

---

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

## THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

---

---

УДК 532, 519.6

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИЗ ОДНОРОДНОГО ГАЗА В ГАЗОВЗВЕСЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Д. А. ТУКМАКОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН,  
ул. Лобачевского, 2, 420111, г. Казань, Россия

**Аннотация.** Представлена численная модель распространения ударной волны в газозвеси, реализующая континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред (для каждого из компонентов смеси решается полная гидродинамическая система уравнений движения). Несущая среда описана как вязкий, сжимаемый, теплопроводный газ. В математической модели учтены обмен импульсом и теплообмен между компонентами смеси. Уравнения модели решены явным конечно-разностным методом Мак-Кормака. Для получения монотонного решения применена схема нелинейной коррекции. Рассмотрен процесс взаимодействия ударной волны, проходящей из однородного газа в газозвесь. Принято, что дисперсная фаза в камере низкого давления имеет периодическое пространственное распределение концентрации. Определена связь между периодичностью распределения концентрации частиц и величиной перепада давления газа при прохождении ударной волны через газозвесь. Проанализировано влияние интенсивности ударной волны на величину перепада давления газа при прохождении участков газозвеси с циклически распределенной концентрацией дисперсной фазы.

**Ключевые слова:** монодисперсная газозвесь; взаимопроникающие континуумы; явная схема Мак-Кормака; ударные волны.

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках государственного задания Казанского научного центра РАН «Развитие механики многофазных и аэрогидроупругих систем, оболочечных конструкций с приложениями в машиностроении и нефтедобыче».

---

#### Образец цитирования:

Тукмаков ДА. Численное исследование распространения ударной волны из однородного газа в газозвесь с периодическим распределением дисперсной фазы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:16–28.  
EDN: AJKLQQ

#### For citation:

Tukmakov DA. A numerical study of the propagation of a shock wave from a homogeneous gas into a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:16–28. Russian.  
EDN: AJKLQQ

---

#### Автор:

**Дмитрий Алексеевич Тукмаков** – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды.

#### Author:

**Dmitry A. Tukmakov**, PhD (physics and mathematics); researcher at the laboratory of continuum mechanics.  
[tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)

## A NUMERICAL STUDY OF THE PROPAGATION OF A SHOCK WAVE FROM A HOMOGENEOUS GAS INTO A GAS SUSPENSION WITH A PERIODIC DISTRIBUTION OF THE DISPERSED PHASE

D. A. TUKMAKOV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Centre, Russian Academy of Sciences,  
2 Lobachevskogo Street, Kazan 420111, Russia*

**Abstract.** In this paper, we present a numerical model of shock wave propagation in a gas suspension. The mathematical model realised a continuum technique for modelling the dynamics of inhomogeneous media, namely, for each component of the suspension, a complete hydrodynamic system of motion equations was solved. The carrier medium was described as a viscous, compressible heat-conducting gas. The mathematical model took into account the exchanges of momentum heat between the components of the mixture. The equations of the mathematical model were solved by the explicit McCormack finite-difference method. To obtain a monotonic solution, a non-linear correction scheme was used. The process of interaction of a shock wave passed from a homogeneous gas into a gas suspension was considered. The dispersed phase in the low-pressure chamber had a periodic spatial distribution of the concentration. The influence of the periodicity of the particle concentration distribution on the pressure drop during the passage of a shock wave through a gas suspension was determined. The influence of the intensity of the shock wave on the value of the gas pressure drop when passing through sections of a gas suspension with a cyclically distributed concentration of the dispersed phase was considered.

**Keywords:** monodisperse gas suspension; interpenetrating continua; explicit McCormack scheme; shock waves.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Kazan Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences «Development of the mechanics of multiphase and aerohydroelastic system, shell structures with applications in mechanical engineering and oil production».

### Введение

Многие задачи механики жидкости и газа имеют нелинейный характер и решаются преимущественно не аналитическими [1], а численными методами [1–28]. В отличие от классической гидродинамики [1] в динамике неоднородных сред [2–6] характер течения зависит от межфазного взаимодействия. Общая теория динамики многофазных сред представлена в монографии [2]. В работе [3] исследованы проблемы движения газожидкостных сред с большими скоростями, изложены теоретические основы, расчетные методы и прикладные задачи. В книге [4] рассмотрены вопросы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах, приведены уравнения и найдена структура ударной волны в смеси газов и в двухфазной смеси. Работа [5] посвящена численным расчетам динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред в одномерном приближении на основе модели идеального газа. В монографии [6] разработаны численные алгоритмы и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газозвзвях металлических частиц.

В статье [7] предложен численный алгоритм решения задачи Римана для моделей сжимаемого двухфазного потока, содержащих неконсервативные слагаемые, отвечающие за взаимодействие фаз. В работе [8] представлена нестационарная модель фокусировки инерционных частиц за счет силы Саффмэна с использованием ударных волн в микроканале постоянного сечения. Рассчитано течение разреженной дисперсной смеси за плоской ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в двумерной области. В статье [9] предложен алгоритм расчета параметров стационарной одномерной детонационной волны в смесях газа с химически инертными частицами. Рассчитаны минимальная масса частиц и характерный размер облака, необходимые для подавления детонации. Проанализировано влияние термодинамических параметров частиц на процесс подавления детонации. Определено, что самыми эффективными являются частицы с более высокой теплоемкостью и (при наличии плавления) большей теплотой фазового перехода. В работе [10] методами механики многофазных сред исследовано взаимодействие гомогенных и гетерогенных детонационных волн в смесях, содержащих частицы алюминия и капли воды. Выполнено моделирование подавления детонации с помощью облаков инертных частиц. В публикации [11] приведены результаты численного исследования прерывания распространения детонационных волн в газозвзвях унитарного топлива слоем неоднородных инертных частиц. Установлено, что при фиксированной общей массе взвеси детонационные волны лучше ослабляются слоем с линейно убывающей концентрацией инертных частиц, чем слоем с линейно возрастающей и однородной концентрацией таких частиц. В работе [12] исследованы и реализованы разностная схема типа TVD

и метод крупных частиц для решения математических моделей механики гетерогенных сред с различными скоростями движения и давлениями компонентов. В качестве приложения рассмотрена задача об отражении ударной волны от стенки в неоднородной по концентрации смеси. В исследовании [13] на основе модели взаимопроникающих континуумов выполнено численное моделирование нестационарного течения газозвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем инертных частиц. Приведены ударно-волновая структура течения и пространственно-временные зависимости концентрации частиц. В статье [14] изучены динамика движения скачка уплотнения в газе и его взаимодействие с ограниченным слоем газозвеси для различных размеров дисперсных частиц. Задача характеризуется двумя распадами разрывов – отраженной и преломленной ударными волнами.

