УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Т. Р. НАГОРНАЯ[1]***, К. М. РАСУЛОВ***[1]

[1]*Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, 214000, г. Смоленск, Россия*

Аннотация. В односвязных областях с гладкими границами рассматривается краевая задача типа задачи Пуанкаре для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, порождающего класс обобщенных гармонических функций. При достаточно общих предположениях относительно коэффициентов краевого условия рассматриваемой задачи устанавливается, что ее решение сводится к последовательному решению хорошо изученных интегро-дифференциальной краевой задачи Гильберта и дифференциальной краевой задачи Гильберта в классах аналитических функций комплексной переменной. Кроме того, определяются необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемой задачи и доказывается ее нетеровость.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; обобщенная гармоническая функция; краевая задача Пуанкаре; обобщенная краевая задача Гильберта; интегральное уравнение; односвязная область.

Образец цитирования:
Нагорная ТР, Расулов КМ. О решении краевой задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в односвязных областях. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:6–15.
EDN: ANQMOD

For citation:
Nagornaya TR, Rasulov KM. On the solution of the Poincaré boundary value problem for generalised harmonic functions in simply connected domains. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:6–15. Russian.
EDN: ANQMOD

Авторы:
Татьяна Романовна Нагорная – старший преподаватель кафедры математического анализа физико-математического факультета.
Карим Магомедович Расулов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математического анализа физико-математического факультета.

Authors:
Tatyana R. Nagornaya, senior lecturer at the department of mathematical analysis, faculty of physics and mathematics.
tani7n@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5976-7391
Karim M. Rasulov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical analysis, faculty of physics and mathematics.
kahrimanr@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-2040-8447

ON THE SOLUTION OF THE POINCARÉ BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALISED HARMONIC FUNCTIONS IN SIMPLY CONNECTED DOMAINS

***T. R. NAGORNAYA*[a], *K. M. RASULOV*[a]**

[a]*Smolensk State University, 4 Przhevalskogo Street, Smolensk 214000, Russia*
Corresponding author: T. R. Nagornaya (tani7n@mail.ru)

Abstract. In this paper, a boundary value problem of the Poincaré type is considered for one second-order elliptic differential equation, generating a class of generalised harmonic functions, in simply connected domains with smooth boundaries. It is established that for sufficiently general assumptions about the coefficients of the boundary value condition of the considered problem, its solution reduces to the sequential solution of the well-studied integro-differential Hilbert boundary value problem and the differential Hilbert boundary value problem in classes of analytic functions of a complex variable. In addition, necessary and sufficient solvability conditions of the considered problem are obtained and its Noetherian property is proved.

Keywords: differential equation; generalised harmonic function; Poincaré boundary value problem; generalised Hilbert boundary value problem; integral equation; simply connected domain.

Введение

Пусть L – простая замкнутая кривая Ляпунова, лежащая внутри единичного круга $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ и заданная параметрическим уравнением вида $z = t(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \le s \le l$, где s – длина дуги [1], а T^+ – конечная часть комплексной плоскости переменной $z = x + iy$, ограниченная кривой L. В области T^+ рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1 - z\bar{z})^2} W(z) = 0, \tag{1}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$; $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$; $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ – неизвестная функция; n – некоторое неотрицательное целое число.

В работах [2; 3] было установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области T^+ представляется в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1 - z\bar{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^{n} B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1 - z\bar{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \tag{2}$$

где $B_k^n = \dfrac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ – аналитические в области T^+ функции.

Так как при $n = 0$ решения уравнения (1) являются комплекснозначными гармоническими функциями в области T^+ (т. е. регулярными решениями уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 W(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ в области T^+), то, следуя работам [4; 5], в дальнейшем при $n \ge 1$ решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ будем называть обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+, а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), – первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции $W(z)$ соответственно.

Через $\boldsymbol{G}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+, для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$, $f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т. е. $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гёльдера) продолжаются на кривой L вместе со своими производными до порядка m включительно.

Рассматривается следующая краевая задача: требуется найти все обобщенные гармонические функции $W(z)$ порядка n ($n \ge 1$) в области T^+, принадлежащие классу $\boldsymbol{G}_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$a(t)\frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t)\frac{\partial W(t)}{\partial y} + c(t)W(t) = q(t),\ t \in L, \tag{3}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $q(t)$ – заданные на кривой L комплекснозначные функции из класса $H(L)$ (т. е. удовлетворяющие на L условию Гёльдера).

