# Теория вероятностей и математическая статистика

# Theory of probability and mathematical statistics

УДК 519.2

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

***М. К. ЖУРАК***[1]***, Ю. С. ХАРИН***[1]

[1]*Учреждение БГУ «Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики», пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Построена новая, биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных, которая является многомерной неоднородной марковской цепью с конечным пространством состояний. Использован метод максимального правдоподобия для статистического оценивания параметров модели. Доказано, что построенные оценки являются состоятельными и асимптотически нормально распределенными. Вычислена информационная матрица Фишера, которая имеет блочно-диагональный вид и является невырожденной. Результаты анализа асимптотических свойств оценок максимального правдоподобия использованы при построении статистики для статистической проверки гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели. Построено решающее правило для статистической проверки гипотез и получено асимптотическое выражение мощности теста для семейства контигуальных альтернатив. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных для анализа эффективности построенного решающего правила. Представлены графики зависимостей экспериментальных и теоретических оценок вероятности ошибки первого рода и мощности теста от длительности наблюдений, иллюстрирующие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

***Ключевые слова:*** пространственно-временные данные; векторная цепь Маркова; оценки максимального правдоподобия; проверка гипотез.

**Образец цитирования:**
Журак М. К., Харин Ю. С. Статистическая проверка гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 16–22.

**For citation:**
Zhurak M. K., Kharin Y. S. Statistical hypotheses testing for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 16–22 (in Russ.).

**Авторы:**
***Марина Константиновна Журак*** – младший научный сотрудник.
***Юрий Семенович Харин*** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; директор.

**Authors:**
***Marina Zhurak***, junior scientific researcher.
*mzhurak@gmail.com*
***Yuriy Kharin***, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (physics and mathematics), full professor; director.
*kharin@bsu.by*

# STATISTICAL HYPOTHESES TESTING FOR PARAMETERS OF BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA

*M. K. ZHURAK*[a], *Y. S. KHARIN*[a]

[a]*Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

*Corresponding author: kharin@bsu.by*

This paper is devoted to new binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data. This model is multidimensional non-homogeneous Markov chain with a finite state space. We use the maximum likelihood method for statistical estimation of the model parameters. We show that these estimators are consistent and asymptotically normally distributed. Fisher information matrix is calculated; it takes block-diagonal form and is nonsingular. The results of the analysis of the asymptotic properties of the maximum likelihood estimators are used to construct a statistic for statistical testing of hypotheses about the values of the parameters of the binomial conditional autoregressive model. Decision rule for statistical hypotheses testing is built and an asymptotic expression of the power of the test is obtained for a family of contiguous alternatives. Experiments have been conducted on simulated data to evaluate performance of the constructed decision rule. Plots of experimental and theoretical estimates of the first type error probability and power of the test in dependence on the length of the observation period are presented, they illustrate adequacy of theoretical and experimental results.

***Key words:*** spatio-temporal data; vector Markov chain; maximum likelihood estimator; statistical hypotheses testing.

## Введение

Моделирование и анализ пространственно-временных данных являются актуальной теоретической и прикладной задачей [1–6]. Байесовская пространственно-временная модель применялась для анализа случаев заболевания раком [1]. Байесовская пространственно-временная геостатическая модель [2] использовалась для решения задач при большом объеме данных. В [3] решается задача предсказания скорости ветра на основе пространственно-временных данных. Пуассоновская авторегрессионная модель, которая была применена для анализа финансовых данных фондовых операций, изучена в [4].

В [5] разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и предложен алгоритм вычисления оценок максимального правдоподобия (ОМП). Результаты теоретического анализа свойств построенных ОМП представлены в [6]. В настоящей статье развиваются исследования [5; 6] и решается задача статистической проверки гипотез о параметрах биномиальной условно авторегрессионной модели на основе наблюдаемых пространственно-временных данных.

## Биномиальная условно авторегрессионная модель

Введем обозначения: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – основное вероятностное пространство; $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел; $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел; $\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел; $s \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (далее будем называть их сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; $n$ – число сайтов; $t \in \boldsymbol{Z}$ – дискретное время; $x_{s,t} \in A = \{0, 1, \ldots, N\}$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени $t$ в сайте $s$, принимающая значения из множества $A$; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \le t-1\} \subset F$ – σ-алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \in \boldsymbol{R}^1$, $j = 1, \ldots, m$, – наблюдаемый (известный) набор значений $m$ внешних факторов в момент времени $t$; $L\{\xi\}$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\mathbf{cov}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $\boldsymbol{Bi}(\cdot; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \boldsymbol{N}$, $0 \le p \le 1$ для случайной величины ξ:

$$\mathbf{P}\{\xi = l\} = \boldsymbol{Bi}(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l},\ l \in A,\ L\{\xi\} = \boldsymbol{Bi}(\cdot; N, p), \tag{1}$$

где $C_N^l = (N!/(N-l)!l!)$.

