УДК 519.157.2

УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА. ЧАСТЬ 1

В. М. ДЕМИДЕНКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Описан класс четырехиндексных вещественных матриц, для которых гарантирована эффективная разрешимость квадратичной задачи выбора – достижение экстремальных значений ее функционала на одной из подстановок специального вида, приведенных в классической теореме Харди, Литлвуда и Полиа о перестановке трех систем. Условия, определяющие введенный класс матриц, обобщают все ранее предложенные условия, накладываемые на вид матриц и гарантирующие строгую разрешимость задач минимизации билинейной формы на декартовом произведении симметрической группы (условия теоремы о перестановке трех систем), квадратичной формы на симметрической группе, а также результаты аналогичного плана, полученные для квадратичной задачи о назначениях.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; квадратичная задача о назначениях; оптимизация на подстановках; строгая разрешимость задач.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.5.01).

Образец цитирования:
Демиденко ВМ. Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 1. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:45–58.
EDN: TEYTMM

For citation:
Demidenko VM. Conditions for the effective solvability of the quadratic choice problem. Part 1. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:45–58. Russian.
EDN: TEYTMM

Автор:
Виталий Михайлович Демиденко – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры высшей математики факультета цифровой экономики.

Author:
Vitaliy M. Demidenko, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of higher mathematics, faculty of digital economy.
vmdemidenko@yandex.ru

CONDITIONS FOR THE EFFECTIVE SOLVABILITY OF THE QUADRATIC CHOICE PROBLEM. PART 1

V. M. DEMIDENKO [a]

[a] *Belarusian State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus*

Abstract. A class of four-index real matrices is described for which the effective solvability of the quadratic choice problem is guaranteed. This means achieving the extreme values of its functional on one of the permutations of a special kind, which are given in the classical theorem of Hardy, Littlewood and Pólya on the permutation of three systems. The introduced conditions generalise all the previously proposed conditions imposed on the kind of matrices that guarantee strict solvability of the problems of minimising the bilinear form on the Cartesian product of the symmetric group (conditions of the theorem on the permutation of three systems), the quadratic form of the symmetric group, and also generalise the similar results obtained for the quadratic assignment problem.

Keywords: combinatorial optimisation; quadratic assignment problem; substation optimisation; strict solvability of problems.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.5.01).

Введение

Одним из направлений в исследовании NP-трудных оптимизационных задач на подстановках является выделение их полиномиально или строго разрешимых случаев. Последние описываются такими ограничениями, накладываемыми на входные данные оптимизационной задачи, которые гарантируют достижение оптимума на одной или нескольких заранее заданных подстановках. Результаты исследования частного случая квадратичной задачи выбора в этом направлении впервые были сформулированы Г. Х. Харди, Дж. И. Литлвудом и Г. Полиа в виде теоремы о перестановке трех систем [1]. Условия указанной теоремы гарантировали достижение максимума билинейной формы на двух заданных подстановках специального вида. Значительно позже рядом исследователей были получены результаты минимизации квадратичной формы на одной из подстановок, приведенных в теореме о перестановке трех систем [2–5], которые были обобщены в статьях [6; 7]. Дальнейшие исследования задач минимизации билинейной и квадратичной форм на множестве подстановок продолжены в работах [8–10]. Современное состояние этой тематики отражено в монографиях [11; 12].

В данной работе предложены условия достижения экстремальных значений функционала квадратичной задачи выбора на одной из подстановок из теоремы Харди, Литлвуда и Полиа, которые обобщают полученные до настоящего времени аналогичные результаты для всех частных случаев указанной задачи, включая квадратичную задачу о назначениях [8–10].

Предварительные сведения и обозначения

Пусть S_n – симметрическая группа, определенная на множестве $N_{1,n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Любая подстановка $\sigma \in S_n$ является взаимно однозначным отображением, переводящим элемент i в $\sigma(i)$, где $i \in N_{1,n}$. В дальнейшем подстановки будем обозначать через $\sigma = \langle \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i), \ldots, \sigma(n) \rangle$, где $\sigma(i)$ – образ элемента $i \in N_{1,n}$, а i – прообраз $\sigma(i) \in N_{1,n}$. Подмножество $\{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$ далее обозначается через $N_{i,j}$. Произведением пары подстановок σ, ρ называется подстановка $\sigma \circ \rho$, переводящая элемент i в $\sigma(\rho(i))$, где $i \in N_{1,n}$, а символ $\circ$ обозначает операцию умножения подстановок.

Пусть $A = (a_{i,j,k,\ell})$ – произвольная вещественная четырехиндексная матрица размера $n \times n \times n \times n$. Определим на S_n функционал, полагая, что для любой подстановки σ

$$f_A(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)}. \quad (1)$$

Квадратичная задача выбора состоит в нахождении такой подстановки $\sigma_0 \in S_n$, что неравенство $f_A(\sigma_0) \le f_A(\sigma)$ выполняется для любой подстановки $\sigma \in S_n$.

Подстановка σ определяет в $N_{1,n}$ восемь подмножеств:

$$I_{1,1}^{\sigma} = \left\{ i \in N_{1,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \middle| \sigma(i) > \sigma(n+1-i) \right\},\ I_{1,2}^{\sigma} = \left\{ n+1-i \in N_{1,n} \middle| i \in I_{1,1}^{\sigma} \right\},$$
$$I_{1,3}^{\sigma} = N_{1,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \backslash I_{1,1}^{\sigma},\ I_{1,4}^{\sigma} = \left\{ n+1-i \in N_{1,n} \middle| i \in I_{1,3}^{\sigma} \right\}, \tag{2}$$

$$I_{2,1}^{\sigma} = \left\{ j \in N_{2,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \middle| \sigma(j) < \sigma(n+2-j) \right\},\ I_{2,2}^{\sigma} = \left\{ n+2-j \in N_{1,n} \middle| j \in I_{2,1}^{\sigma} \right\},$$
$$I_{2,3}^{\sigma} = N_{2,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \backslash I_{2,1}^{\sigma},\ I_{2,4}^{\sigma} = \left\{ n+2-j \in N_{1,n} \middle| j \in I_{2,2}^{\sigma} \right\}. \tag{3}$$

Введенные подмножества $I_{1,1}^{\sigma}$, $I_{2,1}^{\sigma}$ определяют две подстановки:

$$\psi_{\sigma} = \prod_{i \in I_{1,1}^{\sigma}} (i,\ n+1-i),\ \ \varphi_{\sigma} = \prod_{j \in I_{2,1}^{\sigma}} (j,\ n+2-j), \tag{4}$$

где $(i,\ n+1-i)$, $(j,\ n+2-j)$ – транспозиции, которые меняют местами соответственно i и $n+1-i$, j и $n+2-j$, оставляя все остальные элементы множества $N_{1,n}$ на месте. В силу определения подмножества (2), (3) и подстановки (4) обладают следующими свойствами:

(i) набор подмножеств $I_{1,r}^{\sigma}$, $r = 1, 2, 3, 4$, является разбиением множества $N_{1,n}$ при четном n и множества $N_{1,n} \backslash \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ при нечетном n;

(ii) набор подмножеств $I_{2,s}^{\sigma}$, $s = 1, 2, 3, 4$, является разбиением множества $N_{2,n}$ при нечетном n и множества $N_{2,n} \backslash \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ при четном n;

(iii) для подстановок ψ_{σ}, φ_{σ} справедливы равенства

$$\psi_{\sigma}(i) = n+1-i,\ \psi_{\sigma}(n+1-i) = i,\ i \in I_{1,1}^{\sigma},$$
$$\psi_{\sigma}(j) = j,\ j \in N_{1,n} \backslash \left(I_{1,1}^{\sigma} \cup I_{1,2}^{\sigma}\right),\ \psi_{\sigma}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{5}$$

при нечетном n,

$$\varphi_{\sigma}(j) = n+2-j,\ \varphi_{\sigma}(n+2-j) = j,\ j \in I_{2,1}^{\sigma},\ \varphi_{\sigma}(1) = 1,$$
$$\varphi_{\sigma}(j) = j,\ j \in N_{1,n} \backslash \left(I_{2,1}^{\sigma} \cup I_{2,2}^{\sigma}\right),\ \varphi_{\sigma}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{6}$$

при четном n.

