Дискретная математика
и математическая кибернетика

Discrete mathematics
and mathematical cybernetics

УДК 519.17

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ИССЛЕДОВАНИЯ *F*-ИРРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ В КЛАССЕ ДВУСВЯЗНЫХ ГРАФОВ *F*

Т. С. ДОВЖЕНОК[1]***, А. В. ФИЛЮТА***[1]***, Н. Е. ЧУГАЙ***[1]

[1]*Средняя школа № 30 г. Гомеля, ул. 50 лет БССР, 6, 246032, г. Гомель, Беларусь*

Аннотация. Рассматривается известная проблема F-иррегулярных графов применительно к классу двусвязных графов F. Устанавливается, что для любого натурального $n \geq 8$ существует K_3-иррегулярный граф порядка n. Вводится понятие почти-почти F-иррегулярного графа, на основе которого для каждого графа F из указанного класса находится достаточное условие существования бесконечного числа F-иррегулярных графов. Доказывается, что для любого двусвязного графа F, минимальная из степеней вершин которого равна 2, существует бесконечно много F-иррегулярных графов.

Ключевые слова: F-степень вершины; F-иррегулярный граф; двусвязный граф; $(K_3,\ K_2)$-согласованный граф; почти-почти F-иррегулярный граф; сильная гипотеза об F-иррегулярных графах.

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за ценные замечания по статье.

Образец цитирования:
Довженок ТС, Филюта АВ, Чугай НЕ. О некоторых результатах исследования F-иррегулярных графов в классе двусвязных графов F. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:54–64.
EDN: ROQOGI

For citation:
Dovzhenok TS, Filuta AV, Chuhai NE. On some results of the study of F-irregular graphs in the class of biconnected graphs F. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:54–64. Russian.
EDN: ROQOGI

Авторы:
Татьяна Степановна Довженок – кандидат физико-математических наук; учитель.
Артем Витальевич Филюта – учащийся 11-го класса. Научный руководитель – Т. С. Довженок.
Настасья Евгеньевна Чугай – учащаяся 11-го класса. Научный руководитель – Т. С. Довженок.

Authors:
Tatiana S. Dovzhenok, PhD (physics and mathematics); teacher.
t.dovzhenok@mail.ru
https://orcid.org/0009-0000-2420-6028
Artem V. Filuta, student at the 11th grade.
artfilutah2007@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-7844-2381
Nastassia E. Chuhai, student at the 11th grade.
nastasyachygay@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-8824-0483

ON SOME RESULTS OF THE STUDY OF *F*-IRREGULAR GRAPHS IN THE CLASS OF BICONNECTED GRAPHS *F*

T. S. DOVZHENOK[a]***, A. V. FILUTA***[a]***, N. E. CHUHAI***[a]

[a]*Secondary school No. 30 of Gomel, 6 Piacdziasiat gadow BSSR Street, Gomiel 246032, Belarus*
Corresponding author: T. S. Dovzhenok (t.dovzhenok@mail.ru)

Abstract. We consider herein the well-known problem of F-irregular graphs in relation to the class of biconnected graphs F. It is established that for any natural $n \geq 8$ there exists a K_3-irregular graph of order n. The concept of an almost-almost F-irregular graph is introduced, on the basis of which a sufficient condition for the existence of an infinite number of F-irregular graphs is found for each graph F from the specified class. It is proved that for any biconnected graph F, the minimum of whose vertex degrees is 2, there are infinitely many F-irregular graphs.

Keywords: F-degree of a vertex; F-irregular graph; biconnected graph; (K_3, K_2)-consistent graph; almost-almost F-irregular graph; strong hypothesis about F-irregular graphs.

Acknowledgements. The authors express their deep gratitude to the reviewer for his valuable comments on the article.

Введение

Будем рассматривать только простые конечные неориентированные графы на двух и более вершинах.

На рубеже 1980–90-х гг. в теории графов возрос интерес к иррегулярным графам (т. е. графам, в некотором смысле противоположным регулярным). В таких графах любые две вершины отличаются друг от друга по одной и той же характеристике. Наиболее естественным было бы выбрать в качестве этой характеристики степень вершины. Однако, как известно [1], не существует ни одного графа, степени всех вершин которого попарно различны. Подобная ситуация привела к развитию теории локальной иррегулярности. В работе [2] представлены и изучены сильно нерегулярные графы, в которых любые две вершины из окружения произвольной вершины имеют разные степени. Проблема определения иррегулярных графов впервые была исследована в статье [3]. В настоящее время наиболее полный обзор результатов по данной тематике содержится в книге «Irregularity in graphs» [4]. Среди многочисленных подходов к решению указанной проблемы особое место занимает концепция F-иррегулярных графов, которая основана на более общем взгляде на природу степени вершины.

В 1987 г. было предложено следующее обобщение понятия степени вершины и введен в рассмотрение новый класс графов – F-иррегулярные графы [5].

Определение 1. Пусть F и G – графы. F-степенью вершины v в графе G будем называть число подграфов графа G, изоморфных F и содержащих вершину v.

Определение 2. Граф G назовем F-регулярным, если все его вершины имеют одинаковую F-степень. Будем говорить, что граф G является F-иррегулярным, если F-степени всех вершин данного графа попарно различны.

Пусть K_n и $K_{1,\,n-1}$ – полный граф и звезда на n вершинах соответственно. Как было отмечено ранее, ни один граф не является K_2-иррегулярным графом (т. е. графом с различными степенями вершин). Однако при $F \neq K_2$ вопрос существования F-иррегулярных графов, за малым исключением случаев, остается открытым.

