\right].$$

Обобщим результаты, полученные при построении квадратурных формул с диагональными весовыми матрицами произвольного фиксированного порядка в этом разделе, на случай более общего интеграла

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx,$$

где, как и ранее, $p(x)$ – диагональная матрица вида

$$p(x)=\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m(x) \end{bmatrix}$$

с элементами $p_i(x)$, удовлетворяющими условиям $p_i(x)\geq 0,\ x\in[a,b],\ \int_a^b p_i(x)dx>0$ ($i=1, 2, \dots, m$), а $F(x)$ и $G(x)$ – матрицы произвольного порядка m вида

$$F(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \dots & f_{mm}(x) \end{bmatrix},\ G(x)=\begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \dots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \dots & g_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(x) & g_{m2}(x) & \dots & g_{mm}(x) \end{bmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx=\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\int_a^b f_{is}(x)p_{st}(x)g_{tj}(x)dx\right],$$

причем элементы $p_{ij}(x)=0$, если $i\neq j$, а функции $p_1(x)=p_{11}(x),\ p_2(x)=p_{22}(x),\ \dots,\ p_m(x)=p_{mm}(x)$, поэтому

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx=I_1+I_2+\dots+I_m,$$

где

$$I_1=\int_a^b p_1(x)\begin{bmatrix} f_{11}(x)g_{11}(x) & f_{11}(x)g_{12}(x) & \dots & f_{11}(x)g_{1m}(x) \\ f_{21}(x)g_{11}(x) & f_{21}(x)g_{12}(x) & \dots & f_{21}(x)g_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x)g_{11}(x) & f_{m1}(x)g_{12}(x) & \dots & f_{m1}(x)g_{1m}(x) \end{bmatrix}dx, \tag{23}$$

$$I_2 = \int_a^b p_2(x) \begin{bmatrix} f_{12}(x) g_{21}(x) & f_{12}(x) g_{22}(x) & \ldots & f_{12}(x) g_{2m}(x) \\ f_{22}(x) g_{21}(x) & f_{22}(x) g_{22}(x) & \ldots & f_{22}(x) g_{2m}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{m2}(x) g_{21}(x) & f_{m2}(x) g_{22}(x) & \ldots & f_{m2}(x) g_{2m}(x) \end{bmatrix} dx, \ldots,$$

$$I_m = \int_a^b p_m(x) \begin{bmatrix} f_{1m}(x) g_{m1}(x) & f_{1m}(x) g_{m2}(x) & \ldots & f_{1m}(x) g_{mm}(x) \\ f_{2m}(x) g_{m1}(x) & f_{2m}(x) g_{m2}(x) & \ldots & f_{2m}(x) g_{mm}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{mm}(x) g_{m1}(x) & f_{mm}(x) g_{m2}(x) & \ldots & f_{mm}(x) g_{mm}(x) \end{bmatrix} dx.$$

Заметим, что в равенствах (23) подынтегральные множители $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_m(x)$ являются скалярными функциями, и, следовательно, для вычисления интегралов $I_1, I_2, \ldots, I_m$ можно воспользоваться квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности, рассмотренными выше.

Через $F_1(x)$ обозначим матрицу под знаком интеграла I_1, через $F_2(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_2 и т. д., через $F_m(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_m в формулах (23). Если $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x), P_{n2}(x), \ldots, P_{nm}(x)$ степени n, ортогональных относительно весов $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то следующая формула будет иметь наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n - 1$:

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} F_1\left(x_k^{(1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} F_2\left(x_k^{(2)}\right) + \ldots + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(m)} F_m\left(x_k^{(m)}\right), \tag{24}$$

где $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \ldots, A_k^{(m)}$ такие, как в формуле (13) при $\nu = 1, \nu = 2, \ldots, \nu = m$.

Перепишем формулу (22) в несколько ином виде. Для этого $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(m)}$ обозначим через $x_k, x_{n+k}, \ldots, x_{(m-1)n+k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), а матрицы $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \ldots, A_k^{(m)}$ – через $\Lambda_k, \Lambda_{n+k}, \ldots, \Lambda_{(m-1)n+k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) соответственно. Тогда формула (22) примет вид

$$\int_a^b p(x) F(x) dx \approx \sum_{k=1}^{mn} \Lambda_k F(x_k).$$

Запишем формулу (24) также в другом виде. Для этого воспользуемся равенством

$$F(x) p(x) G(x) = F(x) \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} G(x) +$$

$$+ F(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} G(x) + \ldots + F(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_m(x) \end{bmatrix} G(x) =$$

$$= p_1(x) F(x) G_1(x) + p_2(x) F(x) G_2(x) + \ldots + p_m(x) F(x) G_m(x),$$

где

$$G_1(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \ldots & g_{1m}(x) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \ldots & g_{2m}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$G_m(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(x) & g_{m2}(x) & \dots & g_{mm}(x) \end{bmatrix}.$$