Исходя из работы [6, с. 80], сформулированную выше задачу будем называть краевой задачей Пуанкаре для обобщенных гармонических функций порядка n, или сокращенно задачей $\boldsymbol{GP}_n$.

В работах авторов [1; 4; 5] были построены явные решения задачи $\boldsymbol{GP}_1$ в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, при определенных предположениях относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ краевого условия (3).

Настоящая статья посвящена построению общего конструктивного метода решения задачи $\boldsymbol{GP}_n$ для обобщенных гармонических функций в произвольных односвязных областях, границами которых служат кривые Ляпунова, лежащие внутри единичного круга. Ради краткости изложения ограничимся рассмотрением предлагаемого метода решения задачи $\boldsymbol{GP}_n$ для обобщенных гармонических функций первого порядка (т. е. при $n = 1$), так как распространение данного метода на случай произвольного n составляет лишь технические сложности (возникают более громоздкие формулы).

Решение задачи $\boldsymbol{GP}_1$

Рассмотрим случай, когда $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in H(L)$,

$$a(t) + ib(t) \neq 0,\ a(t) - ib(t) \neq 0,\ t \in L. \tag{4}$$

Прежде чем изложить метод решения задачи $\boldsymbol{GP}_1$, напомним одно вспомогательное интегральное представление для кусочно-аналитических функций комплексной переменной, установленное в монографии [7].

Пусть $\chi = \operatorname{Ind} G_2(t)$ – индекс Коши функции $G_2(t) = a(t) + ib(t)$ вдоль кривой L, причем в силу условий (4) имеем $G_2(t) \neq 0$. Тогда (см., например, [7, с. 354]) справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если функция* $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, $G_2(t) \neq 0$, $t \in L$, *и* $\chi < 2$, *то имеет место представление*

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)}(\tau - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)d\tau + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k, \tag{5}$$

где $\mu(\sigma) = \mu[\tau(\sigma)]$ *– действительная функция переменной* $\sigma \in [0, l]$, *удовлетворяющая условию Гёльдера,* $c_0, c_1, \ldots, c_{-\chi+1}$ *– комплексные числа, а* $c_{-\chi+2}$ *– действительное (или чисто мнимое) число, определяемые по заданной функции* $\varphi^+(z)$ *единственным образом, причем здесь под* $\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)$ *понимается ветвь, исчезающая при* $z = 0$.

Лемма 2. *Если функция* $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, $G_2(t) \neq 0$, $t \in L$, *и* $\chi \geq 2$, *то имеет место представление*

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)}(\tau - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)d\tau + c_0, \tag{6}$$

где $c_0 = \varphi^+(0)$; $\mu(\sigma) = \mu[\tau(\sigma)]$ *– действительная функция переменной* $\sigma \in [0, l]$, *которая удовлетворяет условию Гёльдера и определяется по заданной функции* $\varphi^+(z)$ *с точностью до выражения, линейно зависящего от* $2(\chi - 2) + 1$ *произвольных действительных постоянных, причем здесь также под* $\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)$ *понимается ветвь, исчезающая при* $z = 0$.

Замечание. Отметим, что с помощью дифференцирования из формулы (5) получаются следующие представления:

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) + 1\right]d\tau + \sum_{k=1}^{-\chi+2} k c_k z^{k-1},$$

$$\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1)c_k z^{k-2}.$$

Аналогично из формулы (6) получаем

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)+1\right]d\tau,$$

$$\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Переходим непосредственно к решению задачи $\boldsymbol{GP}_1$.

Во-первых, заметим, что с учетом соотношений $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$ краевое условие (3) можно переписать в следующем виде:

$$\left[a(t)+ib(t)\right]\frac{\partial W(t)}{\partial t} + \left[a(t)-ib(t)\right]\frac{\partial W(t)}{\partial \overline{t}} + c(t)W(t) = q(t),\ t\in L, \tag{7}$$

где $\frac{\partial W(t)}{\partial t} = \lim\limits_{z\to t\in L}\frac{\partial W(z)}{\partial z}$; $\frac{\partial W(t)}{\partial \overline{t}} = \lim\limits_{z\to t\in L}\frac{\partial W(z)}{\partial \overline{z}}$.

