УДК 517.925.7

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ИЕРАРХИЕЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Е. В. ГРОМАК[1)]***, В. И. ГРОМАК***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается нестационарная иерархия второго уравнения Пенлеве, которая представляет собой последовательность полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, определяемую оператором $\tilde{L}_N$. Первый член этой иерархии при $N = 1$ есть второе уравнение Пенлеве, а последующие уравнения порядка $2N$ содержат произвольные параметры. Их также называют обобщенными высшими аналогами второго уравнения Пенлеве порядка $2N$. С данной иерархией связаны иерархии первого уравнения Пенлеве и уравнения P_{34} из классификационного списка канонических уравнений Пенлеве. Кроме того, рассматривается линейное уравнение второго порядка, коэффициенты которого определяются решениями уравнений нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве и уравнения P_{34}. С использованием метода Фробениуса получены достаточные условия мероморфности общего решения линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, определяемыми решениями первых трех уравнений нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве и уравнения P_{34}. Также получены достаточные условия рациональности общего решения линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, определяемыми рациональными решениями уравнений нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве и уравнения P_{34}.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве; иерархия второго уравнения Пенлеве; мероморфные решения.

ON MEROMORPHIC SOLUTIONS OF THE EQUATIONS RELATED TO THE NON-STATIONARY HIERARCHY OF THE SECOND PAINLEVÉ EQUATION

E. V. GROMAK[a]***, V. I. GROMAK***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: E. V. Gromak (lenagromak@tut.by)

The non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation is herein considered. It is a sequence of polynomial ordinary differential equations of even order with a single differential-algebraic structure determined by the operator $\tilde{L}_N$. The first member of this hierarchy for $N = 1$ is the second Painlevé equation, and the subsequent equations of $2N$ order contain

Образец цитирования:
Громак ЕВ, Громак ВИ. О мероморфных решениях уравнений, связанных с нестационарной иерархией второго уравнения Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:19–31.
EDN: ODCDYE

For citation:
Gromak EV, Gromak VI. On meromorphic solutions of the equations related to the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;3:19–31. Russian.
EDN: ODCDYE

Авторы:
Елена Валерьевна Громак – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.
Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:
Elena V. Gromak, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
lenagromak@tut.by
https://orcid.org/0000-0003-3646-6227
Valeri I. Gromak, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.
vgromak@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1868-2313

arbitrary parameters. They are also named generalised higher analogues of the second Painlevé equation of $2N$ order. The hierarchies of the first Painlevé equation and the equation P_{34} from the classification list of canonical Painlevé equations are also associated with this hierarchy. In this paper, we also consider a second order linear equation the coefficients of which are determined by solutions of the hierarchy of the second Painlevé equation and the equation P_{34}. Using the Frobenius method, we obtain sufficient conditions for the meromorphicity of the general solution of second-order linear equations with the coefficients defined by the solutions of the first three equations of the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation and the equation P_{34}. We also find sufficient conditions for the rationality of the general solution of second-order linear equations with coefficients determined by rational solutions of the equations of the non-stationary hierarchy of the second Painlevé equation and the equation P_{34}.

Keywords: Painlevé equations; the hierarchy of the second Painlevé equation; meromorphic solutions.

Введение

Известно, что канонические уравнения Пенлеве $(P_1 - P_6)$, которые являются решением классификационной проблемы относительно свойства Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в общем случае определяют новые трансцендентные функции, имеющие приложения как в различных математических задачах, так и в вопросах физики и математической физики [1–4]. В связи с этим существует интерес к изучению иерархий уравнений Пенлеве, которые представляют собой бесконечные последовательности нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, при этом первыми членами таких иерархий являются уравнения Пенлеве [5–9]. Уравнения иерархий, как и сами уравнения Пенлеве, при специальных значениях параметров имеют специальные классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения.

Известно, что общее решение линейного уравнения $u'' + (\lambda q(z) + \mu)u = 0$ (уравнение Ламе), где $\lambda = -n(n+1), n \in \mathbb{N}$, $q(z)$ – двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами ω, ω' и двукратными полюсами в точках $m\omega + m'\omega'$, m', $m \in \mathbb{Z}$, а μ – произвольная постоянная, представляет собой мероморфную функцию [10, с. 150].

В настоящей работе найдем достаточные условия на постоянные параметры A, B, C, μ линейного уравнения

$$u'' + \left(Aw^2 + Bw + Cw' + \mu\right)u = 0, \tag{1}$$

где $w(z)$ – фиксированное решение нелинейного уравнения нестационарной иерархии второго уравнения Пенлеве, при выполнении которых общее решение уравнения (1) мероморфно или даже рационально.

Иерархия второго уравнения Пенлеве

Нестационарная иерархия второго уравнения Пенлеве имеет вид

$$\tilde{P}_2^{[2N]} : (D + 2w)\tilde{L}_N\left[w' - w^2\right] - zw - \alpha = 0,\ D(\cdot) = \frac{d}{dz}(\cdot),\ N = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где оператор $\tilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением [11]

$$D\tilde{L}_{N+1}[u] = \left(D^3 + (4u + \beta_N)D + 2u_z\right)\tilde{L}_N[u],\ \tilde{L}_1[u] = u,\ u = u(z),\ N = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

здесь β_N – параметр. Тогда для $N = 1, 2, 3$ последовательно получаем первые три уравнения иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$:

$$P_2 : w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \tag{4}$$

$$\tilde{P}_2^{[4]} : w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1\left(w'' - 2w^3\right) + zw + \alpha, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_2^{[6]} : w^{(6)} = {} & 2w^2\left(5s_1w'' + 7w^{(4)}\right) - 70w^4w'' + w\left(10s_1(w')^2 + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)}\right) - \\ & - w^{(4)}s_1 - \left(s_2 - 70(w')^2\right)w'' + 2w^3\left(s_2 - 70(w')^2\right) - 6w^5s_1 + 20w^7 + zw + \alpha,\end{aligned} \tag{6}$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

Иерархию $\tilde{P}_2^{[2N]}$ также называют обобщенной (или нестационарной) иерархией второго уравнения Пенлеве P_2 (см., например, [7–9; 12; 13]), поскольку первое уравнение этой иерархии, равно как и первое уравнение иерархии $P_2^{[2N]}$, которая впервые приведена в работе [14] и может быть получена из иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$ при $\beta = 0$ (здесь и далее $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}\right)$), есть второе уравнение Пенлеве, а последующие уравнения обобщают соответствующие уравнения иерархии $P_2^{[2N]}$. Заметим, что уравнение $\tilde{P}_2^{[2N]}$ имеет порядок $2N$, где N определяет номер оператора $\tilde{L}_N$ и номер уравнения иерархии. Аналитические свойства решений второго уравнения Пенлеве, т. е. случай $N = 1$, рассмотрены, например, в работах [2; 15], а свойства второго члена иерархии, т. е. случай $N = 2$, – в статьях [16–19].