Подстановки (4) однозначно определяют пару подстановок

$$\sigma_{\psi} = \sigma \circ \psi_{\sigma},\ \sigma_{\varphi} = \sigma \circ \varphi_{\sigma},\ \sigma \in S_n. \tag{7}$$

Приращением функционала (1) на упорядоченной паре подстановок σ, ρ называется разность $\Delta f_A \langle \sigma, \rho \rangle = f_A(\rho) - f_A(\sigma)$.

Условия достижения минимума функционала квадратичной задачи выбора

При описании условий, гарантирующих достижение минимума функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \ldots, n, \ldots, 6, 4, 2 \rangle \in S_n$, и их доказательстве используется следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ существует такая последовательность подстановок*

$$\sigma = \rho_0,\ \rho_1, \ldots, \rho_{i-1},\ \rho_i, \ldots, \rho_k = \sigma_0, \tag{8}$$

что $\rho_i = \psi_{\rho_{i-1}}$ либо $\rho_i = \varphi_{\rho_{i-1}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Чтобы доказать лемму 1, достаточно убедиться в существовании для σ_0 и любой подстановки σ последовательности вида (8). Проверка показывает, что из равенств

$$\sigma(i) = 2i - 1,\ \sigma(n + 1 - i) = 2i,\ i \in N_{1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}, \tag{9}$$

вытекает $\sigma = \sigma_0$. Следовательно, для любой подстановки σ, отличной от σ_0, в $N_{1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ должен существовать минимальный элемент $1 \le i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, нарушающий равенства (9). Для такого элемента i должны выполняться соотношения

$$\begin{gathered} \sigma(i) \ne \sigma_0(i) = 2i - 1 \text{ либо } \sigma(n + 1 - i) \ne \sigma_0(n + 1 - i) = 2i, \\ \sigma(j) = \sigma_0(j) = 2j - 1 \text{ и } \sigma(n + 1 - j) = \sigma_0(n + 1 - j) = 2j, \end{gathered} \tag{10}$$

где $j \in N_{1,\, i - 1}$. С другой стороны, если известно, что для некоторой подстановки σ минимальный элемент i, удовлетворяющий соотношениям (10), равен $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то в силу равенств (9) $\sigma = \sigma_0$.

Предположим, что для произвольной подстановки σ, отличной от σ_0, с минимальным элементом $1 \le i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, нарушающим равенства (9), можно построить последовательность вида (8), в которой для последней подстановки ρ' минимальный элемент i', нарушающий равенства (9), будет не меньше $i + 1$. Если сформулированное предположение верно, то с его помощью нетрудно убедиться в справедливости леммы 1. Действительно, если минимальный нарушающий равенства (9) элемент i' последней подстановки ρ' в построенной последовательности вида (8) строго меньше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то строим новую последовательность такого же вида, начинающуюся с подстановки ρ' и заканчивающуюся подстановкой ρ'', для которой минимальный элемент i'', нарушающий равенства (9), будет не меньше $i' + 1$. Если по-прежнему $i'' < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то продолжаем процесс построения новой последовательности, начиная с подстановки ρ'', и т. д. Таким образом, ввиду строгого возрастания минимальных элементов, нарушающих равенства (9), за конечное число шагов можно построить последовательность подстановок вида (8), последняя подстановка которой в качестве минимального элемента, нарушающего равенства (9), будет иметь число $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Следовательно, в силу равенств (9) последняя подстановка в построенной последовательности будет совпадать с σ_0. Объединив все построенные последовательности в одну, получим последовательность вида (8) с начальной и конечной подстановками σ и σ_0.

Докажем справедливость приведенного выше предположения. Пусть $\sigma \ne \sigma_0$, тогда в силу соотношений (10) для подстановки σ возможны две ситуации: $\sigma(i) \ne 2i - 1$ либо $\sigma(n + 1 - i) \ne 2i$, где $1 \le i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. В первой ситуации (т. е. при $\sigma(i) \ne 2i - 1$) имеем

$$\sigma = \left\langle 1, 3, 5, \ldots, 2i - 3, \sigma(i), \ldots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots, \sigma(n + 1 - i), 2i - 2, \ldots, 6, 4, 2 \right\rangle.$$

Из записи σ видно, что для элемента $\ell = \sigma^{-1}(2i - 1) \in N_{i + 1,\, n + 1 - i}$ возможны два случая: $i + 1 \le \ell \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ либо $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < \ell \le n + 1 - i$.

Если для ℓ имеет место первый случай, то $\sigma(\ell) = 2i - 1$ стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи σ (при четном n допускается равенство $\sigma(\ell) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$), следовательно,

$$\begin{gathered} \sigma = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i - 3, \sigma(i), \ldots, \sigma(\ell - 1), 2i - 1, \ldots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots, \right. \\ \left. \sigma(n + 1 - \ell), \sigma(n + 2 - \ell), \ldots, \sigma(n + 1 - i), 2i - 2, \ldots, 4, 2 \right\rangle. \end{gathered}$$

Так как $\sigma(n+2-\ell)\in N_{2i,\,n}$, то $\sigma(\ell)=2i-1<\sigma(n+2-\ell)$, откуда с учетом подмножеств (3) имеем включение $\ell\in I_{2,1}^{\sigma}$. Таким образом, транспозиция $(\ell,\, n+2-\ell)$ входит в запись подстановки φ_σ, и в силу определения подмножества $I_{2,1}^{\sigma}$ из равенств (6) и независимости транспозиций, порождающих подстановку φ_σ, вытекают соотношения

$$\varphi_\sigma(\ell)=n+2-\ell,\ \varphi_\sigma(n+2-\ell)=\ell;\ \varphi_\sigma(j)=j,\ \varphi_\sigma(n+2-j)=n+2-j,\ \ j\notin I_{2,1}^{\sigma}.$$

Из полученных соотношений и определения произведения подстановок для $\rho_1=\sigma\circ\varphi_\sigma$ следует справедливость равенств

$$\rho_1(\ell)=\sigma(n+2-\ell),\ \rho_1(n+2-\ell)=\sigma(\ell)=2i-1,$$
$$\rho_1(j)=\sigma(j),\ \rho_1(n+2-j)=\sigma(n+2-j)$$