В работе [5] было установлено, что для любого натурального $n \geq 3$ существуют K_n-иррегулярный и $K_{1,\,n-1}$-иррегулярный графы, а также была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Для любого связного графа F на трех и более вершинах существует F-иррегулярный граф.

В дальнейшем каких-либо других бесконечных серий графов, отличных от K_n и $K_{1,\,n-1}$, которые бы подтверждали гипотезу 1, равно как и графов, опровергающих ее, найдено не было. В связи с этим построение таких серий графов, а также разработка методов доказательства F-иррегулярности графов являются важной задачей на пути доказательства гипотезы 1.

Определение 3. Вершина графа называется точкой сочленения, если после удаления из графа этой вершины со всеми инцидентными ей ребрами увеличивается число компонент связности графа. Двусвязным графом будем называть связный граф на трех и более вершинах, не содержащий точек сочленения.

В данной работе проблема F-иррегулярных графов исследуется в классе двусвязных графов F.

В разделе «K_3-иррегулярные, (K_3, K_2)-согласованные графы» вводится понятие (K_3, K_2)-согласованного графа и для каждого натурального $n \geq 8$ доказывается существование K_3-иррегулярного, (K_3, K_2)-согласованного графа порядка n.

В разделе «О достаточном условии существования бесконечного числа F-иррегулярных графов для двусвязных графов F» определяется новый класс графов – почти-почти F-иррегулярные графы. В таких графах число различных F-степеней вершин ровно на 2 отличается от числа всех вершин графа. В терминах почти-почти F-иррегулярных графов для каждого двусвязного графа F находится достаточное условие существования бесконечного числа F-иррегулярных графов.

В разделе «О бесконечности числа F-иррегулярных графов для двусвязных графов F с $\delta(F)=2$» показывается, что для любого двусвязного графа F, минимальная из степеней вершин которого равна 2, существует бесконечно много F-иррегулярных графов. В частности, для любого натурального $n \geq 3$ множество C_n-иррегулярных графов, где C_n – простой цикл на n вершинах, бесконечно.

Пусть $G=(V(G),\ E(G))$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. В работе используются следующие обозначения:

- $|M|$ – число элементов множества M;
- $|G|=|V(G)|$ – число вершин в графе G (порядок графа G);
- $(u,\ v)$ – ребро графа с концами в вершинах u, v, $u \neq v$;
- $N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G;
- $\deg_G v$, $F\deg_G v$ – степень и F-степень вершины v в графе G соответственно;
- $\delta(G)=\min\limits_{v\in V(G)}\deg_G v$, $\Delta(G)=\max\limits_{v\in V(G)}\deg_G v$.

K_3-иррегулярные, $(K_3,\ K_2)$-согласованные графы

Определение 4. Граф G назовем $(K_3,\ K_2)$-согласованным, если для любых вершин $i,\ j\in V(G)$ с разными K_3-степенями из условия $K_3\deg_G i > K_3\deg_G j$ следует, что $\deg_G i \geq \deg_G j$.

Лемма 1. *Если существует K_3-иррегулярный, $(K_3,\ K_2)$-согласованный граф G, в котором $\delta(G)=2$ и каждая вершина имеет положительную K_3-степень, то на $|G|+1$ вершинах можно построить K_3-иррегулярный, $(K_3,\ K_2)$-согласованный граф G_1 такой, что $\delta(G_1)=1$ и $\Delta(G_1)<|G_1|-1$.*

Доказательство. Предположим, что существует граф G, удовлетворяющий условию леммы 1. Поскольку $\delta(G)=2$, то граф G содержит вершину степени 2 (обозначим ее через v) и не содержит вершин степени 0 или 1. Далее из условия $\deg_G v=2$, $K_3\deg_G v>0$ следует, что $K_3\deg_G v=1$, а так как G является K_3-иррегулярным графом с положительными K_3-степенями вершин, то любая вершина $u\in V(G)$, $u\neq v$, удовлетворяет условию

$$K_3\deg_G u \geq 2,\ \deg_G u\geq 3. \tag{1}$$

Добавим к графу G вершину w и ребро $(v,\ w)$. Полученный граф назовем G_1. Очевидно, что $\deg_{G_1} w=1$, $K_3\deg_{G_1} w=0$, $\deg_{G_1} v=3$, $K_3\deg_{G_1} v=1$, а степени и K_3-степени всех вершин графа G, отличных от v, не изменились при переходе от G к G_1. Тогда с учетом условия (1), а также в силу K_3-иррегулярности и $(K_3,\ K_2)$-согласованности графа G приходим к выводу, что граф G_1 является K_3-иррегулярным и $(K_3,\ K_2)$-согласованным. Осталось заметить, что если $\Delta(G_1)=|G_1|-1$, то в графе G_1 есть вершина, смежная со всеми остальными вершинами, в частности с вершиной w. По построению такой вершиной может быть только вершина v. Но тогда $G=K_3$, что противоречит K_3-иррегулярности графа G. Значит, $\Delta(G_1)<|G_1|-1$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если существует K_3-иррегулярный, $(K_3,\ K_2)$-согласованный граф G такой, что $\delta(G)=1$ и $\Delta(G)<|G|-1$, то на $|G|+1$ вершинах можно построить K_3-иррегулярный, $(K_3,\ K_2)$-согласованный граф G_2, в котором $\delta(G_2)=2$ и любая вершина имеет положительную K_3-степень.*

Доказательство. Предположим, что существует граф G, удовлетворяющий условию леммы 2. Добавим к графу G вершину x и соединим ее ребрами со всеми вершинами графа G. Полученный граф назовем G_2. Легко видеть, что для любой вершины $u\in V(G_2)$, $u\neq x$, справедливы равенства

$$\deg_{G_2} u=\deg_G u+1,\ K_3\deg_{G_2} u=K_3\deg_G u+\deg_G u. \tag{2}$$

В частности, из равенств (2) и $\delta(G)=1$ получаем, что $\delta(G_2)=2$ и все вершины графа G_2 имеют положительную K_3-степень.