С иерархией (2), (3), которая является редукцией иерархий KdV и mKdV [14], связаны другие иерархии обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, введем функции

$$q(z) := w'(z) - w(z)^2, \;\; \Psi^{[N]}\left(q(z)\right) := \tilde{L}_N\left[q(z)\right] - \frac{z}{2}. \tag{7}$$

Тогда уравнение (2) можно записать как $\left(D + 2w\right)\Psi^{[N]} = \alpha - \dfrac{1}{2}$, а также представить в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \;\; \left(\Psi^{[N]}\right)' + 2w\Psi^{[N]} - \sigma = 0, \tag{8}$$

где $\Psi^{[N]} = \Psi^{[N]}\left(q(z)\right)$, $\sigma = \alpha - \dfrac{1}{2}$, $(\cdot)' = D(\cdot)$. Функция $q(z)$ при этом удовлетворяет уравнению

$$\tilde{P}_{34}^{[2N]} : \Psi'' - \frac{\left(\Psi'\right)^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) определяет обобщенную иерархию уравнения P_{34} [20], так как в случае $N = 1$ функция $\Psi\left(q(z)\right)$ из формулы (7) имеет вид $\Psi_1(z) = q - \dfrac{z}{2}$, а уравнение (9) сводится к уравнению

$$q'' = \frac{4q^3 - 4zq^2 + z^2q + q' - \left(q'\right)^2 + \sigma^2 - \frac{1}{4}}{z - 2q}, \tag{10}$$

которое калибровочным преобразованием $q \to \sigma q + \dfrac{z}{2}$ приводится к виду

$$q'' = \frac{\left(q'\right)^2}{2q} - zq - 2\sigma q^2 - \frac{1}{2q}.$$

Это уравнение обладает свойством Пенлеве и имеет порядок 34 из классификационного списка Пенлеве [1, с. 456].

В случае $N = 2$ функция $\Psi\left(q(z)\right)$ имеет вид $\Psi_2(z) = q'' + 3q^2 + \beta_1 q - \dfrac{z}{2}$, а уравнение относительно $q(z)$ сводится к уравнению

$$q^{(4)} = \frac{\left(\Psi_2'\right)^2}{2\Psi_2} - 2q\Psi_2 - 6\left(q'\right)^2 - q''\left(6q + \beta_1\right) - \frac{\sigma^2}{2\Psi_2}. \tag{11}$$

В случае $N = 3$ функция $\Psi\left(q(z)\right)$ имеет вид

$$\Psi_3(z) = q^{(4)} + 10q^3 + \left(3q^2 + q''\right)s_1 + 5\left(q'\right)^2 + q\left(s_2 + 10q''\right) - \frac{z}{2},$$

а уравнение относительно $q(z)$ сводится к уравнению

$$q^{(6)} = \frac{\left(\Psi_3'\right)^2}{2\Psi_3} - 2q\Psi_3 - \left(60q + 6s_1\right)\left(q'\right)^2 - \left(30q^2 + 6qs_1 + s_2\right)q'' - 20\left(q''\right)^2 -$$

$$- 30q'q^{(3)} - \left(10q + s_1\right)q^{(4)} - \frac{\sigma^2}{2\Psi_3}, \tag{12}$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

В уравнении (9) предполагаем, что $\Psi(q) \neq 0$. В противном случае имеем уравнение

$$\tilde{P}_1^{[2N-2]} : \Psi(q) = \tilde{L}_N\left[q(z)\right] - \frac{z}{2} = 0, \tag{13}$$

которое определяет обобщенную иерархию первого уравнения Пенлеве. В силу системы (8), если $q = q(z)$ есть решение уравнения $\tilde{P}_1^{[2N-2]}$, то функция $w(z)$, определяемая из уравнения Риккати $w' - w^2 = q$, является решением уравнения $P_2^{[2N]}$ при $\alpha = \frac{1}{2}$.

При $N = 1$ в формуле (13) уравнение $w' - w^2 = \frac{z}{2}$ определяет однопараметрическое семейство решений второго уравнения Пенлеве (4) при $\alpha = \frac{1}{2}$, которые выражаются через функции Эйри и их производные.

При $N = 2$ уравнение (13) определяет первое уравнение Пенлеве $q'' + 3q^2 + \beta_1 q = \frac{z}{2}$.

Хорошо известно, что решения уравнений P_1 и P_2 являются мероморфными функциями [21]. Доказательство аналогичного свойства мероморфного продолжения (СМП) для уравнений иерархий $\tilde{P}_1^{[2N-2]}$ и $\tilde{P}_2^{[2N]}$, т. е. доказательство того, что любое локальное голоморфное решение произвольного уравнения этих иерархий допускает аналитическое продолжение до функции, мероморфной на всей комплексной плоскости, приведено в работах [22; 23]. Заметим также, что решения соответствующих уравнений иерархий $\tilde{P}_2^{[2N]}$ и $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ связаны бирациональными соотношениями (7) и (8). Следовательно, решения $w^{[N]}(z)$, $q^{[N]}(z)$ уравнений этих иерархий мероморфны или рациональны одновременно (см. [20, лемма 1]). Это означает, что уравнения иерархии $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ также обладают СМП.

Прежде всего рассмотрим некоторые свойства уравнений иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$, которые непосредственно следуют из определения оператора $\tilde{L}_N$.

Порядок подвижных полюсов решений такой же, как и для решений уравнения $P_2^{[2N]}$ (т. е. первый порядок), причем

$$w(z) = \frac{c}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - z_0)^j, \tag{14}$$

где $c \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$. В силу совпадения доминантных членов уравнения $P_2^{[2N]}$ и $\tilde{P}_2^{[2N]}$ имеют одинаковые резонансные полиномы, которые можно выписать в явной форме. Эти полиномы определяют номера коэффициентов разложения (14), являющиеся произвольными. Также решения уравнения $\tilde{P}_2^{[2N]}$, как и решения уравнения $P_2^{[2N]}$, обладают свойством нечетности относительно параметра α, т. е. уравнение $\tilde{P}_2^{[2N]}$ инвариантно относительно дискретной симметрии $S : w(z, \alpha, \beta) \to -w(z, -\alpha, \beta)$.