В работе [15] представлена математическая модель распространения воздушных ударных волн в сети выработок угольной шахты после мгновенного взрыва метановоздушной смеси. Предложен подход к реализации метода решения задач о распространении воздушных ударных волн в разветвленной сети горных выработок с учетом произвольных углов их сопряжения.

В статье [16] численно моделируется взаимодействие ударной волны с плотной засыпкой частиц. Математическая модель реализует континуальную методику моделирования динамики многофазных сред. Изучается влияние параметров дисперсной фазы и свойств вычислительного алгоритма на характеристики моделируемого процесса. Работа [17] посвящена численному исследованию распространения ударной волны в среде с неравномерным распределением плотности. Математическая модель основана на уравнениях Эйлера. Рассмотрены задачи о распространении ударной волны в среде при прохождении участков конечной длины с линейно увеличивающейся и уменьшающейся концентрацией дисперсной фазы. Также исследован случай непрерывного изменения плотности среды перед ударной волной по синусоидальному закону. Возникающее при этом течение описано и объяснено с использованием результатов, полученных для случая линейного градиента плотности. В публикации [18] представлена математическая модель, описывающая гетерогенную детонацию газозвесей с неоднородными концентрациями частиц. Изучены проблемы возникновения и развития ячеистой детонации газозвесей, содержащих микронные частицы алюминия, в плоских каналах. Проанализированы закономерности формы переднего фронта волны и скорости распространения детонации в каналах с продольными или поперечными градиентами концентрации частиц. В статье [19] разработана одномерная численная модель динамики газокapельной среды на основе гибридного подхода Эйлера – Лагранжа для исследования взаимодействия распространяющихся ударных волн и дисперсной фазы – испаряющихся капель воды. Принята двусторонняя связь для межфазного обмена массой, импульсом и энергией. Установлено, что скачок давления газа может затухать до звуковой волны и даже дозвуковой волны, когда объемная доля капельной фазы велика или число Маха падающей ударной волны мало.

Анализ работ, посвященных динамике неоднородных сред, показывает, что задача описания динамики газозвесей имеет разнообразные практические применения – от проблем, связанных с разработкой горных выработок, до совершенствования аэрокосмических технологий. В данной статье рассматриваются динамические процессы в газозвесах с учетом межфазного взаимодействия: моделируется распространение ударной волны в неоднородной среде с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы. Кроме того, исследуется влияние распределения концентрации дисперсной фазы на пространственное распределение газодинамических параметров несущей среды.

### Методика исследования

В работе применяется континуальная модель динамики газозвеси для двухтемпературной двухскоростной монодисперсной смеси газа и частиц [5; 20–25]. Система уравнений динамики газозвеси включает в себя уравнение неразрывности для несущей среды

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнения сохранения компонент импульса газа, записанные с учетом межфазного обмена импульсом в виде

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy})}{\partial y} = -F_x + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} = -F_y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

уравнение сохранения полной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial\left((e_1 + p - \tau_{xx})u_1 - \tau_{xy}v_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left((e_1 + p - \tau_{yy})v_1 - \tau_{xy}u_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)}{\partial y} = \\ = -Q - |F_x|(u_1 - u_2) - |F_y|(v_1 - v_2) + \alpha \frac{\partial(pu_1)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial(pv_1)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $p$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $v_1$  – давление, плотность, декартовы составляющие скорости движения несущей среды в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – составляющие тензора вязких напряжений;  $F_x$ ,  $F_y$  – силы межфазного взаимодействия;  $\alpha$  – объемное содержание дисперсной фазы;  $T_1$ ,  $e_1$  – температура и полная энергия газа;  $\lambda$  – теплопроводность газа;  $Q$  – теплообмен между несущей средой и дисперсной фазой.

Температура и давление несущей среды определяются выражениями

$$\begin{aligned} T_1 &= (\gamma - 1) \frac{\left(\frac{e_1}{\rho_1} - 0,5(u_1^2 + v_1^2)\right)}{R}, \\ p &= (\gamma - 1) \left(e_1 - 0,5\rho_1(u_1^2 + v_1^2)\right), \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – постоянная адиабаты;  $R$  – газовая постоянная несущей среды.

Составляющие тензора вязких напряжений задаются формулами

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D\right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D\right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right).$$

Здесь  $D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$ ;  $\mu$  – динамическая вязкость несущей среды.

Средняя плотность дисперсной фазы определяется как  $\rho_2(t, x, y) = \rho_{20}\alpha(t, x, y)$ , где  $\rho_{20} = \text{const}$  – физическая плотность материала дисперсного компонента смеси. Система уравнений динамики дисперсной фазы включает в себя уравнение неразрывности, уравнения сохранения компонент импульса, записанные с учетом межфазного обмена импульсом, и уравнение сохранения тепловой энергии:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 v_2)}{\partial y} = F_x - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 v_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2^2)}{\partial y} = F_y - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t} + \frac{\partial(e_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(e_2 v_2)}{\partial y} = Q. \quad (8)$$

Здесь  $\rho_2$ ,  $e_2$ ,  $u_2$ ,  $v_2$  – средняя плотность, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости движения дисперсной фазы в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Межфазный обмен импульсом включает в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс:

$$F_x = F_{Cx} + F_{Ax} + F_{mx}, \quad F_{Cx} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2),$$

$$F_{Ax} = \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), \quad F_{mx} = 0,5 \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right);$$

$$F_y = F_{C_y} + F_{A_y} + F_{m_y}, F_{C_y} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2),$$

$$F_{A_y} = \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), F_{m_y} = 0,5 \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right).$$

Здесь символы  $C, A, m$  в нижнем индексе обозначают силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс соответственно [2];  $d$  – диаметр частицы;  $C_d$  – коэффициент сопротивления сферической частицы.

Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как  $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$ , где  $C_{p2}$  – удельная теплоемкость единицы массы вещества дисперсной фазы;  $T_2$  – температура дисперсной фазы.

Теплообмен между несущей средой и дисперсной фазой описывается выражением  $Q = \frac{6\alpha\lambda Nu_1(T_1 - T_2)}{d^2}$ .