Рассмотрим две произвольные вершины $i, j \in V(G)$, $i \neq j$. В силу K_3-иррегулярности графа G имеем $K_3 \deg_G i \neq K_3 \deg_G j$. Пусть для определенности $K_3 \deg_G i > K_3 \deg_G j$. Тогда из (K_3, K_2)-согласованности графа G следует, что $\deg_G i \geq \deg_G j$, и с учетом равенств (2) получаем

$$K_3 \deg_{G_2} i > K_3 \deg_{G_2} j, \ \deg_{G_2} i \geq \deg_{G_2} j. \tag{3}$$

Далее рассмотрим произвольную вершину $u \in V(G)$ и докажем, что

$$K_3 \deg_{G_2} x > K_3 \deg_{G_2} u, \ \deg_{G_2} x > \deg_{G_2} u. \tag{4}$$

Действительно, поскольку $\Delta(G) < |G| - 1$, то в графе G найдется вершина y такая, что $(u, y) \notin E(G)$ и, следовательно, $(u, y) \notin E(G_2)$, откуда

$$\deg_{G_2} u < |G_2| - 1 = \deg_{G_2} x.$$

Далее для доказательства неравенства $K_3 \deg_{G_2} x > K_3 \deg_{G_2} u$ заметим, что K_3-степень вершины графа совпадает с числом ребер в подграфе, порожденном окружением этой вершины. Пусть вершина $z \in V(G)$ такова, что $(y, z) \in E(G)$. Тогда подграфу графа G, порожденному окружением вершины u, не принадлежит ребро (y, z), а также не принадлежат $\deg_G u$ ребер, инцидентных вершине u. Следовательно, $K_3 \deg_G u \leq |E(G)| - \deg_G u - 1$, откуда $K_3 \deg_G u + \deg_G u \leq |E(G)| - 1$. Таким образом, с учетом равенств (2) выполняется неравенство $K_3 \deg_{G_2} u \leq |E(G)| - 1$. С другой стороны, $K_3 \deg_{G_2} x = |E(G)|$. Следовательно, $K_3 \deg_{G_2} x > K_3 \deg_{G_2} u$ для любой вершины $u \in V(G)$. Тем самым завершено доказательство неравенств (4). Наконец, из формул (3) и (4) получаем, что G_2 является K_3-иррегулярным, (K_3, K_2)-согласованным графом. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Для любого натурального $n \geq 8$ существует K_3-иррегулярный, (K_3, K_2)-согласованный граф порядка n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим граф D_8 с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, изображенный на рис. 1.

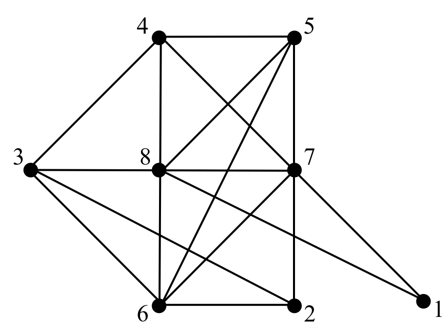

Рис. 1. Граф D_8
Fig. 1. Graph D_8

Докажем, что D_8 является K_3-иррегулярным, (K_3, K_2)-согласованным графом.

В таблице для каждой вершины v графа D_8 указаны ее степень ($\deg_{D_8} v$), K_3-степень ($K_3 \deg_{D_8} v$), а также все треугольники (подграфы графа D_8, изоморфные K_3), в которые она входит, при этом треугольник с вершинами a, b, c записывается как abc.

Степени и K_3-степени вершин графа D_8

Degrees and K_3-degrees of the vertices of the graph D_8

$v \in V(D_8)$	Треугольники, в которые входит вершина v	$K_3 \deg_{D_8} v$	$\deg_{D_8} v$
8	178, 348, 368, 458, 478, 568, 578, 678	8	6
7	178, 267, 457, 478, 567, 578, 678	7	6
6	236, 267, 368, 567, 568, 678	6	5

Окончание таблицы
Ending of the table

$v \in V(D_8)$	Треугольники, в которые входит вершина v	$K_3 \deg_{D_8} v$	$\deg_{D_8} v$
5	457, 458, 567, 568, 578	5	4
4	348, 457, 458, 478	4	4
3	236, 348, 368	3	4
2	236, 267	2	3
1	178	1	2

Из таблицы следует, что D_8 является K_3-иррегулярным, (K_3, K_2)-согласованным графом. Заметим также, что $\delta(D_8) = 2$ и K_3-степени всех вершин графа D_8 положительны. Таким образом, согласно лемме 1 существует K_3-иррегулярный, (K_3, K_2)-согласованный граф D_9 порядка 9, в котором $\delta(D_9) = 1$ и $\Delta(D_9) < |D_9| - 1$. Тогда из леммы 2 следует существование K_3-иррегулярного, (K_3, K_2)-согласованного графа D_{10} порядка 10, в котором $\delta(D_{10}) = 2$ и K_3-степени всех вершин положительны. Продолжив чередовать применение лемм 1 и 2, получим, что для любого натурального $n \geq 8$ существует K_3-иррегулярный, (K_3, K_2)-согласованный граф D_n на n вершинах. При этом для каждого нечетного n выполняется условие $\delta(D_n) = 1$ и $\Delta(D_n) < |D_n| - 1$, а для каждого четного n имеет место равенство $\delta(D_n) = 2$ и K_3-степени всех вершин графа D_n положительны. Теорема 1 доказана.