Во-вторых, из представления (2) при $n = 1$ следует, что всякая обобщенная гармоническая функция $W(z)$ из класса $\boldsymbol{G}_1\left(T^+\right)\cap H^{(2)}(L)$ задается формулой

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\overline{z}}{1-z\overline{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2\overline{z}}{1-z\overline{z}}f^+(z)},\ z\in T^+, \tag{8}$$

где $\varphi^+(z),\ f^+(z)$ – аналитические в области T^+ функции, которые принадлежат классу $A\left(T^+\right)\cap H^{(2)}(L)$.

С учетом представления (8) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(z)}{\partial z} &= \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{2\overline{z}}{1-z\overline{z}}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\overline{z}^2}{\left(1-z\overline{z}\right)^2}\varphi^+(z) + \frac{2}{\left(1-z\overline{z}\right)^2}\overline{f^+(z)},\\
\frac{\partial W(z)}{\partial \overline{z}} &= \frac{2}{\left(1-z\overline{z}\right)^2}\varphi^+(z) + \overline{\frac{d^2f^+(z)}{dz^2}} + \frac{2z}{1-z\overline{z}}\overline{\frac{df^+(z)}{dz}} + \frac{2z^2}{\left(1-z\overline{z}\right)^2}\overline{f^+(z)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В силу формул (9) краевое условие (7) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left[a(t)+ib(t)\right]\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \left[\left[a(t)+ib(t)\right]\frac{2\overline{t}}{1-t\overline{t}} + c(t)\right]\frac{d\varphi^+(t)}{dt} +\\
&+\left[\frac{2\overline{t}^2\left[a(t)+ib(t)\right]+2\left[a(t)-ib(t)\right]}{\left(1-t\overline{t}\right)^2} + \frac{2\overline{t}}{1-t\overline{t}}c(t)\right]\varphi^+(t) +\\
&+\left[a(t)-ib(t)\right]\overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}} + \left[\left[a(t)-ib(t)\right]\frac{2t}{1-t\overline{t}} + c(t)\right]\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} +\\
&+\left[\frac{2t^2\left[a(t)-ib(t)\right]+2\left[a(t)+ib(t)\right]}{\left(1-t\overline{t}\right)^2} + \frac{2t}{1-t\overline{t}}c(t)\right]\overline{f^+(t)} = q(t).
\end{aligned}$$

В свою очередь, последнее равенство можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&G_2(t)\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t)\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + G_0(t)\varphi^+(t) + M_2(t)\overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}} +\\
&+M_1(t)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t)\overline{f^+(t)} = q(t),\ t\in L,
\end{aligned} \tag{10}$$

где приняты обозначения

$$G_2(t) = a(t) + ib(t),\ G_1(t) = \frac{2\overline{t}\left[a(t) + ib(t)\right]}{1 - t\overline{t}} + c(t),$$

$$G_0(t) = \frac{2\overline{t}^2\left[a(t) + ib(t)\right] + 2\left[a(t) - ib(t)\right]}{\left(1 - t\overline{t}\right)^2} + \frac{2\overline{t}c(t)}{1 - t\overline{t}},$$

$$M_2(t) = a(t) - ib(t),\ M_1(t) = \frac{2t\left[a(t) - ib(t)\right]}{1 - t\overline{t}} + c(t),$$

$$M_0(t) = \frac{2t^2\left[a(t) - ib(t)\right] + 2\left[a(t) + ib(t)\right]}{\left(1 - t\overline{t}\right)^2} + \frac{2tc(t)}{1 - t\overline{t}}.$$

Теперь, переходя к комплексно-сопряженным значениям, из формулы (10) имеем

$$\overline{G_2(t)}\,\overline{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}} + \overline{G_1(t)}\,\overline{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}} + \overline{G_0(t)}\,\overline{\varphi^+(t)} + \overline{M_2(t)}\,\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} +$$

$$+ \overline{M_1(t)}\,\frac{df^+(t)}{dt} + \overline{M_0(t)}\, f^+(t) = \overline{q(t)},\ t \in L. \tag{11}$$