Определим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных данных, следуя [5]. Предполагается, что при фиксированной предыстории $F_{<t} = \{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \le t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$ условно независимы и имеют биномиальный закон распределения вероятностей (1):

$$L\{x_{s,t} | F_{<t}\} = \boldsymbol{Bi}(\cdot; N, p_{s,t}), \tag{2}$$

причем параметр $p_{s,t}$ удовлетворяет соотношению

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,t}, \; s \in S, \; t \in \boldsymbol{Z}, \tag{3}$$

где $a_s = (a_{s,1}, \ldots, a_{s,n})' \in \boldsymbol{R}^n$; $b_s = (b_{s,1}, \ldots, b_{s,m})' \in \boldsymbol{R}^m$; $\theta_s = (a_s', b_s')' \in \boldsymbol{R}^{n+m}$; $s \in S$; $\theta = (\theta_1', \ldots, \theta_n')' \in \boldsymbol{R}^{n(n+m)}$ – составной вектор-столбец параметров модели; штрих обозначает транспонирование.

Справедливо следующее выражение для вычисления вероятности $p_{s,t}$, вытекающее из (3):

$$p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \exp(\theta_s' Y_t)\left(1 + \exp(\theta_s' Y_t)\right)^{-1}, \; s \in S, \, t \in \boldsymbol{Z}, \tag{4}$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \ldots, z_{m,t})' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения $m$ внешних факторов в момент времени $t$; $X_t = (x_{1,t}, \ldots, x_{n,t})' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем $n$ сайтам в момент времени $t \in \boldsymbol{Z}$; $Y_t = (X_{t-1}', Z_t')' \in \boldsymbol{R}^{n+m}$ – составной вектор-столбец «предопределенных» переменных в (4). Обозначим: $L = \left\{ l_j = (l_{1,j}, \ldots, l_{n,j})' \in A^n : j = 1, 2, \ldots, \nu^n \right\}$ – лексикографически упорядоченное множество $\nu = (N+1)^n$ всевозможных значений, которые принимает вектор $X_t : |L| = \nu$.

**Теорема 1** [5]. *Если имеет место модель (2), (3), то наблюдаемый векторный временной ряд* $X_t$ *является конечной неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L и матрицей вероятностей одношаговых переходов* $Q = Q(\theta, t) = (q_{I,J}(\theta, t)) \in [0,1]^{\nu \times \nu}$, $I = (I_s)$, $J = (J_s) \in L$:

$$q_{I,J} = q_{I,J}(\theta, t) ::= \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \left(\exp\left(a_s' I + b_s Z_{t-1}\right)\right)^{J_s} \left(1 + \exp\left(a_s' I + b_s' Z_{t-1}\right)\right)^{-N}, \; t \in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

В условиях теоремы 1, если вектор внешних факторов не зависит от $t$, матрица вероятностей одношаговых переходов (5) также не зависит от $t$ и цепь Маркова является однородной.

## Оценки максимального правдоподобия параметров модели и их асимптотические свойства

Примем обозначения: $\theta = (\theta_1', \ldots, \theta_n')' \in \boldsymbol{R}^{n(n+m)}$ – составной вектор $n(n+m)$ параметров, подлежащих оцениванию; $\mathbf{O}_m \in \boldsymbol{R}^m$ – $m$-нулевой вектор-столбец.