О достаточном условии существования бесконечного числа *F*-иррегулярных графов для двусвязных графов *F*

Определение 5. Граф G назовем почти-почти F-иррегулярным, если среди F-степеней вершин этого графа есть ровно $|G| - 2$ различные F-степени.

Определение 6. Назовем вершину графа F-проблемной, если в этом графе есть другая вершина с той же F-степенью.

Замечание 1. Почти-почти F-иррегулярный граф имеет либо ровно три F-проблемные вершины, при этом их F-степени равны, либо ровно две пары F-проблемных вершин, причем в каждой паре F-степени вершин совпадают, а вершины из разных пар имеют разные F-степени.

Определение 7. Пусть граф G не является F-регулярным. Через $d(G, F)$ обозначим минимальный из модулей разностей между различными F-степенями вершин графа G.

В следующей теореме для каждого двусвязного графа F получено достаточное условие существования бесконечного числа F-иррегулярных графов.

Теорема 2. *Пусть F – двусвязный граф и для любого числа $p > 0$ существует почти-почти F-иррегулярный граф G, удовлетворяющий условиям:*

1) $d(G, F) > p$;

2) F-степени всех вершин графа G превосходят p.

Тогда существует бесконечно много F-иррегулярных графов.

Доказательство. Пусть $p > 0$. Рассмотрим последовательность почти-почти F-иррегулярных графов $G_1, G_2, \ldots, G_{|F|+1}$ следующего вида:

$$\begin{gathered} F\deg_{G_1} v > p \quad \forall v \in V(G_1), \\ d(G_{i+1}, F) > 2m_i,\ F\deg_{G_{i+1}} v > 2m_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, |F|\},\ v \in V(G_{i+1}), \end{gathered} \tag{5}$$

где $m_i = \max\limits_{u \in V(G_i)} F\deg_{G_i} u$.

Существование такой последовательности вытекает из условия теоремы 2.

Из определения последовательности (5) легко установить истинность следующих неравенств:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_{|F|}, \tag{6}$$

$$F\deg_{G_i} u < F\deg_{G_{i+1}} v \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, |F|\},\ u \in V(G_i),\ v \in V(G_{i+1}). \tag{7}$$

Далее в каждом графе G_i, $i \in \{1, 2, \ldots, |F|+1\}$, выберем две F-проблемные вершины v_i, w_i, $v_i \neq w_i$ (рис. 2), при этом если G_i содержит четыре F-проблемные вершины (замечание 1), то v_i, w_i выбираются из разных пар.

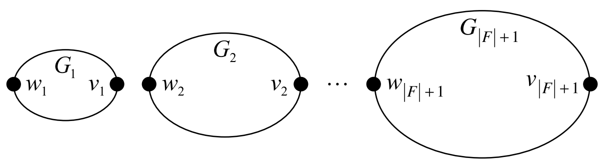

Рис. 2. Графы $G_1, G_2, \ldots, G_{|F|+1}$
Fig. 2. Graphs $G_1, G_2, \ldots, G_{|F|+1}$

Рассмотрим граф Q, который образуется из графов $G_1, G_2, \ldots, G_{|F|+1}$ путем последовательного склеивания вершин v_i и w_{i+1} для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, |F|+1\}$, при этом $w_{|F|+2} = w_1$. Вершину графа Q, полученную в результате склеивания вершин v_i и w_{i+1}, будем называть точкой склейки и обозначать через z_i (рис. 3).

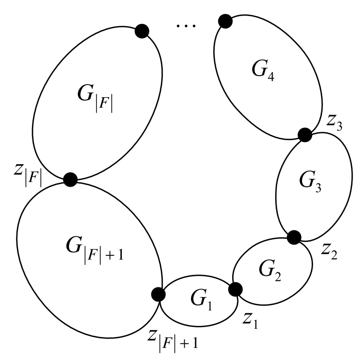

Рис. 3. Граф Q
Fig. 3. Graph Q

В дальнейшем для удобства вершины v_i и w_{i+1} графов G_i и G_{i+1} будем также обозначать через z_i. Тем самым из графа G_i в склейке участвуют две вершины – z_{i-1} и z_i, при этом $z_0 = z_{|F|+1}$.

Тогда в силу выбора вершин z_{i-1} и z_i получим

$$F\deg_{G_i} u \neq F\deg_{G_i} v \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, |F|+1\},\ u, v \in V(G_i),\ u, v \notin \{z_{i-1}, z_i\},\ u \neq v. \tag{8}$$

Докажем, что граф Q является F-иррегулярным. Для начала заметим, что любой подграф графа G_i, $i \in \{1, 2, \ldots, |F|+1\}$, изоморфный F, является также подграфом графа Q. С другой стороны, граф Q не содержит новых подграфов, изоморфных F и отличных от тех, что есть в графах G_i, $i \in \{1, 2, \ldots, |F|+1\}$. Действительно, если это не так, то либо одна из точек склейки является точкой сочленения в новом подграфе, либо новый подграф содержит цикл, проходящий через все точки склейки, т. е. имеет более $|F|$ вершин. В обоих случаях получаем противоречие изоморфности нового подграфа графу F. Значит, для F-степеней вершин графа Q в предположении, что $G_{|F|+2} = G_1$, имеют место соотношения

$$\begin{gathered} F\deg_Q z_i = F\deg_{G_i} z_i + F\deg_{G_{i+1}} z_i, \\ F\deg_Q v = F\deg_{G_i} v \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, |F|+1\},\ v \in V(G_i),\ v \neq z_{i-1}, z_i. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда из формул (7)–(9) следует, что любые две различные вершины графа Q, отличные от точек склейки, имеют разные F-степени.

Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, |F|\}$. Для точек склейки в графе Q справедливы утверждения:

1) $F\deg_Q z_i > F\deg_Q v \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, i\},\ v \in V(G_k),\ v \neq z_i, z_{|F|+1}$;

2) $F\deg_Q z_i < F\deg_Q v \ \forall k \in \{i+2, i+3, \ldots, |F|+1\},\ v \in V(G_k),\ i < |F|$;

3) $F\deg_Q z_i \neq F\deg_Q v \ \forall v \in V\left(G_{i+1}\right),\ v \neq z_i$;

4) $F\deg_Q z_{|F|+1} > F\deg_Q v \ \forall v \notin V\left(G_{|F|+1}\right)$;

5) $F\deg_Q z_{|F|+1} \neq F\deg_Q v \ \forall v \in V\left(G_{|F|+1}\right),\ v \neq z_{|F|+1}$.

Истинность утверждений 1)–5) устанавливается на основании формул (5)–(7) и (9).

Докажем утверждение 1). Если $i = 1$, то для всех $v \in V\left(G_1\right),\ v \neq z_{|F|+1}, z_1$, имеем

$$F\deg_Q v = F\deg_{G_1} v \leq m_1 < 2m_1 < F\deg_{G_2} z_1 < F\deg_{G_1} z_1 + F\deg_{G_2} z_1 = F\deg_Q z_1.$$

Если $i \in \{2, 3, \ldots, |F|\}$, то

$$F\deg_Q v \leq F\deg_{G_k} v + m_i \leq m_k + m_i \leq 2m_i < F\deg_{G_{i+1}} z_i < F\deg_Q z_i.$$

Докажем утверждение 2).

$$F\deg_Q v \geq F\deg_{G_k} v > 2m_{k-1} \geq 2m_{i+1} > m_i + m_{i+1} \geq F\deg_{G_i} z_i + F\deg_{G_{i+1}} z_i = F\deg_Q z_i.$$

Докажем утверждение 3). Величину $F\deg_Q u - F\deg_{G_{i+1}} u$ будем называть прыжком вершины $u \in V\left(G_{i+1}\right)$. Согласно соотношениям (9) все вершины из $V\left(G_{i+1}\right)$, отличные от z_i, z_{i+1}, совершили нулевой прыжок, поэтому назовем их неподвижными вершинами. В свою очередь, прыжки вершин z_i, z_{i+1} положительны и равны $F\deg_{G_i} z_i,\ F\deg_{G_{i+2}} z_{i+1}$ соответственно, поэтому будем говорить, что вершины z_i и z_{i+1} подпрыгнули.

Пусть $v \in V\left(G_{i+1}\right),\ v \neq z_i,\ z_{i+1}$. Если $F\deg_{G_{i+1}} v = F\deg_{G_{i+1}} z_i$, то

$$F\deg_Q z_i > F\deg_{G_{i+1}} z_i = F\deg_{G_{i+1}} v = F\deg_Q v.$$

Если $F\deg_{G_{i+1}} v \neq F\deg_{G_{i+1}} z_i$, то F-степени вершин z_i и v в графе G_{i+1} в силу неравенства $d\left(G_{i+1}, F\right) > 2m_i$ отличаются более чем на $2m_i$. Следовательно, для равенства F-степеней вершин z_i и v в графе Q вершина z_i должна «допрыгнуть» до неподвижной вершины v, что невозможно, поскольку прыжок вершины z_i не превосходит m_i.

Докажем, что $F\deg_Q z_i \neq F\deg_Q z_{i+1}$. Действительно, если $i \in \{1, 2, \ldots, |F|-1\}$, то

$$F\deg_Q z_{i+1} > F\deg_{G_{i+2}} z_{i+1} > 2m_{i+1} > m_i + m_{i+1} \geq F\deg_{G_i} z_i + F\deg_{G_{i+1}} z_i = F\deg_Q z_i.$$

Если $i = |F|$, то прыжки вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$ положительны, различны и не превосходят $m_{|F|}$ и m_1 соответственно. Таким образом, если $F\deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|} = F\deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|+1}$, то $F\deg_Q z_{|F|} \neq F\deg_Q z_{|F|+1}$ по причине неравенства прыжков вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$. Если же $F\deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|} \neq F\deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|+1}$, то F-степени вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$ в графе $G_{|F|+1}$ в силу неравенства $d\left(G_{|F|+1}, F\right) > 2m_{|F|}$ отличаются более чем на $2m_{|F|}$. Следовательно, для равенства F-степеней вершин $z_{|F|}$ и $z_{|F|+1}$ в графе Q одна из этих вершин должна подпрыгнуть на величину, превосходящую $2m_{|F|}$, что невозможно, поскольку $2m_{|F|} > m_{|F|} > m_1$.