Почленно сложив равенства (10) и (11), а затем разделив обе части полученного равенства на 2, получим

$$\mathrm{Re}\left\{G_2(t)\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t)\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + G_0(t)\varphi^+(t)\right\} = Q(t),\ t \in L, \tag{12}$$

где

$$Q(t) = -\mathrm{Re}\left\{M_2(t)\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} + M_1(t)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t)\,\overline{f^+(t)}\right\} + \mathrm{Re}\,q(t) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\overline{M_2(t)}\,\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \overline{M_1(t)}\frac{df^+(t)}{dt} + \overline{M_0(t)}\, f^+(t) + \right.$$

$$\left. + M_2(t)\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} + M_1(t)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t)\,\overline{f^+(t)}\right\} + \frac{1}{2}\left(q(t) + \overline{q(t)}\right). \tag{13}$$

В свою очередь, почленно вычтя из равенства (10) равенство (11), а затем разделив обе части полученного равенства на $2i$, будем иметь

$$\mathrm{Im}\left\{G_2(t)\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t)\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + G_0(t)\varphi^+(t) + \right.$$

$$\left. + M_2(t)\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} + M_1(t)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t)\,\overline{f^+(t)}\right\} = \mathrm{Im}\,q(t),\ t \in L. \tag{14}$$

Пусть, как и прежде, $\chi = \mathrm{Ind}G_2(t)$ – индекс Коши функции $G_2(t)$ вдоль кривой L. Предположим, что функция $Q(t)$ известна. Тогда равенство (12) является дифференциальной задачей Гильберта относительно аналитической функции $\varphi^+(z)$ (см., например, [7, с. 357]).

Далее, следуя работе [7, с. 357], если $\chi < 2$, то решения $\varphi^+(z)$ дифференциальной задачи Гильберта (12) будем искать по формуле (5), а если $\chi \geq 2$, то решения $\varphi^+(z)$ данной задачи будем искать по формуле (6). В результате получаем выражение, которое представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\mu(s)$:

$$(\boldsymbol{K}\mu)(s) \equiv \mu(s) + \int\limits_L K(s, \sigma)\mu(\sigma)d\sigma = 2Q(s) - \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k\omega_k(s), \tag{15}$$

где ядро $K(s,\ \sigma)$ вполне определенным образом выражается через $G_2(t)$; $Q(s)=Q[t(s)]$. Отметим также, что, подставив в краевое условие (12) сумму $\sum\limits_{k=0}^{-\chi+2} c_k t^k$ и ее производные, а затем сгруппировав члены, содержащие одну и ту же постоянную c_k, получим функции $\omega_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots, -\chi + 2$.

Итак, дифференциальная краевая задача Гильберта (12) равносильна интегральному уравнению Фредгольма (15) в том смысле, что если $\varphi^+(z)$ – некоторое решение задачи Гильберта (12), то найдется функция $\mu(s)$, являющаяся решением уравнения Фредгольма (15) и связанная с $\varphi^+(z)$ по формуле (5) (если $\chi < 2$) или формуле (6) (если $\chi \geq 2$).

Далее введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение

$$(\boldsymbol{K}'\nu)(s) \equiv \nu(s) + \int\limits_L K(\sigma,\ s)\nu(\sigma)d\sigma = 0, \tag{16}$$

союзное с уравнением

$$(\boldsymbol{K}\mu)(s) = 0. \tag{17}$$

Как известно (см., например, [7, с. 175]), для разрешимости неоднородного интегрального уравнения Фредгольма (15) (а значит, и задачи Гильберта (12)) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int\limits_L Q_1(\sigma)\nu_k(\sigma)d\sigma = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{18}$$

где

$$Q_1(\sigma) = 2Q(\sigma) - \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k\omega_k(\sigma), \tag{19}$$

а $\nu_1(\sigma), \nu_2(\sigma), \ldots, \nu_r(\sigma)$ – полная система линейно независимых над полем действительных чисел решений однородного интегрального уравнения (16). При выполнении условий (18) общее решение неоднородного интегрального уравнения Фредгольма (15) задается формулой

$$\mu(s) = Q_1(s) + \int\limits_L R(s,\ \sigma)Q_1(\sigma)d\sigma + \sum_{j=1}^{r}\beta_j\,\mu_j(s), \tag{20}$$

где $R(s,\ \sigma)$ – обобщенная резольвента ядра $K(s,\ \sigma)$ (см., например, [8, с. 179]); $\sum\limits_{j=1}^{r}\beta_j\,\mu_j(s)$ – общее решение однородного уравнения (17), т. е. здесь $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ – произвольные действительные постоянные.