для ℓ и всех $j\notin I_{2,1}^{\sigma}$. Таким образом, построена подстановка $\rho_1=\sigma\circ\varphi_\sigma$ вида

$$\rho_1=\Big\langle 1,\,3,\,\ldots,\,2i-3,\,\rho_1(i),\,\ldots,\,\rho_1(\ell-1),\,\sigma(n+2-\ell),\,\ldots,\,\rho_1\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\ldots,$$
$$\rho_1(n+1-\ell),\,2i-1,\,\ldots,\,\rho_1(n+1-i),\,2i-2,\,\ldots,\,4,\,2\Big\rangle,$$

в записи которой элемент $2i-1$ стоит на $(n+2-\ell)$-м месте. Так как $\rho_1(\ell-1)\in N_{2i,\,n}$, то $\rho_1(\ell-1)>$ $>2i-1=\rho_1(n+2-\ell)=\rho_1(n+1-(\ell-1))$, следовательно, $\ell-1\in I_{1,1}^{\rho_1}$. Таким образом, транспозиция $(\ell-1,\, n+2-\ell)$ входит в запись подстановки ψ_{ρ_1} вида (4). Далее в силу равенств (5), независимости транспозиций, порождающих подстановку ψ_{ρ_1}, и справедливости включения $\ell-1\in I_{1,1}^{\rho_1}$ должны выполняться соотношения

$$\psi_{\rho_1}(\ell-1)=n+2-\ell,\ \psi_{\rho_1}(n+2-\ell)=\ell-1;\ \psi_{\rho_1}(j)=j,\ \psi_{\rho_1}(n+1-j)=n+1-j,\ j\notin I_{1,1}^{\sigma},$$

из которых следует справедливость равенств

$$\rho_2(\ell-1)=\rho_1(n+2-\ell)=2i-1,\ \rho_2(n+2-\ell)=\rho_1(\ell-1),$$
$$\rho_2(j)=\rho_1(j),\ \rho_2(n+1-j)=\rho_1(n+1-j)$$

для $\ell-1$ и всех $1\le j\le i-1$ ввиду $j\notin I_{1,1}^{\rho_1}$ и $\ell-1\in I_{1,1}^{\rho_1}$. Таким образом, построена подстановка $\rho_2=\rho_1\circ\psi_{\rho_1}$ вида

$$\rho_2=\Big\langle 1,\,3,\,\ldots,\,2i-3,\,\rho_2(i),\,\ldots,\,2i-1,\,\rho_2(\ell),\,\ldots,\,\rho_2\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\ldots,$$
$$\rho_2(n+1-\ell),\,\rho_2(\ell-1),\,\ldots,\,\rho_2(n+1-i),\,2i-2,\,\ldots,\,4,\,2\Big\rangle,$$

в записи которой элемент $2i-1$ стоит на $(\ell-1)$-м месте. Если $\ell-1=i$, то построена последовательность $\sigma=\rho_0,\,\rho_1,\,\rho_2$ вида (8), в которой элементы $1,\,2,\,\ldots,\,2i-1$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0. Если $\ell-1>i$, то, повторив для элемента $2i-1$ аналогичные вышеприведенным построения $\ell-i$ раз, получим последовательность $\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_{2(\ell-i)-1},\,\rho_{2(\ell-i)}$ вида (8) с последней подстановкой

$$\rho_{2(\ell-i)}=\Big\langle 1,\,3,\,\ldots,\,2i-3,\,2i-1,\,\rho_{2(\ell-i)}(i+1),\,\ldots,\,\rho_{2(\ell-i)}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\ldots,$$
$$\rho_{2(\ell-i)}(n+1-i),\,2i-2,\,\ldots,\,4,\,2\Big\rangle,$$

в записи которой элемент $2i-1$ стоит на i-м месте. Доказано, что в первом случае (т. е. при выполнении соотношений $i+1\le\ell=\sigma^{-1}(2i-1)\le\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$) существует последовательность длины $2(\ell-i)$ вида (8), в записи последней подстановки $\rho_{2(\ell-i)}$ которой элементы $1,\,2,\,\ldots,\,2i-1$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0.

Убедимся в существовании аналогичной последовательности во втором случае. Так как $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < \ell = \sigma^{-1}(2i-1) \le n+1-i,$ то $\ell = n+1-k,$ где $i \le k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Следовательно, $\sigma(\ell) = 2i-1$ стоит справа от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи подстановки σ вида

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, \sigma(i), \ldots, \sigma(k-1), \sigma(k), \ldots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots, \right.$$
$$\left. \sigma(n-k), 2i-1, \ldots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle.$$

Поскольку $\sigma(k) \in N_{2i,\,n},$ то $\sigma(k) > 2i-1 = \sigma(n+1-k),$ откуда $k \in I_{1,\,1}^{\sigma}$. Следовательно, транспозиция $(k,\ n+1-k)$ входит в запись подстановки ψ_σ вида (4), и в силу определения подмножества $I_{1,\,1}^{\sigma}$ из равенств (5) и независимости транспозиций, порождающих подстановку ψ_σ, имеем

$$\rho_1(k) = \sigma(n+1-k) = 2i-1,\ \rho_1(n+1-k) = \sigma(k),$$
$$\rho_1(j) = \sigma(j),\ \rho_1(n+1-j) = \sigma(n+1-j)$$

для k и всех $1 \le j \le i-1$ ввиду $j \notin I_{1,\,1}^{\sigma}$ и $k \in I_{1,\,1}^{\sigma}$. Таким образом, построена подстановка $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$ вида

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, \rho_1(i), \ldots, \rho_1(k-1), 2i-1, \ldots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots, \right.$$
$$\left. \rho_1(n-k), \sigma(k), \ldots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle,$$

где $i \le k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Если $k = i$, то в записи подстановки ρ_1 элемент $2i-1$ стоит на i-м месте, т. е. в построенной подстановке ρ_1 элементы $1, 2, \ldots, 2i-1$ располагаются на тех же позициях, что и в подстановке σ_0. Если $i+1 \le k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то для подстановки ρ_1 имеет место первый случай, который рассмотрен выше для подстановки σ, когда в ее записи элемент $2i-1$ стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$. Для этого случая доказано существование последовательности вида (8) с последней подстановкой, в записи которой элементы $1, 2, \ldots, 2i-1$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0.

В результате доказано, что в первой ситуации, когда минимальный элемент i подстановки σ нарушает первое из равенств (9), можно построить последовательность вида (8), для последней подстановки которой всегда имеет место только вторая ситуация.

Следовательно, для завершения доказательства леммы 1 осталось показать, что для подстановки $\sigma \ne \sigma_0$ и во второй ситуации (т. е. при $\sigma(n+1-i) \ne 2i$) существует последовательность вида (8), в последней подстановке которой минимальный элемент, нарушающий равенства (9), строго больше аналогичного элемента из σ.

Если имеет место $\sigma(n+1-i) \ne 2i$, где $1 \le i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то подстановка σ записывается как

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \sigma(i+1), \ldots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из приведенной записи σ видно, что элемент $2i$ может стоять между $2i-1$ и $\sigma(n+1-i)$ либо справа, либо слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$. Таким образом, для элемента $\ell = \sigma^{-1}(2i)$ возможны только два случая: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < \ell \le n-i$ либо $i+1 \le \ell \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. В первом случае $\ell = n+1-k$, где $i+1 \le k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, и элемент $2i$ стоит справа от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$.