Для решений уравнения $\tilde{P}_2^{[2N]}$ бесконечно удаленная точка может быть точкой голоморфности, при этом для рациональных решений бесконечно удаленная точка является точкой голоморфности с разложением

$$w(z) = -\frac{\alpha}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Нетрудно привести пример значений параметров и решений уравнений иерархии $\tilde{P}_2^{[2N]}$, для которых уравнение (1) как имеет, так и не имеет СМП.

В частности, для параметров $A = \frac{1}{4}$, $B = C = \mu = 0$ и решения произвольного уравнения иерархии (2) $w = \frac{1}{z}$, $\alpha = -1$ (см. [11, лемма 2]) уравнение $u'' + \frac{1}{4z^2}u = 0$ не обладает СМП, поскольку общее решение имеет вид $u = \sqrt{z}\left(C_1 + C_2 \operatorname{Log}(z)\right)$, тогда как в случае $-A = C = 1$, $B = \mu = 0$ уравнение $u'' - \frac{2}{z^2}u = 0$ с общим решением $u = C_1 z^2 + C_2 z^{-1}$ обладает СМП.

Для получения условий наличия СМП для уравнения (1) достаточно, чтобы оно имело только регулярные особые точки в комплексной плоскости (для решений уравнений иерархий $\tilde{P}_2^{[2N]}$ это выполняется), а показатели, относящиеся к данным особым точкам, были целыми, причем разложения решений в окрестностях особых точек не должны содержать логарифмических членов, т. е., по сути, в окрестности произвольной регулярной особой точки должна существовать мероморфная фундаментальная система решений (ФСР).

Второе уравнение Пенлеве (4) и линейное уравнение (1)

Произвольное решение уравнения (4) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ в зависимости от выбора ε ($\varepsilon^2 = 1$) имеет одно из двух разложений:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} - \frac{1}{6}\varepsilon z_0 t - \frac{\alpha + \varepsilon}{4} t^2 + ht^3 + \frac{3\alpha + \varepsilon}{72} z_0 t^4 + O(t^5), \tag{15}$$

где $z - z_0 = t$, а h – произвольная постоянная. Разложение (15), по сути, определяет локальное общее решение уравнения (4) в окрестности особой точки z_0. Для особой точки z_0 определяющее уравнение записывается в виде

$$\rho(\rho - 1) + \lambda = 0, \tag{16}$$

где $\lambda = A - \varepsilon C$, и при

$$\lambda = A - \varepsilon C = -m(m+1),\ m \in \mathbb{Z}^+, \tag{17}$$

имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$, при этом m зависит от выбора ε и от выбора особой точки z_0. В соответствии с методом Фробениуса для старшего показателя $\rho_1 = m + 1$ имеем голоморфное в окрестности особой точки z_0 решение

$$u_1(z) = t^{m+1}\left(1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + O(t^5)\right),\ t = z - z_0. \tag{18}$$

Второе решение, линейно независимое с решением $u_1(z)$, можно построить по формуле $u_2(z) = u_1(z)\int^z u_1^{-2}(z)dz$. Решение $u_2(z)$ не содержит $\ln(z - z_0)$, если вычет $R_m(m) := \operatorname*{res}_{z = z_0} u_1^{-2}(z)$ равен нулю. Это условие вместе с условием целостности показателей ρ_1 и ρ_2 является достаточным для мероморфности общего решения уравнения (1) в окрестности точки $z = z_0$. Если данные условия выполняются для произвольного конечного полюса z_0, то общее решение уравнения (1) глобально мероморфно, т. е. уравнение (1) допускает СМП. Заметим, что из формулы (18) имеем

$$\begin{gathered}
R_m(0) = -2a_1,\ R_m(1) = -2\left(2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3\right),\\
R_m(2) = -2\left(3a_1^5 - 10a_1^3a_2 + 6a_1^2a_3 - 3a_2a_3 + a_1\left(6a_2^2 - 3a_4\right) + a_5\right),\\
R_m(3) = -2\left(4a_1^7 - 21a_1^5a_2 + 15a_1^4a_3 + 6a_2^2a_3 + 10a_1^3\left(3a_2^2 - a_4\right) - 3a_3a_4 - \right.\\
\left. - 3a_2a_5 + 6a_1^2\left(a_5 - 5a_2a_3\right) + a_1\left(6a_3^2 - 10a_2^3 + 12a_2a_4 - 3a_6\right) + a_7\right).
\end{gathered} \tag{19}$$

Рассмотрим различные возможности для параметров A, B, C, μ. Для поставленной задачи необходимо рассматривать независимо две возможности ($\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$), поскольку фундаментальная система должна быть мероморфной как в окрестности полюсов с вычетом 1, так и в окрестности полюсов с вычетом –1.

1. Пусть в формуле (17) $\lambda = A - \varepsilon C = 0$, т. е. $m = 0$ для обоих значений ε. Тогда это условие влечет $A = C = 0$, а определяющее уравнение (16) имеет корни $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$. Для старшего показателя $\rho_1 = 1$ получаем решение (18), где $m = 0$,

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{2},\ a_2 = \frac{B^2 - 2\mu}{12},\ a_3 = -\frac{B\varepsilon}{144}\left(B^2 - 2z_0 - 8\mu\right),$$

$$a_4 = \frac{1}{2880}\left(B^4 + 36B(\varepsilon + \alpha) + 24\mu^2 - 2B^2\left(7z_0 + 10\mu\right)\right), \ldots,$$

при этом $R_m(0) = B\varepsilon$. Следовательно, условие $B = 0$ вместе с условием $A = C = 0$ является необходимым и достаточным для мероморфности ФСР уравнения (1) в этом случае.

2. Пусть $m \neq 0$ для некоторого выбора ε. Тогда $A - \varepsilon C = -m(m+1)$, и для показателя $\rho_1 = m + 1$ имеем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{2(1+m)},\ a_2 = \frac{3B^2 + (1+m)\left(3Az_0 + mz_0 + m^2z_0 - 6\mu\right)}{12(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon\Big(-B^3 - B\big(\alpha(4+3m) + (1+m)(m^2-2)\big)z_0 + 2(1+m)(3+2m)\big(2A+m+m^2\big)(\varepsilon+\alpha) + 2B(4+3m)\mu\Big)}{24(1+m)(2+m)(3+2m)}, \ldots .$$

Тогда из формулы (19) следует: если $m = 0$, то $R_m(0) = B\varepsilon$, если же $m = 1$, то

$$R_m(1) = \frac{\varepsilon\Big(B^3 - 4(1+A)(\alpha+\varepsilon) - 2B\big(z_0 + Az_0 - 2\mu\big)\Big)}{36}.$$

Пусть $\varepsilon = 1$ и $A - C = -m_1 - m_1^2$, $m_1 \in \mathrm{Z}^+$. Для $\varepsilon = -1$ положим, что $A + C = -m_2 - m_2^2$, $m_2 \in \mathrm{Z}^+$. Тогда корни определяющего уравнения в обоих случаях целые. В первом случае имеем корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m_1$, а во втором случае – корни $\rho_1 = m_2 + 1$, $\rho_2 = -m_2$.