Докажем утверждение 4). Пусть $v \in V\left(G_k\right),\ k \in \{1, 2, \ldots, |F|\},\ v \neq z_{|F|},\ z_{|F|+1}$. Тогда

$$F\deg_Q v \leq F\deg_{G_k} v + m_{|F|} \leq m_k + m_{|F|} \leq 2m_{|F|} < F\deg_{G_{|F|+1}} z_{|F|+1} < F\deg_Q z_{|F|+1}.$$

Доказательство утверждения 5) аналогично доказательству утверждения 3).

Из утверждений 1)–5) следует, что точки склейки не являются F-проблемными вершинами в Q. Кроме того, как показано выше, любые две вершины из Q, отличные от точек склейки, имеют разные F-степени в Q. Значит, граф Q является F-иррегулярным.

Осталось заметить, что в графе Q все вершины имеют F-степени, большие p, поэтому при достаточно больших значениях p можно построить F-иррегулярный граф Q со сколь угодно большими значениями F-степеней вершин. Следовательно, F-иррегулярных графов бесконечно много. Теорема 2 доказана.

О бесконечности числа *F*-иррегулярных графов для двусвязных графов *F* с $\delta(F)=2$

В этом разделе будет исследован вопрос о численности F-иррегулярных графов в случае, когда F – двусвязный граф с минимальной степенью вершины, равной 2 ($\delta(F)=2$).

Определение 8. Будем говорить, что вершины u, v в графе G имеют почти одинаковое окружение, если $(u, v)\in E(G)$ и $N_G(u)\setminus\{v\}=N_G(v)\setminus\{u\}$.

Лемма 3. *Если вершины u, v в графе G имеют одинаковое или почти одинаковое окружение, то для любого графа F верно равенство*

$$F\deg_G u = F\deg_G v.$$

Доказательство. Истинность леммы 3 непосредственно вытекает из существования автоморфизма $f:V(G)\to V(G)$ такого, что

$$f(u)=v,\ f(v)=u,\ f(w)=w\ \forall w\in V(G),\ w\neq u,\ v.$$

Теорема 3. *Для любого двусвязного графа F, минимальная из степеней вершин которого равна 2, существует бесконечно много F-иррегулярных графов.*

Доказательство. Пусть $|F|=n$. Поскольку $\delta(F)=2$, то в графе F есть вершина степени 2. Обозначим эту вершину через w, а смежные с ней вершины через x и y. Заметим, что если $n=3$, то $F=K_3$ и требуемый результат следует из теоремы 1.

Пусть теперь $n\geq 4$. В этом случае для доказательства существования бесконечного числа F-иррегулярных графов достаточно показать, что для любого $p>0$ существует почти-почти F-иррегулярный граф, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы 2.

Пусть $p>0$. Выберем такое натуральное l, для которого выполнено условие

$$l>n,\ l>p(n-3)!+3. \tag{10}$$

Тогда при $n\geq 4$ в силу условия (10) справедлива оценка

$$C_{l-3}^{n-3}=\frac{(l-3)!}{(n-3)!(l-n)!}=\frac{(l-n+1)(l-n+2)\dots(l-3)}{(n-3)!}\geq\frac{l-3}{(n-3)!}>p. \tag{11}$$

Далее рассмотрим граф T_{2l-2} с множеством вершин $V(T_{2l-2})=\{1, 2, \dots, 2l-2\}$, в котором вершины $1, 2, \dots, l$ образуют полный подграф, а любая вершина с номером i, где $i\in\{l+1, l+2, \dots, 2l-2\}$, соединена ребрами со всеми вершинами множества $\{i-l+1, i-l+2, \dots, l\}$ и только с ними.

Для наглядности изобразим вершины графа T_{2l-2} на двух уровнях. Вершины $1, 2, \dots, l$ разместим на верхнем уровне, а вершины $l+1, l+2, \dots, 2l-2$ – на нижнем уровне в порядке возрастания их номеров слева направо таким образом, чтобы любая вершина i нижнего уровня располагалась строго под вершиной $i-l+1$ верхнего уровня (рис. 4). Тогда любые две вершины верхнего уровня будут смежны, а каждая вершина i нижнего уровня будет смежна только с вершиной $i-l+1$, расположенной строго над ней, и всеми вершинами верхнего уровня, расположенными правее $i-l+1$.

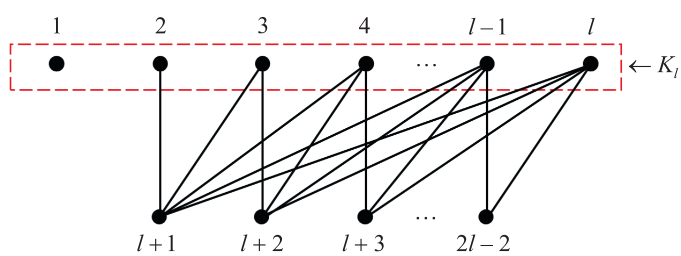

Рис. 4. Граф T_{2l-2}
Fig. 4. Graph T_{2l-2}

Пусть $i\in V(T_{2l-2})$, $t_i=F\deg_{T_{2l-2}} i$.

Заметим, что вершины 1 и $l+1$ в графе T_{2l-2} имеют одинаковое окружение:

$$N_{T_{2l-2}}(1)=N_{T_{2l-2}}(l+1)=\{2, 3, \dots, l\}.$$

Кроме того, смежные вершины $l-1$ и l в графе T_{2l-2} имеют почти одинаковое окружение:

$$N_{T_{2l-2}}(l-1)\setminus\{l\} = N_{T_{2l-2}}(l)\setminus\{l-1\} = V(T_{2l-2})\setminus\{l-1,\ l\}.$$

Значит, по лемме 3 получим

$$t_1 = t_{l+1},\ t_{l-1} = t_l. \tag{12}$$

Докажем теперь, что справедливы неравенства

$$t_{i+1} > t_i\ \ \forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l-2\}. \tag{13}$$

Пусть $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l-2\}$. Рассмотрим граф $H = T_{2l-2}\setminus(i+1,\ l+i)$ (рис. 5).