Здесь  $Nu_1$  – относительное число Нуссельта [5], определяемое с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительного числа Маха ( $M_1$ ), относительного числа Рейнольдса ( $Re_1$ ) и числа Прандтля ( $Pr$ ) [2; 3; 5]:

$$M_1 = \frac{|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2|}{c}, \mathbf{V}_i = [u_i, v_i], Pr = C_p \mu \lambda^{-1}, Nu_1 = 2 \exp(-M_1) + 0,459 Re_1^{0,55} Pr^{0,33},$$

где  $c$  – скорость звука;  $C_p$  – теплоемкость газа при постоянном давлении.

Система уравнений динамики монодисперсной газозвеси (1)–(8) решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [26] с расщеплением по пространственным направлениям [27] и схемой нелинейной коррекции [20; 28], реализованным в программном коде.

Монотонность решения достигалась за счет применения алгоритма нелинейной коррекции [20; 28] к вектору искомым функций  $\mathbf{q} = (\rho_1, u_1, v_1, e_1, \rho_2, u_2, v_2, e_2)^T$  системы уравнений после перехода на новый временной слой при  $t = t^{n+1}$ . Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль координаты  $x$ , а затем вдоль координаты  $y$  в расчетной области. Нижний индекс обозначает номер узла сетки в направлении оси  $x$  или  $y$  соответственно:  $U_j = \tilde{U}_j + \kappa \left( \delta\Phi_{j+\frac{1}{2}} - \delta\Phi_{j-\frac{1}{2}} \right)$ , где  $\delta\Phi_{j+\frac{1}{2}} = \delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}$ , если

$\delta\tilde{U}_{j-\frac{1}{2}} \delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} < 0$  или  $\delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} \delta\tilde{U}_{j+\frac{3}{2}} < 0$ , и  $\delta\Phi_{j+\frac{1}{2}} = 0$  в любом другом случае. Здесь использованы обозначения  $\delta\tilde{U}_{j-\frac{1}{2}} = \tilde{U}_j - \tilde{U}_{j-1}$ ,  $\delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{U}_{j+1} - \tilde{U}_j$ ,  $\delta\tilde{U}_{j+\frac{3}{2}} = \tilde{U}_{j+2} - \tilde{U}_{j+1}$ , где  $\tilde{U}_j$  – значение функции после

перехода на  $(n+1)$ -й временной слой по схеме Мак-Кормака;  $\kappa = 0,125$  – коэффициент. В двумерной конечно-разностной аппроксимации на границах расчетной области для газа и дисперсной фазы задавались следующие граничные условия:

$$u_1(t, 1, j) = 0, u_2(t, 1, j) = 0, v_1(t, 1, j) = 0, v_2(t, 1, j) = 0,$$

$$u_1(t, N_x, j) = 0, u_2(t, N_x, j) = 0, v_1(t, N_x, j) = 0, v_2(t, N_x, j) = 0,$$

$$u_1(t, i, 1) = u_1(t, i, 2), u_2(t, i, 1) = u_2(t, i, 2),$$

$$v_1(t, i, 1) = v_1(t, i, 2), v_2(t, i, 1) = v_2(t, i, 2),$$

$$u_1(t, i, N_y) = u_1(t, i, N_y - 1), u_2(t, i, N_y) = u_2(t, i, N_y - 1),$$

$$v_1(t, i, N_y) = v_1(t, i, N_y - 1), v_2(t, i, N_y) = v_2(t, i, N_y - 1),$$

$$\rho_1(t, 1, j) = \rho_1(t, 2, j), \rho_2(t, 1, j) = \rho_2(t, 2, j),$$

$$\rho_1(t, N_x, j) = \rho_1(t, N_x - 1, j), \rho_2(t, N_x, j) = \rho_2(t, N_x - 1, j),$$

$$\begin{aligned}
 \rho_1(t, i, 1) &= \rho_1(t, i, 2), \quad \rho_2(t, i, 1) = \rho_2(t, i, 2), \\
 \rho_1(t, i, N_y) &= \rho_1(t, i, N_y - 1), \quad \rho_2(t, i, N_y) = \rho_2(t, i, N_y - 1), \\
 e_1(t, 1, j) &= e_1(t, 2, j), \quad e_2(t, 1, j) = e_2(t, 2, j), \\
 e_1(t, N_x, j) &= e_1(t, N_x - 1, j), \quad e_2(t, N_x, j) = e_2(t, N_x - 1, j), \\
 e_1(t, i, 1) &= e_1(t, i, 2), \quad e_2(t, i, 1) = e_2(t, i, 2), \\
 e_1(t, i, N_y) &= e_1(t, i, N_y - 1), \quad e_2(t, i, N_y) = e_2(t, i, N_y - 1), \\
 p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), \quad p(t, N_x, j) = p(t, N_x - 1, j), \\
 p(t, i, 1) &= p(t, i, 2), \quad p(t, i, N_y) = p(t, i, N_y - 1).
 \end{aligned}$$

Здесь  $N_x$  и  $N_y$  – количество узлов сетки в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Реализация программного кода на языке GNU Fortran имеет следующую структуру.

**Шаг 1.** Строится конечно-разностная сетка.

**Шаг 2.** Задаются физические параметры фаз.

**Шаг 3.** Задаются начальные и граничные условия для газа и дисперсной фазы.

**Шаг 4.** Определяется значение величин межфазного обмена импульсом и теплообмена.

**Шаг 5.** Реализуется основной вычислительный цикл, переводящий зависимые газодинамические переменные (газ, дисперсная фаза) на следующий временной слой.

**Шаг 6.** Проводится нелинейная коррекция сеточных функций, при необходимости включается механизм фильтрации.

**Шаг 7.** Задаются граничные условия на новом временном слое.

С заданной периодичностью осуществляется файловый вывод пространственных полей и временных реализаций выбранных функций в определенных узлах. Программный комплекс состоит из нескольких подпрограмм: подпрограммы задания граничных условий, подпрограммы формирования конечно-разностного разбиения физической области, подпрограммы расчета взаимодействия компонентов смеси, основной программы численного решения уравнений динамики газозвеси.