Наконец, подставляя функцию $\mu(s)$, задаваемую равенством (20), в правую часть формулы (5) (если $\chi < 2$) или формулы (6) (если $\chi \geq 2$), получаем решение дифференциальной задачи Гильберта (12) в виде

$$\begin{aligned}\varphi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[Q_1(\sigma) + \int\limits_L R(\sigma,\ \sigma_1)Q_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \sum_{j=0}^{r}\beta_j\,\mu_j(\sigma)\right](\tau - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)d\tau + \\ &+ \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Q_1(\tau)}{G_2(\tau)}(\tau - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)d\tau + \int\limits_L R_0(z,\ \tau)Q_1(\tau)d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r}\beta_j\mu_{1j}(\tau)\right](\tau - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)d\tau + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k,\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$R_0(z,\ \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{R(\sigma_1,\ \sigma)}{G_2(\tau_1)}(\tau_1 - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\tau_1}\right)d\tau_1,$$

кроме того, здесь учтено, что $\tau = \tau(\sigma)$, $\tau_1 = \tau_1(\sigma_1)$. При $\chi \geq 2$ в правой части формулы (21) сумму $\sum\limits_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k$ нужно заменить на число $c_0 = \varphi^+(0)$.

В свою очередь, с помощью дифференцирования из формулы (21) получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Q_1(\tau)}{G_2(\tau)}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) + 1\right]d\tau + \int\limits_L \frac{dR_0(z,\ \tau)}{dz}Q_1(\tau)d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r}\beta_j\mu_{1j}(\tau)\right]\left[\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) + 1\right]d\tau + \sum_{k=1}^{-\chi+2} kc_k z^{k-1},\end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L \frac{d^2 R_0(z, \tau)}{dz^2} Q_1(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r} \beta_j \mu_j(\sigma)\right]\frac{d\tau}{\tau - z} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1)c_k z^{k-2}. \tag{23}$$

При $\chi \geq 2$ в правых частях равенств (22) и (23) суммы $\sum_{k=1}^{-\chi+2} kc_k z^{k-1}$ и $\sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1)c_k z^{k-2}$ соответственно будут отсутствовать.

Переходя к пределу при $z \to t \in L$, с учетом формул Сохоцкого, выражений (13) и (19) из формул (21), (22) и (23) соответственно получаем

$$\varphi^+(t) = \sum_{k=0}^{2}\int_L R_{1k}(t, \tau)\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^{2}\int_L N_{1k}(t, \tau)\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}} d\tau + \int_L R_1(t, \tau) q_1(\tau) d\tau - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma)\right](\tau - t)\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) d\tau - \int_L R_0(t, \tau)\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma)\right] d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r} \beta_j \mu_{1j}(\tau)\right](\tau - t)\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) d\tau + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k t^k, \tag{24}$$

$$\frac{d\varphi^+(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{2}\int_L \frac{dR_{1k}(t, \tau)}{dt}\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^{2}\int_L \frac{dN_{1k}(t, \tau)}{dt}\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}} d\tau + \int_L \frac{dR_1(t, \tau)}{dt} q_1(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma)\right]\left[\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + 1\right] d\tau - \int_L \frac{dR_0(t, \tau)}{dt}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma)\right] d\tau - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r} \beta_j \mu_{1j}(\tau)\right]\left[\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + 1\right] d\tau + \sum_{k=1}^{-\chi+2} kc_k t^{k-1}, \tag{25}$$