В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для $n \times T$ пространственно-временных наблюдений $\{x_{s,t} : s \in S, t = 1, 2, \ldots, T\}$, где $T$ – длительность наблюдения, имеет аддитивный по $\theta_1, \ldots, \theta_n$ вид [5]

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s), \; l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^{T} \left( x_{s,t} \theta_s' Y_t - N \ln\left(1 + \exp(\theta_s' Y_t)\right) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right).$$

ОМП $\hat{\theta} \in R^{n(n+m)}$ составного вектора параметров определяется как решение следующей экстремальной задачи [5]:

$$l(\theta) \to \max_{\theta}. \tag{6}$$

**Теорема 2** [6]. *Если имеет место модель (2), (3), $m = 1$, внешний параметр $z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от времени $t$ и векторная цепь Маркова $X_t \in L$ является стационарной, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in \boldsymbol{R}^1$ информационная матрица Фишера является невырожденной и имеет следующий блочно-диагональный вид:*

$$G = N\,\mathrm{diag}\left\{\boldsymbol{E}\left\{Y_t Y_t' p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right)\right\}\right\},\ Y_t = \left(X_{t-1}', z\right)',\ i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

**Теорема 3** [6]. *Если $m = 1$, $z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от $t$ и цепь Маркова $X_t \in L$ стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in \boldsymbol{R}^1$ построенные согласно (6) оценки максимального правдоподобия $\{\hat{\theta}_s\}$ при $T \to +\infty$ являются состоятельными и асимптотически нормально распределенными:*

$$L\left\{\sqrt{T}\left(\hat{\theta} - \theta^0\right)\right\} \longrightarrow N_{n(n+1)}\left(0, G^{-1}\right), \tag{8}$$

*где информационная матрица Фишера $G$ вычисляется по формуле (7).*

## Статистическая проверка гипотез

По наблюдаемым пространственно-временным данным $\left\{x_{s,t} : s \in S, t = 1, 2, \ldots, T\right\}$ необходимо проверить простую гипотезу $H_0 : \theta^0 = \theta^*$ о том, что вектор параметров $\theta^0$ совпадает с наперед заданным вектором $\theta^* \in \boldsymbol{R}^{n(n+1)}$ против сложной альтернативы $H_1 = \bar{H}_0 : \theta^0 \neq \theta^*$.

Построим статистику

$$g_T = g\left(X_1, \ldots, X_T\right) ::= T\left(\hat{\theta} - \theta^*\right)' G\left(\hat{\theta} - \theta^*\right) \geq 0, \tag{9}$$

где $\hat{\theta}$ – оценка максимального правдоподобия параметров модели, определяемая (6), а матрица $G$ найдена в теореме 2.

**Теорема 4.** *Если верна гипотеза $H_0$, то при $T \to \infty$ имеет место сходимость статистики $g_T$ по распределению вероятностей к центральному $\chi^2$-распределению с $n(n+1)$ степенью свободы*

$$L_{H_0}\left\{g_T\right\} \to \chi^2_{n(n+1)}. \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотическим свойством (8) из теоремы 3. Рассмотрим последовательность случайных векторов

$$\xi_T = \left(\xi_{Tk}\right) = \sqrt{T} G^{1/2}\left(\hat{\theta} - \theta^*\right) \in R^{n(n+1)}. \tag{11}$$

Если верна гипотеза $H_0$, то в силу (8), (11) имеем сходимость

$$L_{H_0}\left\{\xi_T\right\} \to N_{n(n+1)}\left(0, I_{n(n+1)}\right),$$

т. е.

$$\xi_T \xrightarrow{D} \eta = \left(\eta_k\right) \in R^{n(n+1)},\ L\{\eta\} = N_{n(n+1)}\left(0, I_{n(n+1)}\right), \tag{12}$$

где $I_m$ – единичная $(m \times m)$-матрица. Согласно (9), (11) статистика $g_T$ представима в виде

$$g_T = T\left(\hat{\theta} - \theta^*\right)' G\left(\hat{\theta} - \theta^*\right) = \xi_T' \xi_T,$$

откуда согласно (12) имеем при $T \to \infty$

$$g_T \xrightarrow{D} \eta'\eta = \sum_{k=1}^{n(n+1)} \eta_k^2.$$

Поэтому в силу определения центрального $\chi^2$-распределения получаем утверждение (10) теоремы. ■

Построим решающее правило для статистической проверки гипотез $H_0$, $H_1$:

$$d = d\left(X_1, \ldots, X_T\right) = \begin{cases} 0, & g_T < \Delta, \\ 1, & g_T \geq \Delta. \end{cases} \tag{13}$$