Для $\varepsilon = 1$, вычисляя вычеты $u_1^{-2}(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ при $m_1 = 0$ и $m_1 = 1$, получаем два случая:

$$\begin{gathered} A - C = 0,\ R_{m_1}(0) = B,\ m_1 = 0, \\ A - C = -2,\ R_{m_1}(1) = \frac{B\big(B^2 + 4\mu\big)}{36},\ A = -1,\ m_1 = 1. \end{gathered} \tag{20}$$

Для $\varepsilon = -1$ также имеем два случая:

$$\begin{gathered} A + C = 0,\ R_{m_2}(0) = B,\ m_2 = 0, \\ A + C = -2,\ R_{m_2}(1) = \frac{-B\big(B^2 + 4\mu\big)}{36},\ A = -1,\ m_2 = 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Рассматривая совместно случаи (20) и (21) и считая, что $B = 0$, для параметров получаем следующие возможности:

$$\begin{gathered} A = B = C = 0\ (m_1 = m_2 = 0), \\ A = -1,\ B = 0,\ C = 1\ (m_1 = 1,\ m_2 = 0), \\ A = -1,\ B = 0,\ C = -1\ (m_1 = 0,\ m_2 = 1). \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, справедлива нижеприведенная лемма.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ есть произвольное фиксированное решение уравнения (4) и выполняется хотя бы одно из условий (22). Тогда в окрестности произвольной особой точки решения $w(z)$ для уравнения (1) существует мероморфная ФСР.*

Доказательство. В случае выполнения первого из условий (22) общее решение выписывается в явной форме и является целым. Особые точки уравнения (1) исчерпываются особыми точками решения $w(z)$, которые при выполнении второго или третьего из условий (22) могут быть лишь регулярными особыми точками с целыми показателями как для полюсов с вычетом 1, так и для полюсов с вычетом –1. Разложения решений ФСР в окрестности произвольной особой точки z_0 не имеют $\ln(z - z_0)$. Лемма 1 доказана.

Исключая тривиальный случай (первое из условий (22)), при выполнении второго и третьего из условий (22) из уравнения (1) получаем

$$u'' + \big(\varepsilon_2 w' - w^2 + \mu\big)u = 0,\ \varepsilon_2^2 = 1. \tag{23}$$

Целью дальнейшего рассмотрения уравнений (5) и (6) является доказательство следующего утверждения, которое в силу леммы 1 справедливо для уравнения (4).

Теорема 1. *Для уравнения (23), где $w(z)$ есть произвольное фиксированное решение уравнений (4)–(6), общее решение мероморфно.*

Уравнение $\tilde{P}_2^{[4]}$ и линейное уравнение (23)

Решение уравнения (5) может иметь лишь простые полюсы (14) с вычетами ±1, ±2. Подставляя выражение $w(z) = c(z - z_0)^{-1} + \gamma(z - z_0)^r$ и сравнивая коэффициенты при первой степени γ, находим уравнение для резонансов. Если $c = \pm 1$, то резонансы $r \in \{-2, 1, 2, 5\}$. Если же $c = \pm 2$, то резонансы $r \in \{-4, -2, 5, 7\}$. Непосредственной подстановкой полярного разложения (14) убеждаемся, что в окрестности подвижного полюса z_0 решение может иметь одно из следующих представлений:

$$w(z)=\frac{\varepsilon}{t}+h_1t+h_2t^2+c_3t^3+c_4t^4+h_3t^5+\sum_{j=6}^{\infty}c_jt^j, \tag{24}$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные, а $c_3=\frac{-z_0\varepsilon-6\beta_1h_1+50h_1^2\varepsilon}{20}$, $c_4 = \frac{-\varepsilon-\alpha-4\beta_1h_2+60h_1h_2\varepsilon}{36}$ и все остальные коэффициенты c_j, $j \geq 6$, однозначно определяются через h_1, h_2, h_3 и z_0;

$$w(z)=\frac{2\varepsilon}{t}+c_1t+c_3t^3+c_4t^4+h_1t^5+c_6t^6+h_2t^7+\sum_{j=8}^{\infty}c_jt^j, \tag{25}$$

где $t = z - z_0$, $\varepsilon^2 = 1$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а $c_1=\frac{\varepsilon\beta_1}{30}$, $c_3=\frac{90z_0\varepsilon+13\varepsilon\beta_1^2}{12\,600}$, $c_4=\frac{2\varepsilon+\alpha}{144}$, $c_6=\frac{\beta_1(\varepsilon+5\alpha)}{21\,600}$ и все остальные коэффициенты c_j, $j \geq 8$, однозначно определяются через h_1, h_2 и z_0.

Покажем, что для решений уравнения (5) справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $w(z)$ есть произвольное фиксированное решение уравнения (5). Тогда в окрестности произвольной особой точки решения $w(z)$ для уравнения (23) существует мероморфная ФСР.*

Доказательство. 1. Пусть $w(z)\neq 0$ – решение уравнения (5) с разложением (24) в окрестности произвольного полюса $z = z_0$. Тогда для уравнения (1) в окрестности особой точки z_0 определяющее уравнение принимает вид (16) и при выполнении условия (17) имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1=-\frac{B\varepsilon}{2(1+m)},\quad a_2=\frac{B^2-2(1+m)\left(\varepsilon h_1\left(3A+m+m^2\right)+\mu\right)}{4(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3=\frac{-B^3\varepsilon-8\varepsilon h_2\left(2A+m+m^2\right)\left(3+5m+2m^2\right)+2B\varepsilon(4+3m)\mu+6Bh_1\left(-2-2m+m^2+m^3+A(4+3m)\right)}{24(1+m)(2+m)(3+2m)}.$$

Обозначим вычет полюса $z=z_0$ функции $u_1^{-2}(z)$ при $m=m_0$ через $R_m(m_0)=\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}u_1^{-2}(z)\Big|_{m=m_0}$. Тогда из формул (18) и (19) следует: если $m = 0$, то $R_m(0)=B\varepsilon$, если же $m = 1$, то $R_m(1)=\frac{B\varepsilon\left(B^2+4\mu\right)}{36}$.