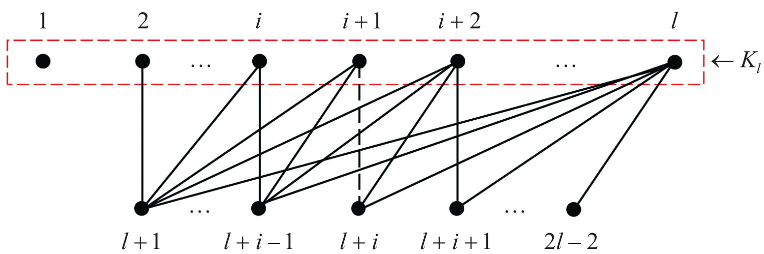

Рис. 5. Граф $H = T_{2l-2}\setminus(i+1,\ l+i)$
Fig. 5. Graph $H = T_{2l-2}\setminus(i+1,\ l+i)$

Заметим, что $N_H(i)\setminus\{i+1\} = N_H(i+1)\setminus\{i\} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ l+i-1\}\setminus\{i,\ i+1\}$. Следовательно, смежные вершины i и $i+1$ в графе H имеют почти одинаковое окружение и, значит, по лемме 3 получаем $F\deg_H i = F\deg_H(i+1)$. Другими словами, вершины i и $i+1$ входят в одинаковое число подграфов графа T_{2l-2}, изоморфных F и не содержащих ребро $(i+1,\ l+i)$. Из этого следует, что $t_{i+1} - t_i = |\boldsymbol{A}|$, где $\boldsymbol{A}$ – множество всех подграфов графа T_{2l-2}, изоморфных F, содержащих ребро $(i+1,\ l+i)$ и не содержащих вершину i.

Оценим $|\boldsymbol{A}|$. Рассмотрим вершины $i+1$, $i+2$, $l+i$ и произвольные $n-3$ различные вершины верхнего уровня графа T_{2l-2}, отличные от i, $i+1$, $i+2$. Указанный набор вершин обозначим через V_1. Поскольку любые две различные вершины из $V_1\setminus\{l+i\}$ смежны в T_{2l-2} и $(i+1,\ l+i)$, $(i+2,\ l+i) \in E(T_{2l-2})$, то граф T_{2l-2} содержит подграф L с множеством вершин V_1, изоморфный F и такой, что вершинам x, y, w графа F соответствуют вершины $i+1$, $i+2$, $l+i$ (в указанном порядке) подграфа L. Кроме того, подграфу L принадлежит ребро $(i+1,\ l+i)$ и не принадлежит вершина i. Значит, $L \in \boldsymbol{A}$. Таким образом, каждому набору из $n-3$ различных вершин верхнего уровня графа T_{2l-2}, отличных от i, $i+1$, $i+2$, соответствует подграф из $\boldsymbol{A}$, при этом разным наборам по построению соответствуют разные подграфы из $\boldsymbol{A}$. Таких наборов ровно C_{l-3}^{n-3}, поэтому $t_{i+1} - t_i = |\boldsymbol{A}| \geq C_{l-3}^{n-3}$ и с учетом оценки (11) получаем

$$t_{i+1} - t_i > p\ \ \forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l-2\}. \tag{14}$$

В частности, из формулы (14) при $p > 0$ следует истинность неравенств (13).

Докажем теперь, что справедливы неравенства

$$t_j > t_{j+1}\ \ \forall j \in \{l+1,\ l+2,\ \ldots,\ 2l-3\}. \tag{15}$$

Пусть $j \in \{l+1,\ l+2,\ \ldots,\ 2l-3\}$. Рассмотрим граф $G = T_{2l-2}\setminus(j-l+1,\ j)$ (рис. 6).

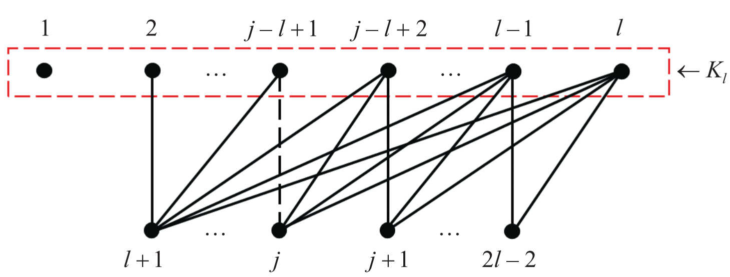

Рис. 6. Граф $G = T_{2l-2}\setminus(j-l+1,\ j)$
Fig. 6. Graph $G = T_{2l-2}\setminus(j-l+1,\ j)$

Поскольку $N_G(j) = N_G(j+1) = \{j-l+2,\ j-l+3,\ \ldots,\ l\}$, то из леммы 3 следует, что $F\deg_G j = F\deg_G(j+1)$. Тогда $t_j - t_{j+1} = |\boldsymbol{B}|$, где $\boldsymbol{B}$ – множество всех подграфов графа T_{2l-2}, изоморфных F, содержащих ребро $(j-l+1,\ j)$ и не содержащих вершину $j+1$.