**Следствие.** *Если пороговое значение* $\Delta$ *в решающем правиле (13) имеет вид*

$$\Delta = F^{-1}_{\chi^2_{n(n+1)}}(1-\alpha),$$

*где* $F_{\chi^2_{n(n+1)}}(\cdot)$ *– функция распределения* $\chi^2$*-распределения вероятностей с* $n(n+1)$ *степенями свободы, то при* $T \to \infty$ *асимптотический размер теста (13) равен заданному уровню значимости* $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Покажем, что при пороговом значении $\Delta = F^{-1}_{\chi^2_{n(n+1)}}(1-\alpha)$ вероятность ошибки первого рода сходится к заданному уровню значимости $\alpha$:

$$P\{H_1 | H_0\} = 1 - P_{H_0}\{g_T < \Delta\} \to 1 - F_{\chi^2_{n(n+1)}}(\Delta) = 1 - F_{\chi^2_{n(n+1)}}\left(F^{-1}_{\chi^2_{n(n+1)}}(1-\alpha)\right) = \alpha. \ \blacksquare$$

**Теорема 5.** *Если рассматривается семейство контигуальных простых альтернатив* $H_{1T} : \theta^0 = \theta^* + \frac{1}{\sqrt{T}} a$, *где a – некоторый ненулевой вектор из* $R^{n(n+1)}$, *то при* $T \to \infty$ *имеет место сходимость распределения вероятностей статистики* $g_T$ *к нецентральному* $\chi^2$*-распределению с* $n(n+1)$ *степенями свободы и параметром нецентральности* $\Delta^2 = a' G a$

$$L_{H_{1T}}\{g_T\} \to \chi^2_{\Delta^2,\, n(n+1)}. \tag{14}$$

*При этом справедливо следующее асимптотическое выражение мощности теста (13):*

$$w_T = P_{H_{1T}}(d = 1) \to w^* = 1 - F_{\chi^2_{\Delta^2,\, n(n+1)}}\left(F^{-1}_{\chi^2_{n(n+1)}}(1-\alpha)\right). \tag{15}$$

Доказательство. Из (8), если верна гипотеза $H_{1T}$, при $T \to \infty$,

$$L_{H_{1T}}\left\{\sqrt{T}\left(\hat{\theta} - \theta^* - \frac{1}{\sqrt{T}} a\right)\right\} = L\left\{\sqrt{T}\left(\hat{\theta} - \theta^*\right) - a\right\} \to N_{n(n+1)}\left(0, G^{-1}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим случайный вектор $\xi_T$, определенный (11). В силу (16) имеем

$$L_{H_{1T}}\{\xi_T\} \to N_{n(n+1)}\left(G^{1/2} a, I_{n(n+1)}\right),$$

т. е.

$$\xi_T = (\xi_{Tk}) \xrightarrow{D} \eta = (\eta_k) \in R^{n(n+1)},\ L\{\eta\} = N_{n(n+1)}\left(G^{1/2} a, I_{n(n+1)}\right). \tag{17}$$

Тогда статистика $g_T$ теста (13) представима в виде суммы квадратов:

$$g_T = T\left(\hat{\theta} - \theta^*\right)' G\left(\hat{\theta} - \theta^*\right) = \xi_T' \xi_T \to \eta' \eta = \sum_{k=1}^{n(n+1)} \eta_k^2, \tag{18}$$

причем $\{\eta_{Tk}\}$ асимптотически нормально распределены согласно (17). В силу определения нецентрального $\chi^2$-распределения (см., например, [7]) получаем первое утверждение теоремы (14).

Вычислим теперь асимптотическую мощность теста, используя (18) и (14):

$$w_T := P\{H_{1T} | H_{1T}\} = P_{H_{1T}}\{g_T \geq \Delta\} =$$
$$= 1 - P_{H_{1T}}\{g_T < \Delta\} \to 1 - F_{\chi^2_{\Delta^2,\, n(n+1)}}(\Delta) = 1 - F_{\chi^2_{\Delta^2,\, n(n+1)}}\left(F^{-1}_{\chi^2_{n(n+1)}}(1-\alpha)\right). \ \blacksquare$$

## Результаты компьютерного моделирования

Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (2), (3) при следующих числовых значениях параметров: $m = 1$, $z = 2$, $N = 4$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, $\theta^0 = \left(\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0\right)$, $\theta_1^0 = (-0{,}20;\ 0{,}18;\ -0{,}15;\ 0{,}20)'$, $\theta_2^0 = (-0{,}18;\ 0{,}24;\ -0{,}05;\ -0{,}10)'$, $\theta_3^0 = (0{,}13;\ -0{,}13;\ -0{,}29;\ 0{,}30)'$, $\nu = (N+1)^n = 125$.