Следовательно, подстановка σ записывается как

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \sigma(i+1), \ldots, \sigma(k-1), \sigma(k), \ldots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,\right.$$

$$\left. 2i, \sigma(n+2-k), \ldots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из данной записи σ видно, что $\sigma(k) > 2i = \sigma(\ell) = \sigma(n+1-k)$, так как $\sigma(k) \in N_{2i+1,\, n}$, т. е. $k \in I_{1,1}^{\sigma}$ и транспозиция $(k,\, n+1-k)$ входит в запись подстановки ψ_σ. Таким образом, в силу определения подмножества $I_{1,1}^{\sigma}$ из равенств (5) и независимости транспозиций, порождающих постановку ψ_σ, выполняются соотношения

$$\psi_\sigma(k) = n+1-k,\ \psi_\sigma(n+1-k) = k;\ \psi_\sigma(j) = j,\ \psi_\sigma(n+1-j) = n+1-j,\ j \notin I_{1,1}^{\sigma},$$

из которых для подстановки $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$ следует справедливость равенств

$$\rho_1(k) = \sigma(n+1-k) = 2i,\ \rho_1(n+1-k) = \sigma(k),$$

$$\rho_1(j) = \sigma(j),\ j \in N_{1,\, i},\ \rho_1(n+1-j) = \sigma(n+1-j),\ j \in N_{1,\, i-1}.$$

Таким образом, подстановка $\rho_1 = \sigma \circ \varphi_\sigma$ записывается как

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \rho_1(i+1), \ldots, \rho_1(k-1), 2i, \ldots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,\right.$$

$$\left. \sigma(n+1-k), \rho_1(n+2-k), \ldots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из приведенной записи ρ_1 видно, что $\rho_1(k) = 2i < \rho_1(n+2-k)$, так как $\rho_1(n+2-k) \in N_{2i+1,\, n}$, т. е. $k \in I_{2,1}^{\sigma}$ и транспозиция $(k,\, n+2-k)$ входит в запись подстановки φ_{ρ_1}. В силу независимости транспозиций, порождающих подстановку φ_{ρ_1}, справедливости включения $k \in I_{2,1}^{\sigma}$ и равенств (5) для подстановки φ_{ρ_1} выполняются соотношения

$$\varphi_{\rho_1}(n+2-k) = k,\ \varphi_{\rho_1}(k) = n+2-k;\ \varphi_{\rho_1}(j) = j,\ \varphi_{\rho_1}(n+2-j) = n+2-j,\ j \notin I_{2,1}^{\sigma},$$

из которых следует справедливость равенств

$$\rho_2(n+2-k) = \rho_1(k) = 2i,\ \rho_2(k) = \rho_1(n+2-k),$$

$$\rho_2(j) = \rho_1(j),\ j \in N_{1,\, i},\ \rho_2(n+1-j) = \rho_1(n+1-j),\ j \in N_{1,\, i-1}.$$

Таким образом, подстановка ρ_2 записывается как

$$\rho_2 = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \rho_2(i+1), \ldots, \rho_2(k-1),\ \rho_1(n+2-k), \ldots, \rho_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,\right.$$

$$\left. \rho_2(n+1-k), 2i, \ldots, \rho_2(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle.$$

Поскольку $\ell = n+1-k$, то в записи ρ_2 элемент $2i$ стоит на $(n+2-k)$-м месте. Следовательно, если $\ell + 1 = n+2-k = n+1-i$, то построена подстановка ρ_2, в записи которой элементы $1, 2, 3, \ldots, 2i-1, 2i$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0, т. е. минимальный элемент подстановки ρ_2, нарушающий равенства (9), должен быть не меньше $i+1$. Таким образом, при $\ell + 1 = n+1-i$ доказано существование последовательности подстановок $\sigma = \rho_0, \rho_1, \rho_2$, где

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \rho_1(i+1), \ldots, \rho_1(k-1), 2i, \ldots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,\right.$$

$$\left. \sigma(n+1-k),\ \rho_1(n+2-k), \ldots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2 \right\rangle,$$

а ρ_2 – подстановка указанного выше вида.

Если для $\ell + 1$ выполняются соотношения $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 < \ell + 1 < n + 1 - i$, то, начав с подстановки ρ_2 и проделав еще $n - i - \ell$ аналогичных преобразований, получим последовательность подстановок $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2(n-i-\ell)-1}, \rho_{2(n-i-\ell)}$ вида (8), при этом в записи последней подстановки $\rho_{2(n-i-\ell)}$ элементы $1, 2, 3, \ldots, 2i-1, 2i$ будут стоять на тех же местах, что и в подстановке σ_0. Таким образом, минимальный элемент подстановки $\rho_{2(n-i-\ell)}$, нарушающий равенства (9), будет не меньше $i + 1$.

Осталось рассмотреть второй случай, когда $i + 1 \le \ell = \sigma^{-1}(2i) \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ и ℓ стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи подстановки σ (при этом допускается равенство $\sigma(\ell) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$). В данном случае подстановка σ имеет вид

$$\sigma = \Big\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \sigma(i+1), \ldots, \sigma(\ell-1), 2i, \ldots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,$$

$$\sigma(n+1-\ell), \sigma(n+2-\ell), \ldots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2\Big\rangle.$$

Так как $\sigma(n+2-\ell) \in N_{2i+1, n}$, то выполняются соотношения $\sigma(\ell) = 2i < \sigma(n+2-\ell)$, из которых следует, что транспозиция $(\ell, n+2-\ell)$ входит в разложение подстановки φ_σ. Таким образом, в силу независимости транспозиций, порождающих подстановку φ_σ, справедливости включения $N_{1,i} \subseteq N_{1,n} \setminus \left(I_{2,1}^{\sigma} \cup I_{2,2}^{\sigma}\right)$ и формулы (4) для подстановки φ_σ выполняются соотношения

$$\varphi_\sigma(n+2-\ell) = \ell,\ \varphi_\sigma(\ell) = n+2-\ell;\ \varphi_\sigma(j) = j,\ \varphi_\sigma(n+2-j) = n+2-j,\ j \notin I_{2,1}^{\sigma}.$$

Полученные соотношения и цепочка включений $N_{1,i-1} \subset N_{1,i} \subseteq N_{1,n} \setminus \left(I_{2,1}^{\sigma} \cup I_{2,2}^{\sigma}\right)$ показывают, что для подстановки $\rho_1 = \sigma \circ \varphi_\sigma$ справедливы равенства

$$\rho_1(n+2-\ell) = \sigma(\ell) = 2i,\ \rho_1(\ell) = \sigma(n+2-\ell),$$

$$\rho_1(j) = \sigma(j),\ j \in N_{1,i},\ \rho_1(n+1-j) = \sigma(n+1-j),\ j \in N_{1,i-1},$$

которые допускают следующую запись подстановки ρ_1:

$$\rho_1 = \Big\langle 1, 3, \ldots, 2i-3, 2i-1, \rho_1(i+1), \ldots, \rho_1(\ell-1), \sigma(n+2-\ell), \ldots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,$$

$$\rho_1(n+1-\ell), 2i, \ldots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \ldots, 4, 2\Big\rangle.$$

Из приведенной записи подстановки ρ_1 видно, что для нее имеет место первый случай, рассмотренный выше для подстановки σ, когда элемент $2i$ стоит справа от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи σ. Для этого случая доказано существование последовательности вида (8), последняя подстановка которой имеет минимальный элемент, нарушающий равенства (9), не меньший $i + 1$.