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} = -\frac{1}{2G_2(t)}\left\{\overline{M_2(t)}\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \overline{M_1(t)}\frac{df^+(t)}{dt} + \overline{M_0(t)} f^+(t) + M_2(t)\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} + \right. \\ \left. + M_1(t)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t)\overline{f^+(t)}\right\} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{M_2(\tau)}\frac{d^2 f^+(\tau)}{d\tau^2} + \overline{M_1(\tau)}\frac{df^+(\tau)}{d\tau} + \overline{M_0(\tau)} f^+(\tau)}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{M_2(\tau)\overline{\frac{d^2 f^+(\tau)}{d\tau^2}} + M_1(\tau)\overline{\frac{df^+(\tau)}{d\tau}} + M_0(\tau)\overline{f^+(\tau)}}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{q_1(t)}{G_2(t)} + \\ + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{q_1(\tau)}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=0}^{2}\int_L R_{2k}(t, \tau)\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^{2}\int_L N_{2k}(t, \tau)\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}} d\tau + \\ + 2\int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} q_1(\tau) d\tau - \frac{1}{2G_2(t)}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(s)\right] - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma)\right]\frac{d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma)\right] d\tau + \\ + \frac{1}{2G_2(t)}\left[\sum_{j=0}^{r} \beta_j \mu_j(s)\right] + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r} \beta_j \mu_j(\sigma)\right]\frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1)c_k t^{k-2}, \tag{26}$$

где

$$q_1(t)=\frac{1}{2}\left(q(t)+\overline{q(t)}\right),\ R_1(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\frac{1}{G_2(\tau)}(\tau-t)\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)+2R_0(t,\tau),$$

$$R_{1k}(t,\tau)=-\frac{1}{2}\overline{M_k(\tau)}R_1(t,\tau),\ N_{1k}(t,\tau)=-\frac{1}{2}M_k(\tau)R_1(t,\tau),$$

$$R_{2k}(t,\tau)=-\frac{d^2R_0(t,\tau)}{dt^2}\overline{M_k(\tau)},\ N_{2k}(t,\tau)=-\frac{d^2R_0(t,\tau)}{dt^2}M_k(\tau),\ k=0,1,2.$$

Поскольку $f^+(z)\in A(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ и L является кривой Ляпунова, для граничных значений функции $f^+(z)$ и ее производных справедливы следующие формулы (см., например, [7, с. 40]):

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d^kf^+(t)}{dt^k}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}\frac{d\tau}{\tau-t},\ t\in L,\ k=0,1,2,\\ \frac{1}{2}\overline{\frac{d^kf^+(t)}{dt^k}}=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}\frac{\overline{\left[\tau'(\sigma)\right]^2}d\tau}{\overline{\tau}-\overline{t}},\ t\in L,\ k=0,1,2.\end{gathered}\tag{27}$$

С помощью формул (27) несложно установить справедливость следующих равенств:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)}\frac{d^kf^+(t)}{dt^k}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{M_k(\tau)}}{G_2(\tau)}\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}\frac{d\tau}{\tau-t}=\\ =\frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)}\frac{d^kf^+(t)}{dt^k}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\overline{M_k(\tau)}}{G_2(\tau)}-\frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)}\right]\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}\frac{d\tau}{\tau-t}=\\ =\frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)}\frac{d^kf^+(t)}{dt^k}+\int_L\Omega_k(t,\tau)\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}d\tau,\end{gathered}\tag{28}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\overline{\frac{d^kf^+(t)}{dt^k}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)}\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\\ =-\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}\frac{\overline{\left[\tau'(\sigma)\right]^2}d\tau}{\overline{\tau}-\overline{t}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)}-\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\right]\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}\frac{d\tau}{\tau-t}+\\ +\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\overline{\left[\tau'(\sigma)\right]^2}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\right]\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}d\tau+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)}-\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\right]\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\int_L\Psi_k(t,\tau)\overline{\frac{d^kf^+(\tau)}{d\tau^k}}d\tau,\end{gathered}\tag{29}$$

где приняты обозначения

$$\Omega_k(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\overline{M_k(\tau)}}{G_2(\tau)}-\frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)}\right]\frac{1}{\tau-t},$$

$$\Psi_k(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\overline{\left[\tau'(\sigma)\right]^2}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\right]+\left[\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)}-\frac{M_k(t)}{G_2(t)}\right]\frac{1}{\tau-t}\right\},\ k=0,1,2,$$

причем здесь $\Omega_k(t,\tau),\ \Psi_k(t,\tau)$ ($k=0,1,2$) – вполне определенные фредгольмовы ядра, так как функции $G_2(t),\ M_k(t)$ ($k=0,1,2$) удовлетворяют на L условию Гёльдера, а L является кривой Ляпунова.