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$ и $R_m(1)=0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = 0$, $m = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, при этом $R_m(0)=0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (5) с разложением (24) имеет мероморфную ФСР.

2. Рассмотрим случай полюсов решения $w(z)$ уравнения (5) с разложением (25). В этом случае определяющее уравнение для уравнения (1) принимает вид (16), где $\lambda = 4A - 2\varepsilon C$, и при

$$\lambda=4A-2\varepsilon C=-m(m+1),\quad m\in \mathbb{Z}^+, \tag{26}$$

имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Тогда для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1=-\frac{B\varepsilon}{1+m},\quad a_2=\frac{120B^2-(1+m)\left(12A\beta_1+\left(m+m^2\right)\beta_1+60\mu\right)}{120(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3=\frac{B\left(4A(4+3m)\beta_1-40B^2+(1+m)\left(m^2-2\right)\beta_1+20(4+3m)\mu\right)}{120\varepsilon(1+m)(2+m)(3+2m)},$$

при этом

$$R_m(0)=2B\varepsilon,$$

$$R_m(1)=\frac{B\varepsilon\left(20B^2+(2\varepsilon C-1)\beta_1+20\mu\right)}{90},$$

$$R_m(2)\Big|_{B=0}=\frac{(2\varepsilon+\alpha)(C-\varepsilon)}{600}.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A=-1$, $C=\varepsilon_2$, $B=0$. Тогда при $\varepsilon_2=\varepsilon$ имеем $\lambda=-6$, $m=2$, $\rho_1=3$, $\rho_2=-2$ и $R_m(2)=0$. Если же $\varepsilon_2=-\varepsilon$, то $\lambda=-2$, $m=1$, $\rho_1=2$, $\rho_2=-1$, при этом $R_m(1)=0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (5) с разложением (25) имеет мероморфную ФСР, что и доказывает справедливость леммы 2.

Уравнение (6) и линейное уравнение (23)

Непосредственной подстановкой разложения (14) в уравнение (6) убеждаемся, что в окрестности подвижного полюса $z=z_0$ решение уравнения (6) может иметь одно из следующих представлений:

$$w(z)=\frac{\varepsilon}{t}+h_1t+h_2t^2+h_3t^3+h_4t^4+c_5t^5+c_6t^6+h_5t^7+\sum_{j=8}^{\infty}c_jt^j, \tag{27}$$

где $t=z-z_0$, $\varepsilon^2=1$, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – произвольные постоянные,

$$c_5=\frac{-420h_1^3+112\varepsilon h_2^2+504\varepsilon h_1h_3-\varepsilon z_0+50\varepsilon h_1^2s_1-20h_3s_1-6h_1s_2}{336},$$

$$c_6=\frac{\varepsilon\left(-1+560h_2h_3+840h_1h_4+60h_1h_2s_1\right)-4\left(140h_1^2h_2+9h_4s_1+h_2s_2\right)-\alpha}{960}$$

и все остальные коэффициенты c_j, $j\geq 8$, однозначно определяются через h_1-h_5 и z_0;

$$w(z)=\frac{2\varepsilon}{t}+h_1t+c_3t^3+h_2t^4+c_5t^5+c_6t^6+h_3t^7+\sum_{j=8}^{\infty}c_jt^j, \tag{28}$$

где $t=z-z_0$, $\varepsilon^2=1$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные,

$$c_3=\frac{30s_1h_1-\varepsilon s_2-770\varepsilon h_1^2}{140},$$

$$c_5=\frac{5\varepsilon\left(s_1s_2+z_0\right)-6\left(25s_1^2+32s_2\right)h_1+10\,260\varepsilon s_1h_1^2-168\,840h_1^3}{5040},$$

$$c_6=\frac{2\varepsilon+\alpha-48h_2\left(3s_1-140\varepsilon h_1\right)}{2400}$$

и все остальные коэффициенты c_j, $j\geq 8$, однозначно определяются через h_1-h_3 и z_0;

$$w(z)=\frac{3\varepsilon}{t}+\frac{\varepsilon s_1}{70}t+c_3t^3+c_5t^5-\frac{3\varepsilon+\alpha}{14\,400}t^6+h_1t^7+\sum_{j=8}^{\infty}c_jt^j, \tag{29}$$

где $t=z-z_0$, $\varepsilon^2=1$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а $c_3=\dfrac{\varepsilon\left(19s_1^2-70s_2\right)}{88\,200}$, $c_5=\dfrac{\varepsilon\left(207s_1^3-1085s_1s_2-6125z_0\right)}{67\,914\,000}$, $c_8=\dfrac{-s_1(\varepsilon+7\alpha)}{7\,056\,000}$, $c_9=h_2$, … .

1. Пусть $w(z)\neq 0$ – решение уравнения (6) с разложением (27) в окрестности произвольного полюса $z=z_0$. Тогда для уравнения (1) и особой точки z_0 определяющее уравнение принимает вид (16) и при выполнении условия (17) имеет целые корни $\rho_1=m+1$, $\rho_2=-m$. Для показателя $\rho_1=m+1$ получаем решение (18), где

$$a_1=-\frac{B\varepsilon}{2(1+m)},\quad a_2=\frac{B^2-2(1+m)\left(\varepsilon h_1\left(3A+m+m^2\right)+\mu\right)}{4(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3=\frac{-\left(B^3\varepsilon+4(1+m)(3+2m)\left(Bh_1+2\varepsilon h_2\left(2A+m+m^2\right)\right)-2B\varepsilon(4+3m)\left(h_1\left(3A+m+m^2\right)+\mu\right)\right)}{24(1+m)(2+m)(3+2m)}.$$

Обозначим вычет полюса $z = z_0$ функции $u_1^{-2}(z)$ при $m = m_0$ через $R_m(m_0) = \left.\operatorname*{res}_{z=z_0} u_1^{-2}(z)\right|_{m=m_0}$. Тогда из формул (18) и (19) следует: если $m = 0$, то $R_m(0) = B\varepsilon$, если же $m = 1$, то

$$R_m(1) = \frac{B^3\varepsilon + 8(C + A\varepsilon)h_2 + 4B\big((1 + 2A + \varepsilon C)h_1 + \varepsilon\mu\big)}{36}.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$ и $R_m(1) = 0$. Если же $A = -1$, $C = -\varepsilon$, $B = 0$, то $\lambda = 0$, $m = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, при этом $R_m(0) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (27) имеет мероморфную ФСР.

