УДК 514.752.23

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ КВАДРИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

***В. В. ЛЫСЕНКО*[1], *В. Л. ТИМОХОВИЧ*[1]**

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Отмечено, что при исследовании локальных свойств пространственной кривой часто используются сопутствующие объекты, имеющие достаточно высокие аппроксимационные свойства. Важнейшие из них – соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся сфера. Известно, что соприкасающаяся плоскость имеет с кривой касание порядка не ниже второго, а соприкасающаяся сфера – не ниже третьего. Решается задача нахождения поверхности второго порядка (соприкасающейся квадрики), имеющей с кривой касание порядка не ниже шестого. Доказано, что соприкасающаяся квадрика существует, и описана методика ее построения. Указано, что возможно получение соприкасающейся квадрики любого из основных типов поверхностей второго порядка.

Ключевые слова: пространственная кривая; соприкасающаяся сфера; соприкасающаяся квадрика.

OSCULATING QUADRIC OF THE SPATIAL CURVE

***V. V. LYSENKO*[a], *V. L. TIMOKHOVICH*[a]**

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*
Corresponding author: valery.sholomitskaya@gmail.com

In the investigation of local properties of a space curve assotiated objects which have good approximation characteristics are often used. The main ones – the osculating plane and the osculating sphere. As known, the osculating plane has tangency of at least 2nd degree with the curve, while the osculating sphere – at least 3rd degree. In the paper a problem of

Образец цитирования:
Лысенко В. В., Тимохович В. Л. Соприкасающаяся квадрика пространственной кривой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 11–15.

For citation:
Lysenko V. V., Timokhovich V. L. Osculating quadric of the spatial curve. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 11–15 (in Russ.).

Авторы:
Валерия Владимировна Лысенко – студентка механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.
Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методов преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:
Valery Lysenko, student at the faculty of mechanics and mathematics.
valery.sholomitskaya@gmail.com
Vladimir Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

finding of 2^{nd} degree surface (the osculating quadric) which has tangency of at least 6^{th} degree is considered. It is proved the osculating quadric exists and a method of its construction is described. Also existence of osculating quadric of any basic type of 2^{nd} degree surface is pointed out.

Key words: space curve; osculating sphere; osculating quadric.

Рассмотрим гладкую кривую γ в трехмерном евклидовом пространстве E^3, заданную натуральной параметризацией $\bar{\rho}(s)$, $s \in (-\varepsilon; \varepsilon)$. Будем считать, что $\bar{\rho}(s_1) \neq \bar{\rho}(s_2)$ при $s_1 \neq s_2$, а в точке $\rho_0 = \rho(0)$ кривизна κ и кручение $\varkappa$ отличны от нуля и репер Френе $\{\rho; \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ совпадает с фиксированным репером $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ (здесь и далее $\rho(s)$ – точка с радиус-вектором $\bar{\rho}(s)$).

Пусть $\mathcal{L}$ – некоторая фигура в E^3 (кривая или поверхность), содержащая точку ρ_0. Скажем, что $\mathcal{L}$ имеет с кривой γ в точке ρ_0 соприкосновение порядка не ниже n-го, если $\dfrac{\delta(s)}{s^{n+1}}$ ограничено при $s \to 0$, где $\delta(s)$ – расстояние от точки $\rho(s)$ до $\mathcal{L}$.

В любом, достаточно подробном курсе классической дифференциальной геометрии [1; 2] доказывается, что порядок соприкосновения касательной прямой с γ в точке ρ_0 не ниже первого, соприкасающихся плоскости и окружности – не ниже второго, соприкасающейся сферы – не ниже третьего порядка. В настоящей работе доказывается существование поверхности второго порядка (квадрики), имеющей с γ в точке ρ_0 соприкосновение не ниже шестого порядка. Начнем с предварительных рассмотрений.

Пусть $\mathcal{L}$ – квадрика, содержащая точку ρ_0, заданная (в репере $\{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$) уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz \;\text{ и }\; G^2 + H^2 + I^2 \neq 0.$$

Фиксируем вектор $\bar{n} = (G, H, I)$. Отметим, что $\bar{n}$ ортогонален $\mathcal{L}$ в точке ρ_0, поскольку $\bar{n} = \dfrac{1}{2}\nabla\Phi(0, 0, 0)$, где $\nabla\Phi(0, 0, 0)$ – вектор-градиент для Φ в точке ρ_0. Через точку $\rho(s)$ на кривой γ проведем прямую $\Delta(s)$ с направляющим вектором $\bar{n}$. При достаточно малом s $\Delta(s)$ пересекает $\mathcal{L}$ в некоторой точке $p(s)$ и

$$\bar{p}(s) = \bar{\rho}(s) + \lambda(s)\bar{n},$$

где $\lambda(s)$ – некоторый переменный коэффициент и $\lambda(s) \to 0$ при $s \to 0$. Очевидно, что $\delta(s)$ (расстояние от $\rho(s)$ до $\mathcal{L}$) и $\lambda(s)$ – бесконечно малые (при $s \to 0$) одного и того же порядка.