Проверим гипотезу о равенстве вектора параметров нулевому вектору $(\theta^* = \mathbf{0}_{12} = \mathbf{0} \in R^{12})$:

$$H_0 : \theta^0 = \mathbf{0},$$
$$H_1 = \bar{H}_0 : \theta^0 \neq \mathbf{0}.$$

Согласно (3) в этом случае гипотеза $H_0$ означает, что $\{x_{s,t}\}$ – «чисто случайная» последовательность, т. е. последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с законом распределения вероятностей $\boldsymbol{Bi}\left(\cdot;\, N,\, \frac{1}{2}\right)$, не зависящим ни от прошлого состояния, ни от внешних факторов.

Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и найдем пороговое значение в (13) $\Delta = F^{-1}_{\chi^2_{12}}(1-0{,}05) = 21{,}03$. Тогда в силу (15)

$$w_T \to 1 - F_{\chi^2_{\Delta^2,\,12}}(21{,}03),$$

где параметр нецентральности $\Delta^2 = T\theta^{0\prime}G\theta^0$. Тогда решающее правило (13) примет вид

$$d = d(X_1, \ldots, X_T) = \begin{cases} 0, & T\hat{\theta}'G\hat{\theta} < 21{,}03, \\ 1, & T\hat{\theta}'G\hat{\theta} \geq 21{,}03. \end{cases}$$

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимостей экспериментальных и теоретических оценок вероятности ошибки первого рода и мощности теста в зависимости от длительности наблюдений $T$ $(T \in [20, 300])$. Экспериментальные (выборочные) оценки вероятности ошибки первого рода и мощности теста вычислялись по методу Монте-Карло по $M$ реализациям:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} I\left\{T\hat{\theta}^{(k)\prime}G\hat{\theta}^{(k)} \geq 21{,}03 \middle| \theta = \mathbf{0}\right\},$$

$$\hat{w}_T = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} I\left\{T\hat{\theta}^{(k)\prime}G\hat{\theta}^{(k)} \geq 21{,}03 \middle| \theta = \theta^0\right\},$$

где $I\{\cdot\}$ – индикаторная функция; $\hat{\theta}^{(k)}$ – оценка максимального правдоподобия вектора 12 параметров по $k$-й реализации пространственно-временных данных; $\theta$ – истинное значение вектора параметров; $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло.

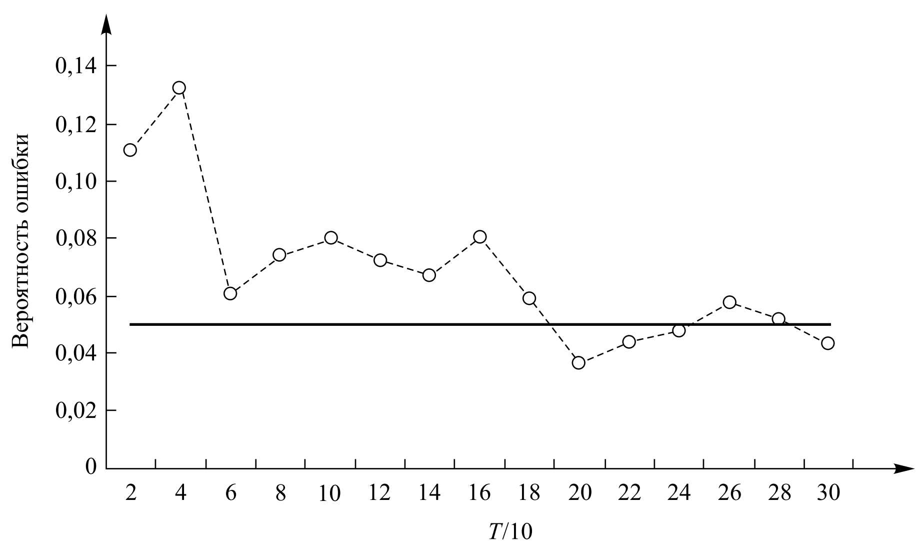


*Рис. 1.* Зависимость вероятности ошибки первого рода от длительности наблюдений:
—— заданный уровень значимости; - -○- - экспериментальная вероятность ошибки первого рода

*Fig. 1.* Dependence of the first type error probability on the length of the observation period:
—— defined significance level; - -○- - experimental first type error probability