Оценим $|\boldsymbol{B}|$. Рассмотрим вершины $j-l+1$, $j-l+2$, j и произвольные $n-3$ различные вершины верхнего уровня графа T_{2l-2}, отличные от $j-l+1$, $j-l+2$. Указанный набор вершин обозначим через V_2. Так как любые две различные вершины из $V_2 \setminus \{j\}$ смежны в T_{2l-2} и $(j-l+1,\ j), (j-l+2,\ j) \in E(T_{2l-2})$, то граф T_{2l-2} содержит подграф M с множеством вершин V_2, изоморфный F и такой, что вершинам x, y, w графа F соответствуют вершины $j-l+1$, $j-l+2$, j (в указанном порядке) подграфа M. Кроме того, подграфу M принадлежит ребро $(j-l+1,\ j)$ и не принадлежит вершина $j+1$. Значит, $M \in \boldsymbol{B}$. Таким образом, каждому набору из $n-3$ различных вершин верхнего уровня графа T_{2l-2}, отличных от $j-l+1$, $j-l+2$, соответствует подграф из $\boldsymbol{B}$, при этом разным наборам по построению соответствуют разные подграфы из $\boldsymbol{B}$. Таких наборов ровно C_{l-2}^{n-3}, поэтому $t_j - t_{j+1} = |\boldsymbol{B}| \ge C_{l-2}^{n-3}$ и с учетом оценки (11) и истинного при $n \ge 4$, $l > n$ неравенства $C_{l-2}^{n-3} > C_{l-3}^{n-3}$ получаем

$$t_j - t_{j+1} > p \ \ \forall j \in \{l+1, l+2, \ldots, 2l-3\}. \tag{16}$$

В частности, из формулы (16) при $p > 0$ следует истинность неравенств (15).

На основании формул (10), (12), (13) и (15) имеем

$$t_l = t_{l-1} > t_{l-2} > \ldots > t_2 > t_1 = t_{l+1} > t_{l+2} > \ldots > t_{2l-3} > t_{2l-2}. \tag{17}$$

Из соотношений (17) следует, что среди F-степеней вершин графа T_{2l-2} ровно $2l-4 = |T_{2l-2}| - 2$ различных F-степеней. Значит, T_{2l-2} – почти-почти F-иррегулярный граф.

Из формул (14), (16) и (17) получаем, что $d(T_{2l-2},\ F) > p$. Следовательно, граф T_{2l-2} удовлетворяет условию 1) теоремы 2.

Докажем, что граф T_{2l-2} удовлетворяет условию 2) теоремы 2. Для этого с учетом соотношений (17) достаточно показать, что верно неравенство

$$t_{2l-2} > p. \tag{18}$$

Как и выше, нетрудно установить, что в графе T_{2l-2} есть хотя бы C_{l-2}^{n-3} подграфов, изоморфных F, содержащих вершину $2l-2$ и $n-1$ вершин верхнего уровня графа T_{2l-2}, включая $l-1$ и l, таких, что вершинам x, y, w графа F соответствуют вершины $l-1$, l, $2l-2$ (в указанном порядке) данных подграфов. Следовательно, при $n \ge 4$, $l > n$ для F-степени вершины $2l-2$ в графе T_{2l-2} в силу неравенства (11) справедлива оценка

$$t_{2l-2} \ge C_{l-2}^{n-3} > C_{l-3}^{n-3} > p.$$

Тем самым истинно неравенство (18).

Таким образом, все условия теоремы 2 соблюдены. Следовательно, существует бесконечно много F-иррегулярных графов в случае, когда F является двусвязным графом порядка $n \ge 4$ с $\delta(F) = 2$. Теорема 3 доказана.

Следствие из теоремы 3. *Для любого натурального $n \ge 3$ существует бесконечно много C_n-иррегулярных графов, где C_n – простой цикл на n вершинах.*

Заключение

В работе найдено достаточное условие существования бесконечного числа F-иррегулярных графов для любого двусвязного графа F. Также было доказано, что множество F-иррегулярных графов бесконечно в случае, когда F – произвольный двусвязный граф с $\delta(F) = 2$.

Авторы полагают, что наряду с гипотезой 1 справедливо более сильное утверждение, которое назовем сильной гипотезой об F-иррегулярных графах.

Гипотеза 2. Для любого связного графа F на трех и более вершинах существует бесконечно много F-иррегулярных графов.

Библиографические ссылки / References

1. Behzad M, Chartrand G. No graph is perfect. *The American Mathematical Monthly.* 1967;74(8):962–963. DOI: 10.2307/2315277.
2. Alavi Y, Chartrand G, Chung FRK, Erdös P, Graham RL, Oellermann OR. Highly irregular graphs. *Journal of Graph Theory.* 1987;11(2):235–249. DOI: 10.1002/jgt.3190110214.
3. Chartrand G, Erdös P, Oellermann OR. How to define an irregular graph. *The College Mathematics Journal.* 1988;19(1):36–42. DOI: 10.1080/07468342.1988.11973088.
4. Ali A, Chartrand G, Zhang P. *Irregularity in graphs.* Cham: Springer; 2021. X, 109 p. (Bellomo N, Benzi M, Jorgensen P, Li T, Melnik R, Scherzer O, et al., editors. Springer briefs in mathematics). DOI: 10.1007/978-3-030-67993-4.
5. Chartrand G, Holbert KS, Oellermann OR, Swart HC. *F*-degrees in graphs. *Ars Combinatoria.* 1987;24:133–148.

Получена 05.10.2023 / исправлена 17.06.2024 / принята 21.06.2024.
Received 05.10.2023 / revised 17.06.2024 / accepted 21.06.2024.