В статье [21] с помощью описанной методики выполнено численное моделирование процесса распада разрыва в газозвеси с равномерным распределением концентрации дисперсной фазы. В работе [22] численно исследовано влияние дисперсности и плотности частиц монодисперсной газозвеси при распространении ударной волны из однородного газа в газозвесь. В публикации [23] проведено сравнение численных расчетов, выполненных описанным вычислительным комплексом, с известными из литературы численными расчетами ударно-волновой динамики газозвеси. В статье [24] результаты численных расчетов данной модели сопоставлены с результатами физического эксперимента по распространению ударной волны из газозвеси в чистый газ, а в публикации [25] – с результатами физического эксперимента по акустическим колебаниям газозвеси.

## Результаты и их обсуждение

В качестве газозвеси рассматривался воздух со взвешенными в нем частицами кварцевого песка. Заданные при моделировании физические параметры фаз приведены в табл. 1. Расчетная область представляла собой канал длиной  $L = 1$  м, шириной  $h = 0,1$  м, который был разделен диафрагмой на две части – камеры высокого ( $p_2$ ) и низкого ( $p_1$ ) давления [1; 5]. Сетка включала в себя  $N_x = 400$  узлов в продольном направлении и  $N_y = 40$  узлов в поперечном направлении (рис. 1). В камере высокого давления при  $x < \frac{L}{2}$  находится однородный газ с давлением  $p_2$ , а в камере низкого давления ( $p_1$ ) при  $x > \frac{L}{2}$  задано распределение средней

плотности дисперсной фазы по периодическому закону:  $\rho_2(x, y) = \rho_{20} \alpha_0 \left( 0,5 + 0,5 \sin \left( 4\pi k \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \right)$ ,

где  $\alpha_0$  – начальное объемное содержание частиц;  $k$  – волновое число (рис. 2).

Таблица 1

Заданные при моделировании  
 физические параметры фаз газозвеси

Table 1

Physical parameters  
 of gas suspension phases specified during modelling

Параметры	Значение
<i>Дисперсная фаза (кварцевый песок)</i>	
Физическая плотность ( $\rho_{20}$ ), кг/м <sup>3</sup>	2500
Диаметр частиц ( $d$ ), мкм	2
Начальное объемное содержание частиц ( $\alpha_0$ )	0,001
<i>Несущая среда (воздух)</i>	
Молярная масса ( $M$ ), кг/моль	$29 \cdot 10^{-3}$
Теплопроводность ( $\lambda$ ), Вт/(м · К)	0,025 53
Динамическая вязкость ( $\mu$ ), Па · с	$1,72 \cdot 10^{-5}$
Постоянная адиабаты ( $\gamma$ )	1,4
Газовая постоянная ( $R$ ), Дж/(моль · К)	8,31

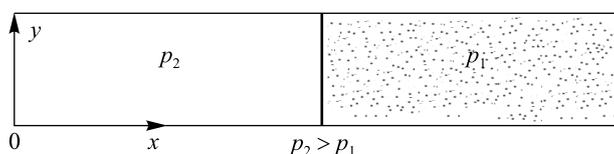


Рис. 1. Общая схема моделируемого процесса  
 Fig. 1. General diagram of the simulated process

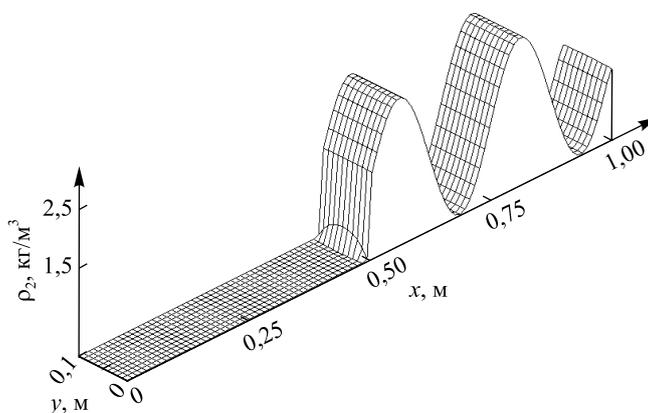


Рис. 2. Начальное пространственное распределение  
 средней плотности дисперсной фазы  
 Fig. 2. Initial spatial distribution  
 of the average density of the dispersed phase

Сопоставляя результаты расчетов распространения ударных волн в различных средах, можно видеть, что при распространении ударной волны из однородного газа в газозвесь с равномерным распределением концентрации дисперсной фазы ( $\rho_2(x, y) = \rho_{20}\alpha_0$ ) наблюдаются меньшая скорость распространения ударной волны и большее давление газа на переднем крае ударной волны (рис. 3). В газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной ( $k = 2$ ) фазы скорость распространения ударной волны ниже, чем в однородном газе, но выше, чем в газозвеси с равномерным распределением концентрации частиц. Давление газа на переднем крае ударной волны в газозвеси с периодическим распределением концентрации частиц имеет большее значение, чем в однородном газе, и меньшее значение, чем в газозвеси с равномерным распределением концентрации частиц.

По мере движения ударной волны по газозвеси с периодическим распределением концентрации частиц наблюдается повышение (понижение) давления газа на участках с увеличением (уменьшением) концентрации частиц (рис. 4).

На участках канала с наибольшей средней плотностью твердых частиц отмечаются увеличение давления газа и уменьшение скорости движения несущей среды, в то время как на участках с локальными минимумами концентрации дисперсной фазы скорость движения газа возрастает, а давление несущей среды несколько снижается. Данное явление связано с тем, что при прохождении спутным потоком газа локальных максимумов плотности происходит переход кинетической энергии газа в потенциальную (тепловую) энергию, за счет чего повышается давление газа (рис. 5).

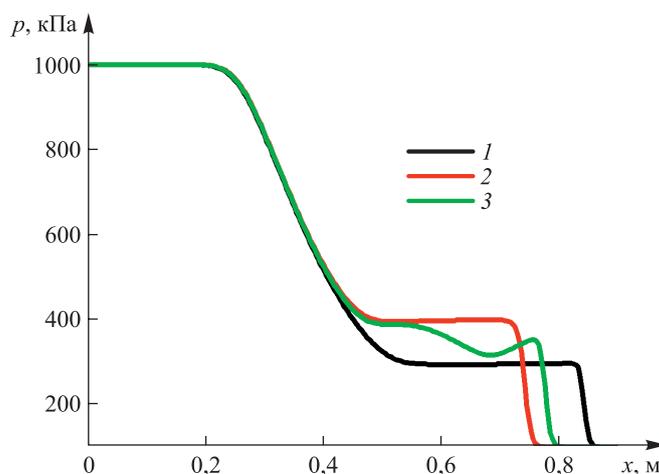


Рис. 3. Пространственное распределение давления газа при распространении ударной волны в однородном газе (1), газозвеси с равномерным распределением концентрации дисперсной фазы (2) и газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы (3) в момент времени  $t = 0,7$  мс