С учетом равенств (28) и (29) формулу (26) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} = -\sum_{k=0}^{2}\frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)}\frac{d^k f^+(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{2}\int_L \Omega_{1k}(t, \tau)\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}d\tau -$$

$$-\sum_{k=0}^{2}\int_L \Psi_{1k}(t, \tau)\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}}d\tau + \frac{q_1(t)}{G_2(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{q_1(\tau)}{G_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ 2\int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} q_1(\tau)d\tau - \frac{1}{2G_2(t)}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k\omega_k(s)\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k\omega_k(\sigma)\right]\frac{d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2}\left[\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k\omega_k(\sigma)\right]d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2G_2(t)}\left[\sum_{j=0}^{r}\beta_j\mu_j(s)\right] + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{G_2(\tau)}\left[\sum_{j=0}^{r}\beta_j\mu_j(\sigma)\right]\frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1)c_k t^{k-2}, \tag{30}$$

где

$$\Omega_{1k}(t, \tau) = -\Omega_k(t, \tau) + R_{2k}(t, \tau),\ \Psi_{1k}(t, \tau) = -\Psi_k(t, \tau) + N_{2k}(t, \tau),\ k = 0, 1, 2.$$

Далее, подставив в левую часть равенства (14) вместо $\varphi^+(t)$, $\frac{d\varphi^+(t)}{dt}$ и $\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}$ их значения, которые задаются с помощью формул (24), (25) и (30) соответственно, получим

$$\operatorname{Im}\left\{-\overline{M_2(t)}\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} - \overline{M_1(t)}\frac{df^+(t)}{dt} - \overline{M_0(t)}\, f^+(t) + \right.$$

$$\left. + M_2(t)\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} + M_1(t)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t)\overline{f^+(t)}\right\} +$$

$$+ \operatorname{Im}\left\{\sum_{k=0}^{2}\int_L \Omega_{2k}(t, \tau)\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}d\tau + \sum_{k=0}^{2}\int_L \Psi_{2k}(t, \tau)\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}}d\tau\right\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{q(t) + \sum_{j=0}^{l}\alpha_j\rho_j(t)\right\},\ t \in L, \tag{31}$$

где $\Omega_{2k}(t, \tau)$, $\Psi_{2k}(t, \tau)$ ($k = 0, 1, 2$) – вполне определенные фредгольмовы ядра; $\rho_j(t)$ ($j = 0, 1, \ldots, l$) – вполне определенные функции, принадлежащие классу $H(L)$, α_j ($j = 0, 1, \ldots, l$) – произвольные действительные постоянные,

$$l = \begin{cases} r + 2, \text{ если } \chi \geq 2, \\ r + 2(2 - \chi), \text{ если } \chi < 2. \end{cases}$$

Так как для комплексной функции $\Phi(t) = \operatorname{Re}\Phi(t) + i\operatorname{Im}\Phi(t)$ справедливо соотношение $\operatorname{Im}\left\{-\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}\right\} = \operatorname{Im}\left\{-2i\operatorname{Im}\Phi(t)\right\} = -2\operatorname{Im}\Phi(t) = 2\operatorname{Re}\left\{i\Phi(t)\right\}$, то равенство (31) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{i\overline{M_2(t)}\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + i\overline{M_1(t)}\frac{df^+(t)}{dt} + i\overline{M_0(t)}\, f^+(t)\right\} +$$

$$+ \operatorname{Re}\left\{\frac{-i}{2}\left(\sum_{k=0}^{2}\int_L \Omega_{2k}(t, \tau)\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}d\tau + \sum_{k=0}^{2}\int_L \Psi_{2k}(t, \tau)\overline{\frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k}}d\tau\right)\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{-i}{2}\left(q(t) - q_1(t) + \sum_{j=0}^{l}\alpha_j\rho_j(t) + \sum_{k=0}^{3}\int_L P_k(t, \tau)d\tau\right)\right\},\ t \in L, \tag{32}$$

Однако представление (32) есть не что иное, как краевое условие исследованной (см., например, [7, с. 357]) интегро-дифференциальной задачи Гильберта относительно аналитической функции $f^{+}(z)$.