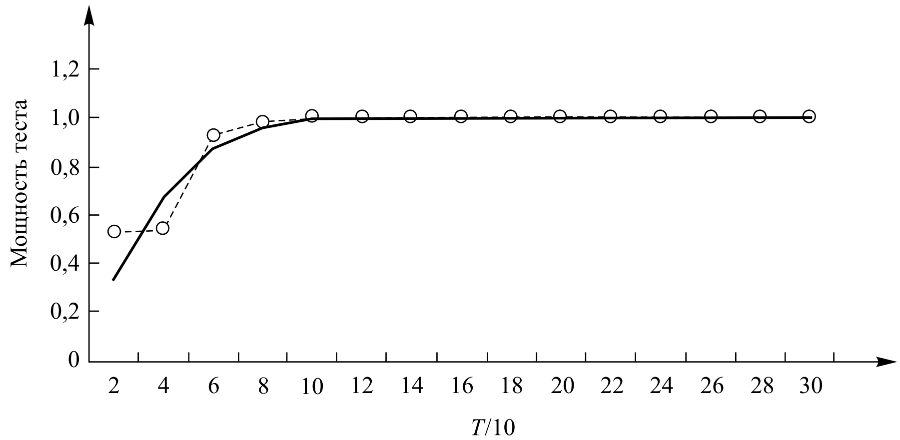


*Рис. 2.* Зависимость мощности теста от длительности наблюдений:
—— теоретическая мощность; - -○- - экспериментальная мощность

*Fig. 2.* Dependence of the power of the test on the length of the observation period:
—— theoretical power of the test; - -○- - experimental power of the test

Из рис. 1 и 2 видно согласие теоретических и экспериментальных результатов.

## Заключение

Таким образом, в работе построен статистический тест для проверки гипотез о значениях параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. Найдено асимптотическое выражение мощности построенного теста. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных, показавшие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

## Библиографические ссылки

1. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models / S. Kang [et al.] // Aust. & N. Z. J. Stat. 2015. Vol. 57, issue 3. P. 325–345.
2. *Xu G., Liang F., Genton M. G.* A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets // Stat. Sinica. 2015. Vol. 25. P. 61–79.
3. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder) / X. Zhu [et al.] // TEST. 2014. Vol. 23. P. 1–25.
4. *Zhu F., Liu S., Shi L.* Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data // Stat. Neerlandica. 2016. Vol. 7/1. P. 4–25.
5. *Харин Ю. С., Журак М. К.* Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 6. С. 5–12.
6. *Харин Ю. С., Журак М. К.* Асимптотический анализ оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2016. № 1. С. 36–45.
7. *Харин Ю. С., Зуев Н. М., Жук Е. Е.* Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика. Минск, 2011.

## References

1. Kang S., McGreel J., Baade P., et al. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models. *Aust. & N. Z. J. Stat.* 2015. Vol. 57, issue 3. P. 325–345.
2. Xu G., Liang F., Genton M. G. A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets. *Stat. Sinica.* 2015. Vol. 25. P. 61–79.
3. Zhu X., Genton M. G., Gu Y., et al. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder). *TEST.* 2014. Vol. 23. P. 1–25.
4. Zhu F., Liu S., Shi L. Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data. *Stat. Neerlandica.* 2016. Vol. 7/1. P. 4–25.
5. Kharin Y. S., Zhurak M. K. Binomial'naya uslovno avtoregressionnaya model' prostranstvenno-vremennykh dannykh i ee veroyatnostno-statisticheskii analiz [The binomial conditional autoregressive model of the spatio-temporal data and its probabilistic and statistical analysis]. *Dokl. Nats. akad. nauk Belarusi.* 2015. Vol. 59, No. 6. P. 5–12 (in Russ.).
6. Kharin Y. S., Zhurak M. K. Asimptoticheskii analiz otsenok maksimal'nogo pravdopodobiya parametrov binomial'noi uslovno avtoregressionnoi modeli prostranstvenno-vremennykh dannykh [Asymptotic analysis of maximum likelihood estimators for parameters of binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data]. *Izv. Nats. akad. nauk Belarusi. Ser. fiz.-mat. nauk.* 2016. No. 1. P. 36–45 (in Russ.).
7. Kharin Y. S., Zuev N. M., Zhuk E. E. Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya i prikladnaya statistika [Probability theory, mathematical and applied statistics]. Minsk, 2011 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 15.04.2016.*
*Received by editorial board 15.04.2016.*