Fig. 3. Spatial distribution of gas pressure during the propagation of a shock wave in a homogeneous gas (1), a gas suspension with a uniform distribution of the dispersed phase concentration (2) and a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase concentration (3) at time  $t = 0.7$  ms

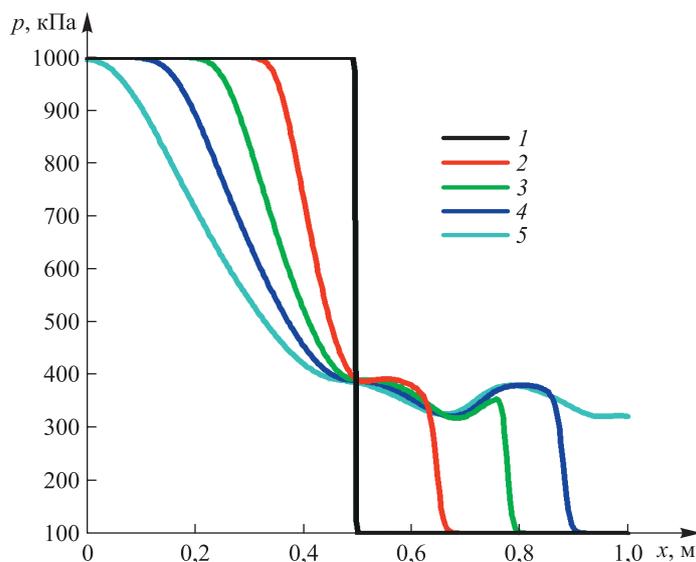


Рис. 4. Пространственное распределение давления газа в газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы в момент времени  $t = 0$  мс (1),  $t = 0,1$  мс (2),  $t = 0,7$  мс (3),  $t = 1,0$  мс (4),  $t = 1,3$  мс (5)

Fig. 4. Spatial distribution of gas pressure in a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase concentration at time  $t = 0$  ms (1),  $t = 0.1$  ms (2),  $t = 0.7$  ms (3),  $t = 1.0$  ms (4),  $t = 1.3$  ms (5)

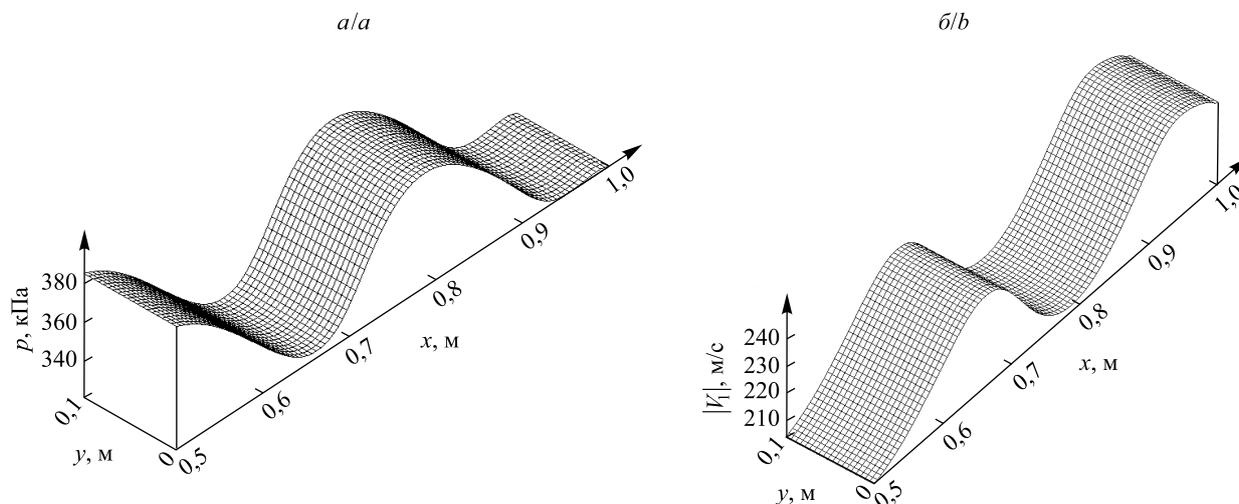


Рис. 5. Пространственное распределение давления (а) и модуля скорости движения газа (б) в момент времени  $t = 1,3$  мс  
 Fig. 5. Spatial distribution of gas pressure (a) and gas velocity modulus (b) at time  $t = 1.3$  ms

Значение волнового числа периодической концентрации частиц дисперсной фазы оказывает влияние на интенсивность изменения давления и скорости движения газа при прохождении ударной волны через участки с циклическим изменением концентрации частиц. Увеличение частоты колебаний концентрации частиц приводит к уменьшению значений перепада давления и скорости движения газа при прохождении через периодически распределенную дисперсную фазу. Данную закономерность можно объяснить тем, что при уменьшении периода изменения концентрации частиц скорость движения газа не успевает существенно измениться при прохождении через участки изменения концентрации (рис. 6).

Рассмотрим влияние интенсивности ударной волны на максимальное значение перепада давления газа при прохождении участков изменения концентрации дисперсных частиц. На рис. 7 представлены результаты численных расчетов давления и модуля скорости движения газа для ударных волн различной интенсивности.

Для интенсивных ударных волн ( $p_2/p_1 = 2$ ) (см. рис. 7, а и б) и для ударных волн малой интенсивности ( $p_2/p_1 = 1,1$ ) (см. рис. 7, в и г) наблюдается формирование периодической структуры давления несущей среды. Максимальное значение перепада давления газа в областях с повышенной и пониженной концентрацией дисперсных частиц составляет  $p_a = 6989$  Па для интенсивной ударной волны ( $p_2/p_1 = 2$ ) и  $p_a = 465$  Па для ударной волны малой интенсивности ( $p_2/p_1 = 1,1$ ) (табл. 2).