2. Рассмотрим случай полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (28). В этом случае определяющее уравнение принимает вид (16), где $\lambda = 4A - 2\varepsilon C$, и при выполнении условия (26) имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Тогда для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{B\varepsilon}{1+m},\quad a_2 = \frac{-4B^2 + 2(1+m)\mu + \varepsilon(1+m)\left(12A + m + m^2\right)h_1}{4(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{B\Big(-4B^2\varepsilon + 2\varepsilon(4+3m)\mu + 3\big(4A(4+3m) + (1+m)(m^2-2)\big)h_1\Big)}{12(1+m)(2+m)(3+2m)},$$

при этом

$$R_m(0) = 2B\varepsilon,$$

$$R_m(1) = \frac{B\Big(2\varepsilon\left(B^2 + \mu\right) + 3(2\varepsilon C - 1)h_1\Big)}{9},$$

$$\left.R_m(2)\right|_{B=0} = \frac{-6h_2(\varepsilon - C)}{25}.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -6$, $m = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = -2$ и $R_m(2) = 0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = -2$, $m = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$, при этом $R_m(1) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (28) имеет мероморфную ФСР.

3. Рассмотрим случай полюсов решения $w(z)$ уравнения (6) с разложением (29). В этом случае определяющее уравнение принимает вид (16), где $\lambda = 9A - 3\varepsilon C$, и при

$$\lambda = 9A - 3\varepsilon C = -m(m+1),\quad m \in \mathrm{Z}^+,$$

имеет целые корни $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Тогда для показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем решение (18), где

$$a_1 = -\frac{3B\varepsilon}{2(1+m)},\quad a_2 = \frac{945B^2 - (1+m)\Big(\left(27A + m + m^2\right)s_1 + 210\mu\Big)}{420(1+m)(3+2m)},$$

$$a_3 = \frac{B\varepsilon\Big(-315B^2 + 9A(4+3m)s_1 + (1+m)\left(m^2-2\right)s_1 + 70(4+3m)\mu\Big)}{280(1+m)(2+m)(3+2m)}, \ldots,$$

при этом

$$R_m(0) = 3B\varepsilon,$$

$$R_m(1) = \frac{B\varepsilon\left(945B^2 + 2s_1(1 + 18A + 3\varepsilon C) + 420\mu\right)}{1260},$$

$$\left.R_m(2)\right|_{B=0} = \left.R_m(3)\right|_{B=0} = 0.$$

Пусть, как и в уравнении (23), $A = -1$, $C = \varepsilon_2$, $B = 0$. Тогда при $\varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем $\lambda = -12$, $m = 3$, $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = -3$ и $R_m(3) = 0$. Если же $\varepsilon_2 = -\varepsilon$, то $\lambda = -6$, $m = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = -2$, при этом $R_m(2) = 0$.

Следовательно, уравнение (23) в окрестности полюсов решения $w(z)$ уравнений (5) и (6) с возможными разложениями (24), (25) и (27)–(29) соответственно имеет мероморфную ФСР, что и доказывает теорему 1 для уравнений (5) и (6).

Рациональные решения уравнения (2) и линейное уравнение (23)

В этом разделе покажем, что общее решение уравнения (23) для решений уравнений иерархии (2) может быть рациональным.

Известно (см., например, [11]), что условие $\alpha = n \in Z$ является необходимым и достаточным условием существования рациональных решений $w(z, \alpha)$ и $q(z, \sigma, \beta)$ уравнений иерархии (2) и (9) соответственно. Рациональные решения имеют структуру

$$w^{[N]}(z, n) = \frac{d}{dz}\left(\ln \frac{Q_{n-1}^{[N]}(z)}{Q_n^{[N]}(z)}\right), \; q^{[N]}\left(z, n + \frac{1}{2}, \beta\right) = 2\frac{d^2}{dz^2}\ln Q_n^{[N]}(z), \; \alpha = n, \tag{30}$$

где $Q_n^{[N]}(z)$ – обобщенные полиномы Яблонского – Воробьева, которые для N-го уравнения иерархии могут быть построены по рекуррентным соотношениям

$$Q_{n+1}^{[N]}(z)Q_{n-1}^{[N]}(z) = z\left(Q_n^{[N]}(z)\right)^2 - 2\left(Q_n^{[N]}(z)\right)^2 \tilde{L}_N\left[2\frac{d^2}{dz^2}\ln Q_n^{[N]}(z)\right], \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

с начальными полиномами $Q_0^{[N]} = 1$, $Q_1^{[N]} = z$.

Структура полиномов $Q_n^{[N]}(z)$ получена в работе [11]. В частности, справедливо соотношение (формула (48) в статье [11]; далее для упрощения записи опускаем верхний индекс, т. е. $Q_n^{[N]}(z) = Q_n$)

$$Q_{n-1}Q_{n+1}' - Q_{n-1}'Q_{n+1} = (2n+1)Q_n^2. \tag{31}$$

Из формулы (31) получаем два соотношения:

$$(2n+1)\frac{Q_n^2}{Q_{n-1}^2} = \left(\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}}\right)', \; -(2n+1)\frac{Q_n^2}{Q_{n+1}^2} = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}}\right)'. \tag{32}$$

Прежде всего заметим, что уравнение (23) при $\mu = 0$ имеет решение $u_1(z) = \exp\left(-\varepsilon_2 \int^z w(z)\,dz\right)$, которое в силу формулы (30) для рационального решения $w(z)$ записывается в виде

$$u_1(z) = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)^{-\varepsilon_2}, \; \varepsilon_2^2 = 1.$$

Второе решение уравнения (23) при $\mu = 0$, линейно независимое с решением $u_1(z)$, построим по формуле

$$u_2(z) = u_1(z)\int^z u_1^{-2}(z)\,dz = \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)^{-\varepsilon_2}\int^z \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)^{2\varepsilon_2} dz. \tag{33}$$

Из формулы (33) при $\varepsilon_2 = 1$, считая, что во втором из соотношений (32) $n \to n - 1$, находим

$$u_2(z) = -\frac{1}{2n-1}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\int^z \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_n}\right)' dz = -\frac{1}{2n-1}\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}.$$