В итоге доказано, что во всех возможных случаях для любой подстановки $\sigma \ne \sigma_0$ с минимальным элементом i, нарушающим равенства (9), существует последовательность вида (8), в последней подстановке которой минимальным элементом является число, не меньшее $i + 1$. Лемма 1 доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующее утверждение, в котором приводятся достаточные условия достижения минимума функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке σ_0.

Лемма 2. *Если для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняются неравенства*

$$\Delta f_A\langle \sigma, \sigma \circ \psi_\sigma \rangle \le 0,\ \Delta f_A\langle \sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma \rangle \le 0, \tag{11}$$

то подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \ldots, n, \ldots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует функционал $f_A(\sigma)$ на симметрической группе S_n.

Доказательство. Для любой подстановки σ в силу леммы 1 существует такая конечная последовательность подстановок $\sigma = \rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\ell-1}, \rho_\ell, \ldots, \rho_k = \sigma_0$, что $\rho_\ell = \rho_{\ell-1} \circ \psi_{\rho_{\ell-1}}$ либо $\rho_\ell = \rho_{\ell-1} \circ \varphi_{\rho_{\ell-1}}$

для всех $\ell = 1, 2, \ldots, k$. Непосредственная проверка показывает, что для этой последовательности имеет место равенство

$$f_A(\sigma_0) - f_A(\sigma) = \sum_{\ell=1}^{k} \Delta f_A\left(\rho_{\ell-1}, \rho_{\ell-1} \circ \omega_{\ell-1}\right), \tag{12}$$

где $\rho_0 = \sigma$, $\rho_k = \sigma_0$ и $\omega_{\ell-1} = \psi_{\rho_{\ell-1}}$ либо $\omega_{\ell-1} = \varphi_{\rho_{\ell-1}}$. Так как в силу неравенств (11) приращение для любых пар подстановок $\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma$ и $\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma$ неположительно, то для пар соседних подстановок $\rho_{\ell-1}, \rho_{\ell-1} \circ \omega_{\ell-1}$ указанной последовательности должны выполняться неравенства $\Delta f\left(\rho_{\ell-1}, \rho_{\ell-1} \circ \omega_{\ell-1}\right) \le 0$ для всех $\ell = 1, 2, \ldots, k$. Следствием последних неравенств и равенства (12) является неравенство $f(\sigma_0) \le f(\sigma)$. Лемма 2 доказана.

Строгая разрешимость квадратичной задачи выбора

Назовем частичной суммой функционала $f_A(\sigma)$ часть его слагаемых, определяемых парами $\langle i, j\rangle$ декартова произведения $I \times J$ двух непересекающихся либо совпадающих подмножеств I, J, т. е. сумму вида

$$f_A(\sigma; I \times J) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i, j, \sigma(i), \sigma(j)}. \tag{13}$$

Лемма 3. *Для любой пары подстановок σ, σ_ψ приращение $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\psi)$ неположительно, если элементы матрицы $A = \left(a_{i, j, k, \ell}\right)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} &a_{i, j, m, \ell} + a_{i, n+1-j, m, q} + a_{n+1-i, j, p, \ell} + a_{n+1-i, n+1-j, p, q} - \\ &- a_{i, j, p, q} - a_{i, n+1-j, p, \ell} - a_{n+1-i, j, m, q} - a_{n+1-i, n+1-j, m, \ell} \le 0 \end{aligned} \tag{14}$$

при четном n, где $1 \le i, j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \le m < p \le n$, $1 \le \ell < q \le n$,

$$\begin{aligned} &a_{i, k, m, \ell} + a_{i, n+1-k, m, q} + a_{n+1-i, k, p, \ell} + a_{n+1-i, n+1-k, p, q} - \\ &- a_{k, i, p, \ell} - a_{k, n+1-i, p, q} - a_{n+1-k, i, m, \ell} - a_{n+1-k, n+1-i, m, q} \le 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &a_{i, j, m, \ell} + a_{i, n+1-j, m, q} + a_{n+1-i, j, p, \ell} + a_{n+1-i, n+1-j, p, q} - \\ &- a_{i, j, m, q} - a_{i, n+1-j, m, \ell} - a_{n+1-i, j, p, q} - a_{n+1-i, n+1-j, p, \ell} \le 0 \end{aligned} \tag{16}$$

при четном n, где m, ℓ, p, q – попарно различные индексы, $1 \le i, k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \le m < p \le n$, $1 \le \ell < q \le n$, и дополнительно неравенствам

$$\begin{aligned} &a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, j, p, \ell} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-j, p, q} + a_{j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \ell, p} + a_{n+1-j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, q, p} - \\ &- a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, j, p, q} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-j, p, \ell} - a_{j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, q, p} - a_{n+1-j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \ell, p} \le 0 \end{aligned} \tag{17}$$

при нечетном n, где ℓ, p, q – попарно различные индексы, $1 \le j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \le \ell < q \le n$, $1 \le p \le n$.

Доказательство. Подмножества $I^\sigma_{1,r}$, $r = 1, 2, 3, 4$, вида (2), определяемые любой подстановкой σ, в силу свойства (i) являются разбиением множества $N_{1,n}$ при четном n и множества $N_{1,n} \backslash \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ при нечетном n. Таким образом, подмножества $I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}$, $r, s = 1, 2, 3, 4$, при четном n и дополнительно подмножества $I^\sigma_{1,r} \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $r = 1, 2, 3, 4$, при нечетном n являются разбиением декартова произведения $N_{1,n} \times N_{1,n}$. В силу этого с учетом равенства $f_A(\sigma) = f_A(\sigma; N_{1,n} \times N_{1,n})$ имеем

$$f_A(\sigma) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{4} \sum_{s=1}^{4} f_A\left(\sigma; I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right), \text{ если } n \text{ четное}, \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{4} \sum_{s=1}^{4} f_A\left(\sigma; I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right) + \sum_{r=1}^{4}\left(f_A\left(\sigma; I^\sigma_{1,r} \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + f_A\left(\sigma; \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I^\sigma_{1,r}\right)\right), \text{ если } n \text{ нечетное}. \end{cases} \tag{18}$$