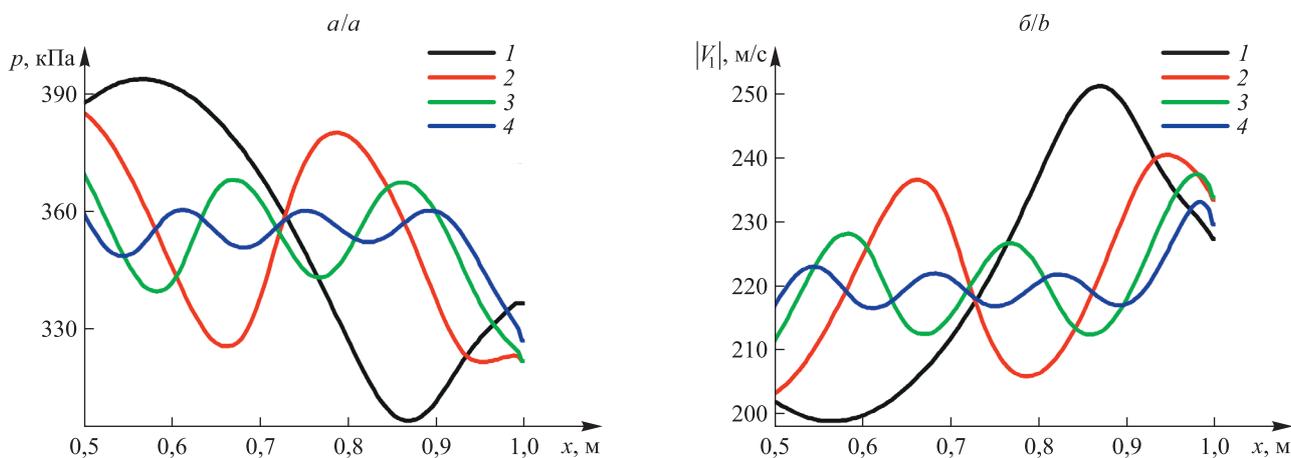


Рис. 6. Пространственное распределение давления (а) и модуля скорости движения газа (б) в момент времени  $t = 1,3$  мс при значении волнового числа  $k = 1$  (1),  $k = 2$  (2),  $k = 3$  (3),  $k = 4$  (4)  
 Fig. 6. Spatial distribution of gas pressure (a) and gas velocity modulus (b) at time  $t = 1.3$  ms for the wave number value  $k = 1$  (1),  $k = 2$  (2),  $k = 3$  (3),  $k = 4$  (4)

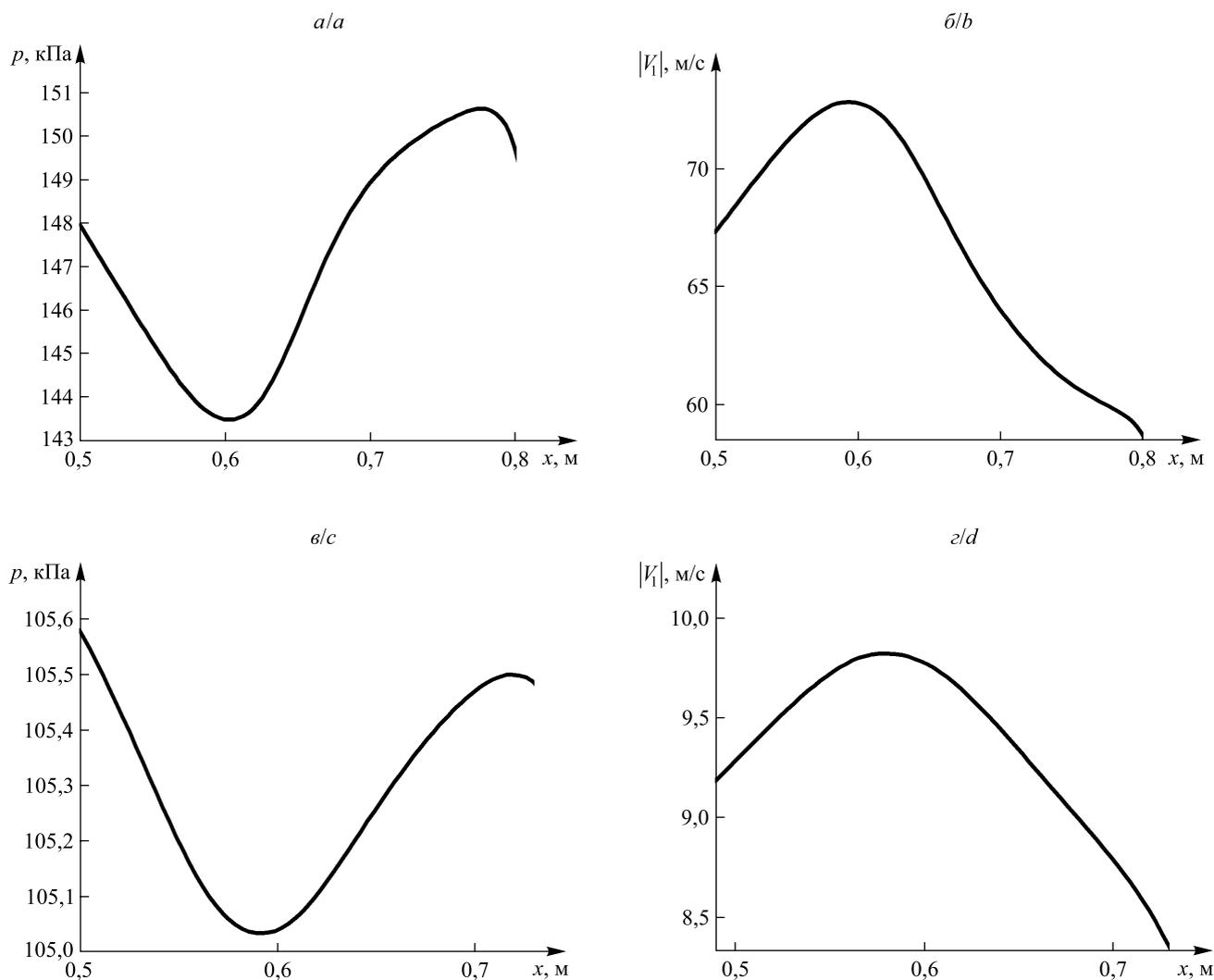


Рис. 7. Пространственное распределение давления (а, в) и модуля скорости движения газа (б, г) для интенсивности разрыва давлений  $p_2/p_1 = 2$  (а, б) и  $p_2/p_1 = 1,1$  (в, г) в момент времени  $t = 1,3$  мс

Fig. 7. Spatial distribution of gas pressure (a, c) and gas velocity modulus (b, d) for the pressure burst intensity  $p_2/p_1 = 2$  (a, b) and  $p_2/p_1 = 1.1$  (c, d) at time  $t = 1.3$  ms