В этом случае общее решение уравнения (23) при $\mu = 0$ и $\varepsilon_2 = 1$ имеет вид

$$u(z) = \frac{C_1Q_n + C_2Q_{n-2}}{Q_{n-1}}. \tag{34}$$

Если в уравнении (23) $\mu = 0$ и $\varepsilon_2 = -1$, то $u_1(z) = \dfrac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$. Тогда в силу формулы (33) получаем

$$u_2(z)=\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\int^z\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)^2dz=\frac{1}{2n+1}\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\int^z\left(\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}}\right)'dz=\frac{1}{2n+1}\frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Общее решение уравнения (23) при $\mu=0$ и $\varepsilon_2=-1$ имеет вид

$$u(z)=\frac{C_1Q_{n-1}+C_2Q_{n+1}}{Q_n}. \qquad (35)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (23)* $\mu=0$ *и* $w=\frac{d}{dz}\ln\frac{Q_{n-1}^{[N]}(z)}{Q_n^{[N]}(z)}$ *есть рациональное решение уравнения (2) при* $\alpha=n\in Z^+$, *где* $Q_n^{[N]}(z)$ *– полиномы Яблонского – Воробьева. Тогда общее решение уравнения (23) имеет вид (34) при* $\varepsilon_2=1$ *и вид (35) при* $\varepsilon_2=-1$.

Из бирациональной зависимости между решениями уравнений (2) и (9), определяемой соотношениями (7) и (8), а также из теорем 1 и 2 следует справедливость нижеприведенного утверждения.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* $u''+(q(z)+\mu)u=0$ *функция* $q(z)$ *является произвольным фиксированным решением уравнений (10)–(12). Тогда общее решение этого уравнения мероморфно. Если же* $\mu=0$ *и* $q(z)$ *есть рациональное решение уравнения (9), то общее решение рационально.*

Заметим, что результаты настоящей работы для второго уравнения Пенлеве (2) частично получены в статье [24]. Некоторые результаты данного исследования анонсированы в публикации [25]. Аналогичная задача для иерархии первого уравнения Пенлеве рассмотрена в работе [26].

Пример. Для уравнения (6) ($N=3$) первые полиномы Яблонского – Воробьева имеют вид

$$Q_0^{[3]}=1,\ Q_1^{[3]}=z,\ Q_2^{[3]}=z^3+4s_2,$$
$$Q_3^{[3]}=z^6+20s_2z^3-144s_1z-80s_2^2,$$
$$Q_4^{[3]}=z^{10}+60s_2z^7-1008s_1z^5+14\,400z^3+$$
$$+\,20\,160s_1s_2z^2+11\,200s_2^3z-48\,384s_1^2+57\,600s_2.$$

Тогда при $\alpha=3$ получаем рациональное решение

$$w_3^{[3]}=\frac{3z^2}{z^3+4s_2}-\frac{6\left(z^5+10s_2z^2-24s_1\right)}{z^6+20s_2z^3-144s_1z-80s_2^2}.$$

Линейное уравнение (23) при $\mu=0$, $w=w_3^{[3]}$ и $\varepsilon_2=1$ и $\varepsilon_2=-1$ соответственно принимает вид

$$u''+\frac{6\left(8s_2z-z^4\right)}{\left(z^3+4s_2\right)^2}u=0,$$

$$u''-\frac{12\left(z^{10}+432s_1z^5+600s_2^2z^4+1600s_2^3z+3456s_1^2\right)}{\left(z^6+20s_2z^3-144s_1z-80s_2^2\right)^2}u=0.$$

В силу теоремы 2 эти уравнения имеют общее решение $u(z)=\frac{C_1Q_3^{[3]}+C_2Q_1^{[3]}}{Q_2^{[3]}}$ и $u(z)=\frac{C_1Q_2^{[3]}+C_2Q_4^{[3]}}{Q_3^{[3]}}$ соответственно. Заметим, что в приведенных формулах s_1, s_2 – произвольные параметры уравнения (6), а C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Библиографические ссылки

1. Айнс ЭЛ. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Эфрос АМ, редактор. Харьков: Научно-техническое издательство Украины; 1939. 719 с.

2. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Berlin: De Gruyter; 2002. 303 p. (De Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.

3. Кудряшов НА. *Методы нелинейной математической физики.* Долгопрудный: Интеллект; 2010. 364 с.

4. Итс АР, Капаев АА, Новокшенов ВЮ, Фокас АС. *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана.* Москва: Институт компьютерных исследований; 2005. 728 с. Совместно с издательством «Регулярная и хаотическая динамика».

5. Conte R, Musette M. *The Painlevé handbook.* Dordrecht: Springer; 2008. XXIII, 256 p.

6. Gromak VI. Bäcklund transformatios of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winternitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada.* Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).

7. Clarkson PA, Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach. *Inverse Problems.* 1999;15(1):175–187. DOI: 10.1088/0266-5611/15/1/019.

8. Clarkson PA, Mansfield EL. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity.* 2003;16(3):R1–R26. DOI: 10.1088/0951-7715/16/3/201.

9. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.

10. Гурса Э. *Курс математического анализа. Том 3. Часть 2, Интегральные уравнения. Вариационное исчисление.* Шестопал МГ, переводчик; Степанов ВВ, редактор. Москва: Государственное технико-теоретическое издательство; 1934. 318 с.

11. Громак ВИ. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференциальные уравнения.* 2020;56(8):1017–1033. DOI: 10.1134/S0374064120080038.

12. Kudryashov NA. Amalgamations of the Painlevé equations. *Journal of Mathematical Physics.* 2003;44(12):6160–6178. DOI: 10.1063/1.1623332.

13. Bobrova I. On symmetries of the non-stationary $P_{\mathrm{II}}^{(n)}$ hierarchy and their applications. arXiv:2010.10617v2 [Preprint]. 2020 [cited 2020 November 23]: [25 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/2010.10617v2.

14. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics.* 1979;61(1):31–53. DOI: 10.1002/sapm197961131.

15. Okamoto K. Studies on the Painlevé equations. III. Second and fourth Painlevé equations, P_{II} and PIV. *Mathematische Annalen.* 1986;275(2):221–255. DOI: 10.1007/BF01458459.

16. Gromak VI, Zenchenko AS. On the theory of higher-order Painlevé equations. *Differential Equations.* 2004;40(5):625–633. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043520.27878.5c.

17. Громак ВИ, Голубева ЛЛ. Обобщенное второе уравнение Пенлеве четвертого порядка. *Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2005;4:5–10.

18. Голубева ЛЛ, Зенченко АС. Некоторые свойства решений уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$. *Труды Института математики.* 2004;12(2): 54–56.

19. Громак ВИ. О решениях уравнения четвертого порядка обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференциальные уравнения.* 2019;55(3):337–347. DOI: 10.1134/S0374064119030075.