Здесь $p_1(x),\ p_2(x),\ \dots,\ p_m(x)$ – скалярные весовые функции, поэтому искомая формула наивысшей алгебраической степени точности будет иметь вид

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}F\left(x_k^{(1)}\right)G_1\left(x_k^{(1)}\right)+\sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)}F\left(x_k^{(2)}\right)G_2\left(x_k^{(2)}\right)+\dots+\sum_{k=1}^{n} A_k^{(m)}F\left(x_k^{(m)}\right)G_m\left(x_k^{(m)}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k^{(1)}\right)A_{k1}G\left(x_k^{(1)}\right)+\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k^{(2)}\right)A_{k2}G\left(x_k^{(2)}\right)+\dots+\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k^{(m)}\right)A_{km}G\left(x_k^{(m)}\right). \qquad (25)$$

Обозначим через $\Lambda_k,\ \Lambda_{n+k},\ \dots,\ \Lambda_{(m-1)n+k}$ матрицы $A_{k1},\ A_{k2},\ \dots,\ A_{km}$ для $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$ соответственно. Напомним, что

$$A_{k1}=\begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ A_{k2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ \dots,\ A_{km}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{(m)} \end{bmatrix},$$

где $A_k^{(1)},\ A_k^{(2)},\ \dots,\ A_k^{(m)}$ – квадратурные коэффициенты формулы (13), для произвольного натурального значения n и $\nu=1,\ \nu=2,\ \dots,\ \nu=m$.

Последовательность корней $\left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \dots,\ x_n^{(1)},\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \dots,\ x_n^{(2)},\ \dots,\ x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \dots,\ x_n^{(m)}\right)$ будем обозначать через $\left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \dots,\ x_{2n},\ \dots,\ x_{mn}\right)$. Тогда формулу (24) можно записать в более компактном виде:

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{mn} F(x_k)\Lambda_k G(x_k). \qquad (26)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если $x_k,\ x_{n+k},\ \dots,\ x_{(m-1)n+k}$ ($k=1,\ 2,\ \dots,\ n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$, $P_{n2}(x),\dots,\ P_{nm}(x)$ степени n, ортогональных относительно весов $p_1(x),\ p_2(x),\ \dots,\ p_m(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то формула (26), в которой квадратурные коэффициенты Λ_k задаются равенствами $\Lambda_k=A_{k1},\ \Lambda_{n+k}=A_{k2},\ \dots,\ \Lambda_{(m-1)n+k}=A_{km}$ ($k=1,\ 2,\ \dots,\ n$), имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n-1$.*

О сходимости квадратурного процесса типа Гаусса в случае диагональной весовой матрицы

Обозначим через $r_n=\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx-\sum_{k=1}^{mn} F(x_k)\Lambda_k G(x_k)$ матрицу погрешности квадратурной формулы (26).

С учетом развернутого вида (25) формулы (26) и известного для скалярного случая факта, согласно которому квадратурная сумма в формулах типа Гаусса сходится к точному значению интеграла при условии, что интегрируемая функция непрерывна, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Если матрицы $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на $[a,\ b]$, то погрешность r_n сходится к нулевой матрице при $n\to\infty$.*

В заключение отметим, что квадратуры наивысшей алгебраической степени точности другой структуры для матричнозначных функций с матричной весовой функцией, отличной от диагональной, построены в работе [3]. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [4], в которой в том числе исследуются вопросы интерполирования для матричнозначных и операторнозначных функций.

Библиографические ссылки

1. Гантмахер ФР. *Теория матриц.* 5-е издание. Лидский ВБ, редактор. Москва: Физматлит; 2010. 560 с.
2. Крылов ВИ. *Приближенное вычисление интегралов.* 2-е издание. Москва: Наука; 1967. 500 с.
3. Sinap A, Van Assche W. Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix-valued functions. *Linear Algebra and its Applications.* 1994;207:71–114. DOI: 10.1016/0024-3795(94)90005-1.
4. Янович ЛА, Игнатенко МВ. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларуская навука; 2020. 476 с.

References

1. Gantmakher FR. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. 5th edition. Lidskii VB, editor. Moscow: Fizmatlit; 2010. 560 p. Russian.
2. Krylov VI. *Priblizhennoe vychislenie integralov* [Approximate calculation of integrals]. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1967. 500 p. Russian.
3. Sinap A, Van Assche W. Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix-valued functions. *Linear Algebra and its Applications.* 1994;207:71–114. DOI: 10.1016/0024-3795(94)90005-1.
4. Yanovich LA, Ignatenko MV. *Interpolyatsionnye metody approksimatsii operatorov, zadannykh na funktsional'nykh prostranstvakh i mnozhestvakh matrits* [Interpolation methods for approximation of operators defined on function spaces and sets of matrices]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2020. 476 p. Russian.

Получена 27.10.2023 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 27.10.2023 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.