Таблица 2

**Максимальные значения перепада давления несущей среды при прохождении максимумов и минимумов концентрации дисперсной фазы для различных начальных интенсивностей ударной волны**

Table 2

**Maximum values of the pressure drop of the carrier medium during the passage of maxima and minima of the dispersed phase concentration for different initial intensities of the shock wave**

Начальный перепад давления газа ( $p_2/p_1$ )	Максимальное значение перепада давления газа при прохождении областей с периодическим распределением концентрации частиц ( $p_a$ ), Па
4	23 507
3	14 969
2	6989
1,1	465

Из табл. 2 следует, что с увеличением интенсивности ударной волны возрастает абсолютное значение перепада давления газа на участках с циклическим изменением концентрации частиц. Это можно объяснить повышением скорости движения спутного потока газа в ударных волнах при увеличении их интенсивности. Также для менее интенсивных ударных волн большее влияние оказывает диссипация, вызванная межфазным взаимодействием.

### Заключение

В работе численно моделировалось движение ударной волны из однородного газа в газозвесь с большой массовой долей дисперсной фазы и периодическим распределением концентрации дисперсных включений. Примененная математическая модель реализует континуальную методику описания динамики многофазных сред, учитывающую взаимодействие между несущей средой и дисперсной фазой. Численные расчеты показывают, что при распространении ударной волны по газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы в процессе движения несущей среды формируется периодическая структура волн давления и скорости движения газа. Выявлено, что увеличение частоты изменения концентрации частиц приводит к уменьшению значений перепада давления и скорости движения газа. Также определено, что при увеличении интенсивности ударной волны возрастает максимальное значение перепада давления газа на циклической структуре распределения концентрации частиц. Выявленные закономерности можно использовать как при моделировании течений газодисперсных сред с большим объемным содержанием дисперсной фазы, так и при расчетах аппаратов и технологических процессов, связанных с динамикой газозвесей.

### Библиографические ссылки

1. Лойцянский ЛГ. *Механика жидкости и газа*. 7-е издание. Москва: Дрофа; 2003. 840 с. (Классики отечественной науки).
2. Нигматулин РИ. *Основы механики гетерогенных сред*. Москва: Наука; 1978. 336 с.
3. Дейч МЕ, Филиппов ГА. *Газодинамика двухфазных сред*. 2-е издание. Москва: Энергоиздат; 1981. 472 с.
4. Киселев СП, Руев ГА, Трунев АП, Фомин ВМ, Шавалиев МШ. *Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах*. Шокин ЮИ, редактор. Новосибирск: Наука; 1992. 261 с.
5. Кутушев АГ. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах*. Санкт-Петербург: Недра; 2003. 284 с.
6. Федоров АВ, Фомин ВМ, Хмель ТА. *Волновые процессы в газозвесьях частиц металлов*. Новосибирск: Параллель; 2015. 301 с.
7. Deledicque V, Papalexandris MV. An exact Riemann solver for compressible two-phase flow models containing non-conservative products. *Journal of Computational Physics*. 2007;222(1):217–245. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.07.025.
8. Осипцов АН, Рыбдылова ОД. Эффект фокусировки аэрозольных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале. *Доклады Академии наук*. 2010;433(3):346–349. EDN: MTJKMH.
9. Фомин ПА, Чен Дж-Р. Влияние химически инертных частиц на параметры и подавление детонации в газах. *Физика горения и взрыва*. 2009;45(3):77–88. EDN: KPGYOP.
10. Тропин ДА, Лаврук СА. Физико-математическое моделирование ослабления гомогенных и гетерогенных детонационных волн облаками капель воды. *Физика горения и взрыва*. 2022;58(3):80–90. DOI: 10.15372/FGV20220308.
11. Назаров УА. Прерывание распространения детонационных волн в газозвесьях унитарного топлива слоем неоднородных инертных частиц. *Физика горения и взрыва*. 2021;57(6):65–76. DOI: 10.15372/FGV20210608.
12. Жилин АА, Федоров АВ. Применение схемы TVD для расчета двухфазных течений с различными скоростями и давлениями компонентов. *Математическое моделирование*. 2008;20(1):29–47.
13. Волков КН, Емельянов ВН, Карпенко АГ, Тетерина ИВ. Моделирование нестационарного течения газозвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем частиц. *Вычислительные методы и программирование*. 2020;21(1):96–114. DOI: 10.26089/NumMet.v21r109.
14. Садин ДВ. Приложение гибридного метода крупных частиц к расчету взаимодействия ударной волны со слоем газозвеси. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020;12(6):1323–1338. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338.
15. Мазепа ЕЕ, Кусаинов ПИ, Лукашов ОЮ, Крайнов АЮ. О численном решении задачи распространения воздушных ударных волн в горных выработках шахты. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020; 64:108–120. DOI: 10.17223/19988621/64/8.
16. Уткин ПС. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода. *Химическая физика*. 2017;36(11):61–71. DOI: 10.7868/S0207401X17090151.
17. Порошина ЯЭ, Лопато АИ, Уткин ПС. Характеристический анализ динамики распространения ударной волны в среде с неравномерным распределением плотности. *Химическая физика*. 2022;41(8):48–58. EDN: LTTGKD.
18. Khmel T, Lavruk S. Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 2021;72:104522. DOI: 10.1016/j.jlp.2021.104522.
19. Huang Z, Zhang H. On the interactions between a propagating shock wave and evaporating water droplets. *Physics of Fluids*. 2020;32(12):123315. DOI: 10.1063/5.0035968.
20. Тукмаков АЛ. Численное моделирование колебаний монодисперсной газозвеси в нелинейном волновом поле. *Прикладная механика и техническая физика*. 2011;52(2):36–43. EDN: NRCZJD.
21. Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Численное изучение динамики ударных волн в газозвесьях. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2013;2:38–42. EDN: STGIHV.

22. Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Влияние свойств дисперсной фазы на характеристики ударной волны при прохождении прямого скачка уплотнения из чистого газа в газовзвесь. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2017; 3:128–132. EDN: ZNEAZH.
23. Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Численное исследование эволюции ударной волны в газовзвеси с учетом неравномерного распределения частиц. *Математическое моделирование*. 2014;26(10):109–119.
24. Нигматулин РИ, Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Ударно-волновой разлет газовзвесей. *Доклады Академии наук*. 2016; 466(4):418–421. DOI: 10.7868/S0869565216040101.
25. Tukmakov DA. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1328:012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
26. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2, Методы расчета различных течений*. Каменецкий ВФ, переводчик; Турчак ЛИ, редактор. Москва: Мир; 1991. 552 с.
27. Ковеня ВМ, Тарнавский ГА, Черный СГ. *Применение метода расщепления в задачах аэродинамики*. Шокин ЮИ, редактор. Новосибирск: Наука; 1990. 246 с.
28. Музафаров ИФ, Утюжников СВ. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа. *Математическое моделирование*. 1993;5(3):74–83.

## References

1. Loitsyanskii LG. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. 7<sup>th</sup> edition. Moscow: Drofa; 2003. 840 p. (Klassiki otechestvennoi nauki). Russian.
2. Nigmatulin RI. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moscow: Nauka; 1978. 336 p. Russian.
3. Deich ME, Filippov GA. *Gazodinamika dvukhfaznykh sred* [Gas dynamics of two-phase media]. 2<sup>nd</sup> edition. Moscow: Energoizdat; 1981. 472 p. Russian.
4. Kiselev SP, Ruev GA, Trunev AP, Fomin VM, Shavaliyev MSh. *Udarno-volnovye protsessy v dvukhkomponentnykh i dvukhfaznykh sredakh* [Shock-wave processes in two-component and two-phase media]. Shokin Yul, editor. Novosibirsk: Nauka; 1992. 261 p. Russian.
5. Kutushev AG. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media]. Saint Petersburg: Nedra; 2003. 284 p. Russian.
6. Fedorov AV, Fomin VM, Khmel' TA. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk: Parallel'; 2015. 301 p. Russian.
7. Deledicque V, Papalexandris MV. An exact Riemann solver for compressible two-phase flow models containing non-conservative products. *Journal of Computational Physics*. 2007;222(1):217–245. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.07.025.
8. Osipov AN, Rybdylova OD. [Focusing effect for aerosol particles behind a shock wave moving in a microchannel]. *Doklady Akademii nauk*. 2010;433(3):346–349. Russian. EDN: MTJKMH.
9. Fomin PA, Chen J-R. [Effect of chemically inert particles on parameters and suppression of detonation in gases]. *Fizika gorennya i vzryva*. 2009;45(3):77–88. Russian. EDN: KPGYOP.
10. Tropin DA, Lavruk SA. [Physicomathematical modeling of attenuation of homogeneous and heterogeneous detonation waves by clouds of water droplets]. *Fizika gorennya i vzryva*. 2022;58(3):80–90. Russian. DOI: 10.15372/FGV20220308.
11. Nazarov UA. [Interruption of detonation wave propagation in monofuel – air mixtures by a layer of inhomogeneous inert particles]. *Fizika gorennya i vzryva*. 2021;57(6):65–76. Russian. DOI: 10.15372/FGV20210608.
12. Zhilin AA, Fedorov AV. Application of the TVD scheme for the two-phase flow calculations at different component velocities and pressures. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2008;20(1):29–47. Russian.
13. Volkov KN, Emelyanov VN, Karpenko AG, Teterina IV. Simulation of unsteady gas – particle flow induced by the shock-wave interaction with a particle layer. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. 2020;21(1):96–114. Russian. DOI: 10.26089/NumMet.v21r109.
14. Sadin DV. Application of a hybrid large-particle method to the computation of the interaction of a shock wave with a gas suspension layer. *Computer Research and Modeling*. 2020;12(6):1323–1338. Russian. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338.
15. Mazepa EE, Kusainov PI, Lukashov OYu, Kraynov AYu. On the numerical solution to the problem of air shock wave propagation in mine workings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2020;64:108–120. Russian. DOI: 10.17223/19988621/64/8.
16. Utkin PS. [Mathematical modeling of the interaction of a shock wave with a dense backfill of particles within the framework of a two-fluid approach]. *Khimicheskaya fizika*. 2017;36(11):61–71. Russian. DOI: 10.7868/S0207401X17090151.
17. Poroshina YaE, Lopato AI, Utkin PS. [Characteristic analysis of the dynamics of shock wave propagation in a medium with an uneven density distribution]. *Khimicheskaya fizika*. 2022;41(8):48–58. Russian. EDN: LTTGKD.
18. Khmel' T, Lavruk S. Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 2021;72:104522. DOI: 10.1016/j.jlp.2021.104522.
19. Huang Z, Zhang H. On the interactions between a propagating shock wave and evaporating water droplets. *Physics of Fluids*. 2020;32(12):123315. DOI: 10.1063/5.0035968.
20. Tukmakov AL. [Numerical simulation of oscillations of a monodisperse gas – particle mixture in a nonlinear wave field]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2011;52(2):36–43. Russian. EDN: NRCZJD.
21. Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Numerical study of shock-wave dynamics in a gas suspension. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*. 2013;2:38–42. Russian. EDN: STGIHV.
22. Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Influence of the disperse phase properties on characteristics of the shock wave passing the direct shock from pure gas in the gas mixture. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*. 2017;3:128–132. Russian. EDN: ZNEAZH.
23. Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Numerical research of evolution of the shock wave in gas – particles suspension with account uneven distribution of particles. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2014;26(10):109–119. Russian.

24. Nigmatulin RI, Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Shock wave dispersion of gas – particle mixtures. *Doklady Akademii nauk*. 2016;466(4):418–421. Russian. DOI: 10.7868/S0869565216040101.

25. Tukmakov DA. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1328:012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.

26. Fletcher CAJ. *Computational techniques for fluid dynamics. Volume 2, Specific techniques for different flow categories*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. XI, 484 p. (Armand J-L, Holt M, Hut P, Keller HB, Killeen J, Orszag SA, et al., editors. Springer series in computational physics).

Russian edition: Fletcher C. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkosti. Tom 2, Metody rascheta razlichnykh techenii*. Kamenetskii VF, translator; Turchak LI, editor. Moscow: Mir; 1991. 552 p.

27. Kovenya VM, Tarnavskii GA, Chernyi SG. *Primenenie metoda rasshchepeniya v zadachakh aerodinamiki* [Application of the splitting method in aerodynamics problems]. Shokin YuI, editor. Novosibirsk: Nauka; 1990. 246 p. Russian.

28. Muzafarov IF, Utyuzhnikov SV. Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows. *Matematicheskoe modelirovanie*. 1993;5(3):74–83. Russian.

Получена 27.10.2023 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.  
Received 27.10.2023 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.