20. Громак ВИ. О свойствах решений уравнений обобщенной иерархии уравнения P_{34}. *Дифференциальные уравнения.* 2022; 58(2):153–163.

21. Hinkkanen A, Laine I. Solutions of the first and second Painlevé equations are meromorphic. *Journal d'Analyse Mathématique.* 1999;79:345–377. DOI: 10.1007/BF02788247.

22. Домрин АВ, Сулейманов БИ, Шумкин МА. О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова.* 2020;311:106–122. DOI: 10.4213/tm4116.

23. Domrin AV, Shumkin MA, Suleimanov BI. Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type. *Journal of Mathematical Physics.* 2022;63(2):023501. DOI: 10.1063/5.0075416.

24. Громак ЕВ. О мероморфных решениях линейных уравнений второго порядка, связанных со вторым уравнением Пенлеве. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2022;12(3):42–49.

25. Громак ЕВ, Громак ВИ. О глобальной мероморфности решений линейных уравнений, связанных со вторым уравнением Пенлеве и его иерархией. В: Амелькин ВВ, Антоневич АБ, Астровский АИ, Васьковский ММ, Гладков АЛ, Громак ВИ и др., редакторы. *Еругинские чтения – 2023. Материалы XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 23–27 мая 2023 г.; Могилёв, Беларусь. Часть 1.* Могилёв: Белорусско-Российский университет; 2023. с. 9–11.

26. Громак ЕВ. О мероморфных решениях уравнений, связанных с первым уравнением Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:15–22. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-15-22.

References

1. Ince EL. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Efros AM, editor. Kharkiv: Nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo Ukrainy; 1939. 719 p. Russian.

2. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Berlin: De Gruyter; 2002. 303 p. (De Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.

3. Kudryashov NA. *Metody nelineinoi matematicheskoi fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Intellekt; 2010. 364 p. Russian.

4. Its AR, Kapaev AA, Novokshenov VYu, Fokas AS. *Transtsendenty Penleve. Metod zadachi Rimana* [Painlevé transcendents. Method of the Riemann problem]. Moscow: Institut komp'yuternykh issledovanii; 2005. 728 p. Co-published by the «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika». Russian.

5. Conte R, Musette M. *The Painlevé handbook.* Dordrecht: Springer; 2008. XXIII, 256 p.

6. Gromak VI. Bäcklund transformatios of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winternitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada.* Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).

7. Clarkson PA, Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach. *Inverse Problems.* 1999;15(1):175–187. DOI: 10.1088/0266-5611/15/1/019.

8. Clarkson PA, Mansfield EL. The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity.* 2003; 16(3):R1–R26. DOI: 10.1088/0951-7715/16/3/201.

9. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.

10. Goursat É. *Cours d'analyse mathématique. Tome 3, Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations.* 5[e] édition. Paris: Gauthier-Villars; 1933. 702 p.

Russian edition: Goursat É. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 3. Chast' 2, Integral'nye uravneniya. Variatsionnoe ischislenie.* Shestopal MG, translator; Stepanov VV, editor. Moscow: Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo; 1934. 318 p.

11. Gromak VI. [Analytic properties of solutions to equations in the generalized hierarchy of the second Painlevé equation]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2020;56(8):1017–1033. Russian. DOI: 10.1134/S0374064120080038.

12. Kudryashov NA. Amalgamations of the Painlevé equations. *Journal of Mathematical Physics.* 2003;44(12):6160–6178. DOI: 10.1063/1.1623332.

13. Bobrova I. On symmetries of the non-stationary $P_{\mathrm{II}}^{(n)}$ hierarchy and their applications. arXiv:2010.10617v2 [Preprint]. 2020 [cited 2020 November 23]: [25 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/2010.10617v2.

14. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Studies in Applied Mathematics.* 1979;61(1):31–53. DOI: 10.1002/sapm 197961131.

15. Okamoto K. Studies on the Painlevé equations. III. Second and fourth Painlevé equations, P_{II} and PIV. *Mathematische Annalen.* 1986;275(2):221–255. DOI: 10.1007/BF01458459.

16. Gromak VI, Zenchenko AS. On the theory of higher-order Painlevé equations. *Differential Equations.* 2004;40(5):625–633. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043520.27878.5c.

17. Gromak VI, Golubeva LL. [Generalized second Painlevé equation of the fourth order]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2005;4:5–10. Russian.

18. Golubeva LL, Zenchenko AS. [Some properties of solutions of the equation $({}_4\tilde{P}_2)$. *Trudy Instituta matematiki.* 2004;12(2): 54–56. Russian.

19. Gromak VI. [Solutions of the fourth-order equation in the generalized hierarchy of the second Painlevé equation]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2019;55(3):337–347. Russian. DOI: 10.1134/S0374064119030075.

20. Gromak VI. [On the properties of solutions of the equations in the generalized hierarchy of the equation P_{34}]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2022;58(2):153–163. Russian.

21. Hinkkanen A, Laine I. Solutions of the first and second Painlevé equations are meromorphic. *Journal d'Analyse Mathématique.* 1999;79:345–377. DOI: 10.1007/BF02788247.

22. Domrin AV, Suleimanov BI, Shumkin MA. [Global meromorphy of solutions of the Painlevé equations and their hierarchies]. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova.* 2020;311:106–122. Russian. DOI: 10.4213/tm4116.

23. Domrin AV, Shumkin MA, Suleimanov BI. Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type. *Journal of Mathematical Physics.* 2022;63(2):023501. DOI: 10.1063/5.0075416.

24. Gromak EV. On meromorphic solutions of the linear equations of the second order related to the second Painlevé equation. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2, Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control.* 2022;12(3):42–49. Russian.

25. Gromak EV, Gromak VI. [On global meromorphy of solutions of the linear equations related to the second Painlevé equation and its hierarchy]. In: Amel'kin VV, Antonevich AB, Astrovskii AI, Vas'kovskii MM, Gladkov AL, Gromak VI, et al., editors. *Ergunskie chteniya – 2023. Materialy XXI Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 23–27 maya 2023 g.; Mogilev, Belarus'. Chast' 1* [Erugin readings – 2023. Proceedings of the 21[st] International scientific conference on differential equations; 2023 May 23–27; Mogilev, Belarus. Part 1]. Mogilev: Belarusian-Russian University; 2023. p. 9–11. Russian.

26. Gromak EV. On meromorphic solutions of the equations related to the first Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:15–22. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-2-15-22.

Получена 30.06.2023 / исправлена 12.10.2023 / принята 13.10.2023.
Received 30.06.2023 / revised 12.10.2023 / accepted 13.10.2023.