Для пары подстановок σ, $\sigma_\psi = \sigma \circ \psi_\sigma$ и подмножеств $I^\sigma_{1,r}$, $I^\sigma_{1,s}$, $r, s = 3, 4$, из равенств (5) и формулы (7) следуют соотношения $\sigma_\psi(i) = \sigma(\psi_\sigma(i)) = \sigma(i)$, $i \in I^\sigma_{1,3} \cup I^\sigma_{1,4}$, при четном n и дополнительно соотношения $\sigma_\psi\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ при нечетном n. Таким образом, для указанных подстановок и подмножеств при $r, s = 3, 4$ выполняются равенства

$$f_A\left(\sigma_\psi;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right) - f_A\left(\sigma;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right) = \sum_{i \in I^\sigma_{1,r}} \sum_{j \in I^\sigma_{1,s}} a_{i,\, j,\, \sigma_\psi(i),\, \sigma_\psi(j)} - \sum_{i \in I^\sigma_{1,r}} \sum_{j \in I^\sigma_{1,s}} a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} = 0,$$

$$f_A\left(\sigma_\psi;\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I^\sigma_{1,s}\right) - f_A\left(\sigma;\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I^\sigma_{1,s}\right) = \sum_{i \in I^\sigma_{1,s}} a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, i,\, \sigma_\psi\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma_\psi(i)} - \sum_{i \in I^\sigma_{1,s}} a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, i,\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma(i)} = 0,$$

$$f_A\left(\sigma_\psi;\, I^\sigma_{1,s} \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) - f_A\left(\sigma;\, I^\sigma_{1,s} \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = \sum_{i \in I^\sigma_{1,s}} a_{i,\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, \sigma_\psi\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma_\psi(i)} - \sum_{i \in I^\sigma_{1,s}} a_{i,\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma(i)} = 0.$$

Из данных равенств и формулы (18) следует, что приращение функционала (1) на паре подстановок σ, σ_ψ при четном n представимо в виде суммы

$$\Delta f_A(\sigma,\, \sigma_\psi) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \left(f_A\left(\sigma_\psi;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right) - f_A\left(\sigma;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=3}^{4} \left(f_A\left(\sigma_\psi;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right) - f_A\left(\sigma;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{r=3}^{4} \sum_{s=1}^{2} \left(f_A\left(\sigma_\psi;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right) - f_A\left(\sigma;\, I^\sigma_{1,r} \times I^\sigma_{1,s}\right)\right). \tag{19}$$

При нечетном n эта сумма дополняется слагаемыми

$$\sum_{s=1}^{2} \left(\left(f_A\left(\sigma_\psi;\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I^\sigma_{1,s}\right) - f_A\left(\sigma;\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I^\sigma_{1,s}\right)\right) + \left(f_A\left(\sigma_\psi;\, I^\sigma_{1,s} \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) - f_A\left(\sigma;\, I^\sigma_{1,s} \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)\right)\right).$$

С помощью равенства (13) выписываем в явном виде частичные суммы правой части равенства (19). Далее, используя взаимосвязь подмножеств $I^\sigma_{1,r}$ и $I^\sigma_{1,s}$, определяемую формулами (2), а также равенства (5) и группируя слагаемые с одинаковыми знаками, получаем выражение приращения $\Delta f_A(\sigma,\, \sigma_\psi)$ функционала при четном n в виде следующих двойных сумм:

$$\sum_{i \in I^\sigma_{1,1}} \sum_{j \in I^\sigma_{1,1}} \Big(a_{i,\, j,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(n+1-j)} + a_{i,\, n+1-j,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(j)} +$$
$$+ a_{n+1-i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i,\, n+1-j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} - a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} -$$
$$- a_{i,\, n+1-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i,\, j,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(j)} - a_{n+1-i,\, n+1-j,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(n+1-j)} \Big), \tag{20}$$

$$\sum_{i \in I^\sigma_{1,1}} \sum_{k \in I^\sigma_{1,3}} \Big(a_{i,\, k,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(k)} + a_{i,\, n+1-k,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(n+1-k)} +$$
$$+ a_{n+1-i,\, k,\, \sigma(i),\, \sigma(k)} + a_{n+1-i,\, n+1-k,\, \sigma(i),\, \sigma(n+1-k)} - a_{i,\, k,\, \sigma(i),\, \sigma(k)} -$$
$$- a_{i,\, n+1-k,\, \sigma(i),\, \sigma(n+1-k)} - a_{n+1-i,\, k,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(k)} - a_{n+1-i,\, n+1-k,\, \sigma(n+1-i),\, \sigma(n+1-k)} \Big), \tag{21}$$

$$\sum_{k \in I^\sigma_{1,3}} \sum_{i \in I^\sigma_{1,1}} \Big(a_{k,\, i,\, \sigma(k),\, \sigma(n+1-i)} + a_{k,\, n+1-i,\, \sigma(k),\, \sigma(i)} +$$
$$+ a_{n+1-k,\, i,\, \sigma(n+1-k),\, \sigma(n+1-i)} + a_{n+1-k,\, n+1-i,\, \sigma(n+1-k),\, \sigma(i)} - a_{k,\, i,\, \sigma(k),\, \sigma(i)} -$$
$$- a_{k,\, n+1-i,\, \sigma(k),\, \sigma(n+1-i)} - a_{n+1-k,\, i,\, \sigma(n+1-k),\, \sigma(i)} - a_{n+1-k,\, n+1-i,\, \sigma(n+1-k),\, \sigma(n+1-i)} \Big). \tag{22}$$

При нечетном n к указанным суммам добавляется сумма вида

$$\sum_{j \in I_{1,1}^{\sigma}} \Bigg(a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, j, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n+1-j)} + a_{j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n+1-j), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-j, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(j)} +$$
$$+ a_{n+1-j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(j), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, j, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(j)} - a_{j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(j), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} -$$
$$- a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-j, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-j, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n+1-j), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)}. \tag{23}$$

Слагаемые сумм (20)–(23), стоящие в скобках, далее называются общими членами.

Полагая, что $m = \sigma(n+1-i)$, $\ell = \sigma(n+1-j)$, $p = \sigma(i)$, $q = \sigma(j)$, нетрудно убедиться в том, что общий член суммы (20) совпадает с левой частью неравенства (14) из условий леммы 3. Действительно, в силу определения $I_{1,1}^{\sigma}$ для четверки m, ℓ, p, q справедливы соотношения $1 \le i,\ j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $1 \le m < p \le n$, $1 \le \ell < q \le n$, которые гарантируют выполнение неравенства (14), что влечет неположительность общего члена суммы (20) и, следовательно, всей этой суммы.

Полагая, что $m = \sigma(n+1-i)$, $\ell = \sigma(k)$, $p = \sigma(i)$, $q = \sigma(n+1-k)$, убеждаемся в том, что общие члены сумм (21) и (22) совпадают с левыми частями неравенств (15) и (16) соответственно. Так как в силу подмножеств (2) для $i \in I_{1,1}^{\sigma}$ и $k \in I_{1,2}^{\sigma}$ справедливы соотношения $1 \le i, k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, а элементы введенной четверки m, ℓ, p, q попарно различны, то для них гарантируется выполнение неравенств (15) и (16). Следовательно, общие члены сумм (21) и (22) не превосходят нуля, что влечет неположительность этих сумм. Доказана справедливость леммы 3 при четном n.