Пусть $\rho(s) = (u(s), v(s), w(s))$. Тогда $p(s) = (u(s) + \lambda(s)G, v(s) + \lambda(s)H, w(s) + \lambda(s)I)$. Подставляя координаты $p(s)$ в уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ и преобразуя полученное тождество, приходим к следующему соотношению, имеющему вид квадратного уравнения относительно λ:

$$\begin{gathered}\lambda^2\left(AG^2 + BH^2 + CI^2 + 2DGH + 2EGI + 2FHI\right) + \\ + 2\lambda\left[(AG + DH + EI)u + (BH + DG + FI)v + (CI + EG + FH)w + G^2 + H^2 + I^2\right] + \\ + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw + 2Gu + 2Hv + 2Iw = 0\end{gathered} \tag{1}$$

(здесь и далее при возможности опускаем аргумент s).

Положим

$$\Phi(x, y, z) = \Psi(x, y, z) + L(x, y, z),$$

где $\Psi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ – квадратичная часть; $L(x, y, z) = 2Gx + 2Hy + 2Iz$ – линейная часть; $l(x, y, z) = (AG + DH + EI)x + (BH + DG + FI)y + (CI + EG + FH)z$. Тогда (1) получает более простой вид:

$$\Psi(\bar{n})\lambda^2 + 2\left[\bar{n}^2 + l(u, v, w)\right]\lambda + \Phi(u, v, w) = 0. \tag{2}$$

При $s = 0$ (при этом $u = v = w = 0$) уравнение (2) принимает вид

$$\Psi(\bar{n})\lambda^2 + 2\bar{n}^2\lambda = 0. \tag{3}$$

Если $\Psi(\overline{n}) = 0$, то (2) имеет единственное решение

$$\lambda = -\frac{\Phi(u, v, w)}{2\left[\overline{n}^2 + l(u, v, w)\right]}$$

(прямая $\Delta(s)$ пересекает $\mathcal{L}$ в одной точке) и порядок малости λ тот же, что и у $\Phi(u, v, w)$.

Если же $\Psi(\overline{n}) \neq 0$, то корни (3) есть $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\dfrac{2\overline{n}^2}{\Psi(\overline{n})} \neq 0$. Но тогда, поскольку корни $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ квадратного уравнения (2) обращаются при $s = 0$ в корни λ_1 и λ_2 уравнения (3), порядок малости $\lambda_1(s)$ (очевидно, именно его следует выбрать) тот же, что и у произведения $\lambda_1(s)\,\lambda_2(s) = \dfrac{\Phi(u, v, w)}{\Psi(\overline{n})}$, которое, в свою очередь, того же порядка малости, что и $\Phi(u, v, w)$.

Итак, в обоих случаях приходим к задаче отыскания коэффициентов A, B, C, D, E, F, G, H, I, при которых функция $\Phi(u, v, w)$ является бесконечно малой (при $s \to 0$) наивысшего возможного порядка.

Разложим $\overline{\rho}(s)$ по формуле Тейлора. Учитывая, что $\overline{\rho}(0) = \overline{0}$,

$$\overline{\rho}(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{s^n}{n!} \overline{\rho}^{(n)}(0) + s^{m+1} \overline{g}(s) \tag{4}$$

(m достаточно велико, $\overline{g}(s) = \big(g_1(s),\ g_2(s),\ g_3(s)\big)$, и функция $\left|\overline{g}(s)\right|$ ограничена при $s \to 0$).

Пусть

$$\overline{\rho}^{(n)} = a_n \overline{\tau} + b_n \overline{\nu} + c_n \overline{\beta} \tag{5}$$

(a_n, b_n, c_n – функции параметра s). Применяя формулы Френе ($\dot{\overline{\tau}} = \kappa\overline{\nu}$, $\dot{\overline{\nu}} = -\kappa\overline{\tau} + \varkappa\overline{\beta}$, $\dot{\overline{\beta}} = -\varkappa\overline{\nu}$), находим

$$\begin{cases} \dot{\overline{\rho}} = \overline{\tau}, \\ \ddot{\overline{\rho}} = \kappa\overline{\nu}, \\ \dddot{\overline{\rho}} = -\kappa^2\overline{\tau} + \dot{\kappa}\overline{\nu} + \kappa\varkappa\overline{\beta}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 0, \\ c_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 0, \\ b_2 = \kappa, \\ c_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = -\kappa^2, \\ b_3 = \dot{\kappa}, \\ c_3 = \kappa\varkappa. \end{cases} \tag{6}$$

Далее, $\overline{\rho}^{(n+1)} = \left(a_n\overline{\tau} + b_n\overline{\nu} + c_n\overline{\beta}\right)^{\dot{}} = \left(\dot{a}_n - \kappa b_n\right)\overline{\tau} + \left(\dot{b}_n - \kappa a_n - \varkappa c_n\right)\overline{\nu} + \left(\dot{c}_n - \varkappa b_n\right)\overline{\beta}$ и таким образом получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dot{a}_n - \kappa b_n, \\ b_{n+1} = \dot{b}_n + \kappa a_n - \varkappa c_n, \\ c_{n+1} = \dot{c}_n + \varkappa b_n. \end{cases} \tag{7}$$