Решая задачу Гильберта (32) (в случае ее разрешимости), определяем аналитическую функцию $f^{+}(z)$. Подставляя в правую часть краевого условия (12) вместо $f^{+}(t)$, $\dfrac{df^{+}(t)}{dt}$ и $\dfrac{d^2 f^{+}(t)}{dt^2}$ граничные значения найденной функции $f^{+}(z)$ и ее производных и решая дифференциальную задачу Гильберта (12), определяем аналитическую функцию $\varphi^{+}(z)$. Наконец, подставляя значения найденных аналитических функций $\varphi^{+}(z)$ и $f^{+}(z)$ в правую часть формулы (8), получаем решение искомой задачи $\boldsymbol{GP}_1$.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего основного утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $a(t)+ib(t)\neq 0$, $a(t)-ib(t)\neq 0$, $t\in L$. *Тогда решение граничной задачи* $\boldsymbol{GP}_1$ *сводится к последовательному решению интегро-дифференциальной задачи Гильберта вида (32) относительно аналитической функции* $f^{+}(z)$ *и дифференциальной задачи Гильберта вида (12) относительно аналитической функции* $\varphi^{+}(z)$. *Для того чтобы граничная задача* $\boldsymbol{GP}_1$ *была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы вспомогательные задачи Гильберта (32) и (12).*

В заключение важно отметить, что при выполнении условий $a(t)+ib(t)\neq 0$, $a(t)-ib(t)\neq 0$, $t\in L$, дифференциальная задача Гильберта (12) и интегро-дифференциальная задача Гильберта (32) в классах аналитических функций являются нетеровыми (см., например, [7, с. 362]), т. е. как число p линейно независимых решений соответствующих задачам (12) и (32) однородных задач, так и число q условий разрешимости вспомогательных неоднородных задач являются конечными. Таким образом, в силу представления (8) и теоремы 1 задача $\boldsymbol{GP}_1$ при выполнении условий (4) также будет нетеровой.

Библиографические ссылки

1. Нагорная ТР, Расулов КМ. Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях. *Научно-технический вестник Поволжья.* 2022;11:24–27. EDN: KIPYRE.

2. Bauer KW. *Über eine der Differentialgleichung* $\left(1\pm z\bar{z}\right)^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W=0$ *zugeordnete Funktionentheorie.* [S. l.]: [s. n.]; 1965. 98 S. (Bonner mathematische Schriften; Nummer 23).

3. Bauer KW, Ruscheweyh S. *Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications.* Berlin: Springer-Verlag; 1980. V, 258 p. (Dold A, Eckmann B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 791). DOI: 10.1007/BFb0103468.

4. Нагорная ТР, Расулов КМ. О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях. *Научно-технический вестник Поволжья.* 2022;7:32–35. EDN: FCWCDP.

5. Расулов КМ, Нагорная ТР. О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2021;21(3):326–335. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335.

6. Бицадзе АВ. *Уравнения математической физики.* Москва: Наука; 1976. 295 с.

7. Гахов ФД. *Краевые задачи.* 3-е издание. Москва: Наука; 1977. 640 с.

8. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 511 с.

References

1. Nagornaya TR, Rasulov KM. A solution algorithm of the Poincaré boundary value problem for the second-order generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin.* 2022;11:24–27. Russian. EDN: KIPYRE.

2. Bauer KW. *Über eine der Differentialgleichung* $\left(1\pm z\bar{z}\right)^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W=0$ *zugeordnete Funktionentheorie.* [S. l.]: [s. n.]; 1965. 98 S. (Bonner mathematische Schriften; Nummer 23).

3. Bauer KW, Ruscheweyh S. *Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications.* Berlin: Springer-Verlag; 1980. V, 258 p. (Dold A, Eckmann B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 791). DOI: 10.1007/BFb0103468.

4. Nagornaya TR, Rasulov KM. On the Poincaré boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin.* 2022;7:32–35. Russian. EDN: FCWCDP.

5. Rasulov KM, Nagornaya TR. The explicit solution of the Neumann boundary value problem for Bauer differential equation in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2021;21(3):326–335. Russian. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335.

6. Bitsadze AV. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1976. 295 p. Russian.

7. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.

8. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya: granichnye zadachi teorii funktsii i nekotorye ikh prilozheniya k matematicheskoi fizike* [Singular integral equations: boundary value problems of function theory and some of their applications to mathematical physics]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1968. 511 p. Russian.

Получена 22.10.2023 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 22.10.2023 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.