Для завершения доказательства леммы 3 достаточно убедиться в неположительности суммы (23). Из подмножеств (2) следует, что для произвольного $i \in I_{1,1}^{\sigma}$ справедливы соотношения $1 \le j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $\sigma(j) >$ $> \sigma(n+1-j)$. Полагая, что $\ell = \sigma(n+1-j)$, $q = \sigma(j)$, $p = \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$, убеждаемся в том, что общий член суммы (23) совпадает с левой частью неравенства (17), выполнение которого обеспечивают соотношения $1 \le j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \le \ell < q \le n$, $1 \le p \le n$ и попарное различие индексов ℓ, p, q. Следовательно, общий член суммы (23) не превосходит нуля, что гарантирует неположительность этой суммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любой пары подстановок* σ, σ_{φ} *приращение* $\Delta f_A(\sigma, \sigma_{\varphi}) \le 0$ *неположительно, если элементы матрицы* $A = \left(a_{i,j,k,\ell}\right)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$a_{i,j,q,p} + a_{i,n+2-j,q,m} + a_{n+2-i,j,\ell,p} + a_{n+2-i,n+2-j,\ell,m} -$$
$$- a_{i,j,\ell,m} - a_{i,n+2-j,\ell,p} - a_{n+2-i,j,q,m} - a_{n+2-i,n+2-j,q,p} \le 0 \tag{24}$$

при нечетном n, где $2 \le i,\ j \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $1 \le m < p \le n$, $1 \le \ell < q \le n$,

$$a_{i,j,p,q} + a_{i,n+2-j,p,\ell} + a_{n+2-i,j,m,q} + a_{n+2-i,n+2-j,m,\ell} -$$
$$- a_{i,j,m,q} - a_{i,n+2-j,m,\ell} - a_{n+2-i,j,p,q} - a_{n+2-i,n+2-j,p,\ell} \le 0, \tag{25}$$

$$a_{i,j,q,p} + a_{i,n+2-j,q,m} + a_{n+2-i,j,\ell,p} + a_{n+2-i,n+2-j,\ell,m} -$$
$$- a_{i,j,q,m} - a_{i,n+2-j,q,p} - a_{n+2-i,j,\ell,m} - a_{n+2-i,n+2-j,\ell,p} \le 0, \tag{26}$$

$$a_{1,j,\ell,p} + a_{1,n+2-j,\ell,m} + a_{j,1,p,\ell} + a_{n+2-j,1,p,\ell} -$$
$$- a_{1,j,\ell,m} - a_{1,n+2-j,\ell,p} - a_{j,1,m,\ell} - a_{n+2-j,1,m,\ell} \le 0 \tag{27}$$

при нечетном n, где m, ℓ, p, q – попарно различные индексы, $2 \le i,\ j \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $1 \le m < p \le n$, $1 \le \ell < q \le n$, *и дополнительно неравенствам*

$$a_{\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, j,\, \ell,\, p} + a_{\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, n+2-j,\, \ell,\, m} + a_{j,\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, p,\, \ell} + a_{n+2-j,\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, m,\, \ell} -$$
$$- a_{\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, j,\, \ell,\, m} - a_{\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, n+2-j,\, \ell,\, p} - a_{j,\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, m,\, \ell} - a_{n+2-j,\left\lceil \frac{n+1}{2}\right\rceil,\, p,\, \ell} \le 0 \qquad (28)$$

при четном n, где m, ℓ, p – попарно различные индексы, $2 \le j \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $1 \le m < p \le n$, $1 \le \ell \le n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подмножества $I_{2,r}^{\sigma}$, $r = 1, 2, 3, 4$, вида (3), определяемые подстановкой σ, в силу свойства (ii) являются разбиением множества $N_{2,n}$ при нечетном n и множества $N_{2,n} \backslash \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ при четном n. Таким образом, декартовы произведения этих подмножеств $I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}$, $1 \times I_{2,r}^{\sigma}$, $I_{2,r}^{\sigma} \times 1$, $r, s = 1, 2, 3, 4$, при нечетном n и дополнительно декартовы произведения $I_{2,r}^{\sigma} \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$, $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \times I_{2,r}^{\sigma}$, $r = 1, 2, 3, 4$, при четном n являются разбиением $N_{1,n} \times N_{1,n}$. Следовательно, для произвольной подстановки $\sigma \in S_n$ частичная сумма $f_A\left(\sigma;\, N_{1,n} \times N_{1,n}\right)$, равная значению функционала $f_A(\sigma)$, при нечетном n представима в виде суммы

$$f_A(\sigma) = \sum_{r=1}^{4} \sum_{s=1}^{4} f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right) + \sum_{r=1}^{4} \left(f_A\left(\sigma;\, 1 \times I_{2,r}^{\sigma}\right) + f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times 1\right)\right). \qquad (29)$$

При четном n эта сумма дополняется слагаемыми

$$\sum_{r=1}^{4} \left(f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) + f_A\left(\sigma;\, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \times I_{2,r}^{\sigma}\right)\right). \qquad (30)$$

Для пары подстановок σ, σ_{φ} и подмножеств $I_{2,r}^{\sigma}$, $I_{2,s}^{\sigma}$, $r, s = 3, 4$, в силу формул (3) и равенств (6) выполняются соотношения $\sigma_{\varphi}(i) = \sigma\left(\varphi_{\sigma}(i)\right) = \sigma(i)$ для любых $i \in I_{2,3}^{\sigma} \cup I_{2,4}^{\sigma}$ при нечетном n и дополнительно соотношения $\sigma_{\varphi}\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right)$ при четном n. Из приведенных соотношений и формул (29) и (30) вытекает, что при $r, s = 3, 4$ справедливы равенства

$$\sum_{r=3}^{4} \sum_{s=3}^{4} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right)\right) = 0,$$

$$\sum_{r=3}^{4} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, 1 \times I_{2,r}^{\sigma}\right) + f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,r}^{\sigma} \times 1\right) - f_A\left(\sigma;\, 1 \times I_{2,r}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times 1\right)\right) = 0,$$

$$\sum_{r=3}^{4} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \times I_{2,r}^{\sigma}\right) + f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,r}^{\sigma} \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) - \right.$$
$$\left. - f_A\left(\sigma;\, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \times I_{2,r}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right)\right) = 0.$$

Из полученных равенств следует, что при нечетном n приращение функционала (1), определяемое равенствами (29) и (30), на паре подстановок σ, σ_{φ} представимо в виде суммы

$$\Delta f_A\left(\sigma;\, \sigma_{\varphi}\right) = \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=3}^{4} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right)\right) + \sum_{r=3}^{4} \sum_{s=1}^{2} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,r}^{\sigma} \times I_{2,s}^{\sigma}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{2} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, 1 \times I_{2,s}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma;\, 1 \times I_{2,s}^{\sigma}\right)\right) + \sum_{s=1}^{2} \left(f_A\left(\sigma_{\varphi};\, I_{2,s}^{\sigma} \times 1\right) - f_A\left(\sigma;\, I_{2,s}^{\sigma} \times 1\right)\right). \qquad (31)$$

При четном n эта сумма дополняется суммой следующего вида:

$$\sum_{s=1}^{2}\left(\left(f_A\left(\sigma_\varphi; \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil \times I_{2,s}^{\sigma}\right) - f_A\left(\sigma; \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil \times I_{2,s}^{\sigma}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\left(f_A\left(\sigma_\varphi; I_{2,s}^{\sigma} \times \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\right)\right) - f_A\left(\sigma; I_{2,s}^{\sigma} \times \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\right)\right)\right). \quad (32)$$

Далее доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 3. Вначале с помощью равенства (13) выписываем в явном виде разности частичных сумм, входящих в формулы (31) и (32). Затем, используя взаимосвязь подмножеств $I_{2,r}^{\sigma}$ и $I_{2,s}^{\sigma}$, $s \neq r$, определяемую равенствами (6), и группируя слагаемые с одинаковыми знаками, получаем выражение приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\varphi)$ в виде суммы двойных сумм. Общие члены таких двойных сумм совпадают с левыми частями неравенств (24)–(28), а индексы элементов соответствующих матриц удовлетворяют соотношениям, гарантирующим выполнение указанных неравенств. Доказана неположительность всех общих членов и, соответственно, двойных сумм, определяющих приращение функционала (1) на паре подстановок σ, σ_φ. Лемма 4 доказана.

Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает следующий основной результат.

Теорема. *Подстановка* $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \ldots, n, \ldots, 6, 4, 2\rangle$ *минимизирует функционал квадратичной задачи выбора* $f_A(\sigma)$ *на симметрической группе* S_n*, если элементы матрицы* $A = \left(a_{i,j,k,\ell}\right)$ *удовлетворяют неравенствам (14)–(17) и (24)–(28).*

Выделенные условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора обобщают все ранее полученные условия достижения на подстановке σ_0 минимума квадратичной и билинейной форм, а также функционала квадратичной задачи о назначениях, которые приведены в работах [5–10].

Заключение

В работе продолжено исследование строго разрешимых случаев оптимизационных задач на подстановках. В частности, для квадратичной задачи выбора в виде системы неравенств описаны условия, обеспечивающие достижение минимума ее функционала на заданной подстановке, которая впервые была приведена в теореме о перестановке трех систем. Предложенные условия обобщают на сегодняшний день аналогичные результаты, связанные с теоремой о перестановке трех систем.

Библиографические ссылки

1. Харди ГХ, Литлвуд ДжИ, Полиа Г. *Неравенства.* Левин ВИ, переводчик. Москва: Государственное издательство иностранной литературы; 1948. 456 с.

2. Тимофеев ББ, Литвинов ВА. К вопросу об организации размещения массивов информации в памяти на магнитных лентах. *Кибернетика.* 1969;4:56–61.

3. Pratt VR. An $N \log N$ algorithm to distribute N records optimally in a sequential access file. In: Miller RE, Thatcher JW, editors. *Complexity of computer computations. Proceedings of a symposium on the complexity of computer computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department.* New York: Plenum Press; 1972. p. 111–118 (The IBM research symposia series). DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2_11.

4. Lawler EL. The quadratic assignment problem: a brief review. In: Roy B, editor. *Combinatorial programming: methods and applications. Proceedings of the NATO advanced study institute held at the Palais des Congrès, Versailles, France, 2–13 September, 1974.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company; 1975. p. 351–360 (NATO advanced study institutes series. Series C, Mathematical and physical sciences; volume 19). DOI: 10.1007/978-94-011-7557-9_20.

5. Vickson RG, Lu Xinjian. Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European Journal of Operational Research.* 1998;105(1):18–28. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00023-4.

6. Woeginger GJ. Computational problems without computation. *Nieuw Archief voor Wiskunde. Vijfde Serie*. 2003;4(2):140–147.

7. Demidenko VM, Finke G, Gordon VS. Well solvable cases of the quadratic assignment problem with monotone and bimonotone matrices. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms.* 2006;5(2):167–187. DOI: 10.1007/s10852-005-9013-2.

8. Demidenko VM. Quadratic assignment problem with additively monotone matrices and incomplete anti-Monge matrices: conditions for effective solvability. *Discrete Mathematics and Applications.* 2007;17(2):105–133. DOI: 10.1515/dma.2007.011.

9. Демиденко ВМ, Долгий А. Эффективно разрешимые случаи квадратичной задачи о назначениях с обобщенно монотонными и неполными матрицами анти-Монжа. *Кибернетика и системный анализ.* 2007;1:135–151.

10. Burkard RE, Çela E, Rote G, Woeginger GJ. The quadratic assignment problem with a monotone anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Mathematical Programming.* 1998;82:125–158. DOI: 10.1007/BF01585868.

11. Çela E. Assignment problems. In: Pardalos PM, Resende MGC, editors. *Handbook of applied optimization.* Oxford: Oxford University Press; 2002. p. 661–678.

12. Burkard R, Dell'Amico M, Martello S. *Assignment problems: revised reprint.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. XXII, 393 p. (Other titles in applied mathematics). DOI: 10.1137/1.9781611972238.

References

1. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press; 1934. XII, 314 p.

Russian edition: Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Neravenstva.* Levin VI, translator. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoi literatury; 1948. 456 p.

2. Timofeev BB, Litvinov VA. [On the problem of organizing the disposition of information files on magnetic tapes]. *Kibernetika.* 1969;4:56–61. Russian.

3. Pratt VR. An $N\log N$ algorithm to distribute N records optimally in a sequential access file. In: Miller RE, Thatcher JW, editors. *Complexity of computer computations. Proceedings of a symposium on the complexity of computer computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department.* New York: Plenum Press; 1972. p. 111–118 (The IBM research symposia series). DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2_11.

4. Lawler EL. The quadratic assignment problem: a brief review. In: Roy B, editor. *Combinatorial programming: methods and applications. Proceedings of the NATO advanced study institute held at the Palais des Congrès, Versailles, France, 2–13 September, 1974.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company; 1975. p. 351–360 (NATO advanced study institutes series. Series C, Mathematical and physical sciences; volume 19). DOI: 10.1007/978-94-011-7557-9_20.

5. Vickson RG, Lu Xinjian. Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European Journal of Operational Research.* 1998;105(1):18–28. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00023-4.

6. Woeginger GJ. Computational problems without computation. *Nieuw Archief voor Wiskunde. Vijfde Serie*. 2003;4(2):140–147.

7. Demidenko VM, Finke G, Gordon VS. Well solvable cases of the quadratic assignment problem with monotone and bimonotone matrices. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms.* 2006;5(2):167–187. DOI: 10.1007/s10852-005-9013-2.

8. Demidenko VM. Quadratic assignment problem with additively monotone matrices and incomplete anti-Monge matrices: conditions for effective solvability. *Discrete Mathematics and Applications.* 2007;17(2):105–133. DOI: 10.1515/dma.2007.011.

9. Demidenko VM, Dolgiy A. [Efficiently solvable cases of a quadratic assignment problem with generalized monotonic and incomplete anti-Monge matrices]. *Kibernetika i sistemnyi analiz.* 2007;1:135–151. Russian.

10. Burkard RE, Çela E, Rote G, Woeginger GJ. The quadratic assignment problem with a monotone anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Mathematical Programming.* 1998;82:125–158. DOI: 10.1007/BF01585868.

11. Çela E. Assignment problems. In: Pardalos PM, Resende MGC, editors. *Handbook of applied optimization.* Oxford: Oxford University Press; 2002. p. 661–678.

12. Burkard R, Dell'Amico M, Martello S. *Assignment problems: revised reprint.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. XXII, 393 p. (Other titles in applied mathematics). DOI: 10.1137/1.9781611972238.

Получена 03.01.2024 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 03.01.2024 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.