Учитывая (5), (6) и совпадение при $s = 0$ репера Френе с репером $\left\{0;\, \overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\right\}$, перепишем (4) покоординатно:

$$\begin{cases} u(s) = s + \displaystyle\sum_{n=3}^{m} \frac{a_n}{n!} s^n + g_1(s) s^{m+1}, \\ v(s) = \dfrac{k}{2} s^2 + \displaystyle\sum_{n=3}^{m} \frac{b_n}{n!} s^n + g_2(s) s^{m+1}, \\ w(s) = \displaystyle\sum_{n=3}^{m} \frac{c_n}{n!} s^n + g_3(s) s^{m+1} \end{cases} \tag{8}$$

(здесь и далее a_n, b_n, c_n при $s = 0$). Подставим выражения (8) в $\Phi(u, v, w)$. При этом положим $G = 0$ (иначе $\Phi(u, v, w)$ – бесконечно малая того же порядка, что и s). Преобразуя полученное, приходим к представлению вида

$$\Phi(u, v, w) = \left(m_{11}A + m_{12}D + m_{13}E + m_{14}F + m_{15}C + m_{16}B + m_{17}I + m_{18}H\right)s^2 +$$
$$+ \left(m_{21}A + m_{22}D + m_{23}E + m_{24}F + m_{25}C + m_{26}B + m_{27}I + m_{28}H\right)s^3 + \ldots$$
$$\ldots + \left(m_{51}A + m_{52}D + m_{53}E + m_{54}F + m_{55}C + m_{56}B + m_{57}I + m_{58}H\right)s^6 + \ldots,$$

где величины m_{ij} выражаются через a_n, b_n, c_n (считаем, в (4) $m \geq 6$). Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях s со второй по шестую, получаем систему линейных уравнений, которая дает возможность выразить A, D, E, F, C через B, H, I и имеет вид (векторно-матричный)

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} A \\ D \\ E \\ F \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{18}H \\ -m_{27}I - m_{28}H \\ -m_{36}B - m_{37}I - m_{38}H \\ -m_{46}B - m_{47}I - m_{48}H \\ -m_{56}B - m_{57}I - m_{58}H \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} \text{ и } \det\mathrm{M} \neq 0.$$

Действительно, (6) и (7) позволяют вычислить все величины m_{ij}, в частности

$$m_{11} = 1,\ m_{12} = \ldots = m_{17} = 0;\ m_{22} = b_2 = \kappa,\ m_{23} = \ldots = m_{26} = 0;$$

$$m_{33} = \frac{c_3}{3} = \frac{\kappa\varkappa}{3},\ m_{34} = m_{35} = 0;\ m_{44} = \frac{b_2 c_3}{6} = \frac{\kappa^2\varkappa}{6},\ m_{45} = 0;\ m_{55} = \frac{c_3^2}{36} = \frac{(\kappa\varkappa)^2}{36},$$

и, следовательно,

$$\det\mathrm{M} = m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}m_{55} = \frac{\kappa^6\varkappa^4}{648} \neq 0.$$

Отметим, что, поскольку $m_{18} = b_2 = k$ и $m_{27} = \frac{c_3}{3} = \frac{\kappa\varkappa}{3}$, правый столбец в (9) ненулевой и, следовательно, в силу невырожденности матрицы М левый столбец тоже ненулевой, т. е. $\Phi(x, y, z)$ имеет нетривиальные (ненулевые) квадратичную $\Psi(x, y, z)$ и линейную $L(x, y, z)$ части.

Все вышерассмотренное позволяет сформулировать следующее.

Теорема. *Существует содержащая точку* ρ_0 *квадрика, имеющая с кривой* γ *в точке* ρ_0 *соприкосновение порядка не ниже шестого.*

Замечание. Описанная здесь квадрика достаточно вариативна. Уже для винтовой линии с $\kappa = \varkappa = 1$, осуществляя на компьютере различные наборы констант B, I, H, можно получить эллипсоид, эллиптический и гиперболический параболоиды, однополостный и двуполостный гиперболоиды, а также конус. Отметим также, что если попытаться повысить порядок соприкосновения, формируя систему, аналогичную (9), но состоящую уже из шести уравнений (полагая в (4) $m \geq 7$), то условие $\det\mathrm{M} \neq 0$ определит некоторую взаимосвязь между значениями кривизны κ, кручения $\varkappa$ и их производных при $s = 0$ (т. е. κ и $\varkappa$ перестанут быть независимыми).

Библиографические ссылки

1. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. М. ; Л., 1949.
2. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии. М., 1952.

References

1. Vygodsky M. Y. Differentsial'naya geometriya [Differential geometry]. Moscow ; Leningrad, 1949 (in Russ.).
2. Finikov S. P. Kurs differentsial'noi geometrii [Course of differential geometry]. Moscow, 1952 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 05.11.2015.
Received by editorial board 05.11.2015.