УДК 519.2

СВОЙСТВА ВНУТРЕННЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Т. В. ЦЕХОВАЯ [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Исследованы внутренне стационарные случайные процессы с непрерывным временем. Изучена их связь со стационарными в широком смысле процессами и процессами со стационарными в широком смысле приращениями. Рассмотрены свойства семивариограмм стационарных случайных процессов. Найдены необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом смысле внутренне стационарных случайных процессов в терминах их семивариограмм. При этом показано, что производная в среднем квадратическом смысле внутренне стационарного случайного процесса с конечным моментом второго порядка является стационарным в широком смысле случайным процессом.

Ключевые слова: случайный процесс; внутренняя стационарность; вариограмма; стохастический анализ.

PROPERTIES OF THE INTRINSICALLY STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES

T. V. TSEKHAVAYA [a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

Intrinsically stationary random processes with continuous time are investigated. Their connections with second-order stationary processes and processes with the second-order stationary increments are studied. The properties of semivariogram of the stationary random processes are investigated. Necessary and sufficient conditions for continuity, differentiability and integrability in the mean square sense of the intrinsically stationary stochastic processes in terms of their semivariogram are found. It is shown that the derivative in the mean square sense of the intrinsically stationary random process, for which the second-order moment is exists, is a second-order stationary random process.

Key words: stochastic process; intrinsic stationarity; variogram; stochastic analysis.

Для современной теории случайных процессов характерно, что ее модели, методы и результаты представляют не только самостоятельный математический интерес, но и находят многочисленные приложения. При этом, как правило, особое внимание уделяется стационарным случайным процессам и случайным процессам со стационарными приращениями.

Определения стационарного в узком смысле случайного процесса, случайного процесса со стационарными в узком смысле приращениями можно найти, например, в работах [1–3]. Отметим, что условие стационарности в узком смысле является очень строгим, поэтому на практике используются более мягкие условия иных типов стационарности: стационарности в широком смысле, внутренней стационарности.

Образец цитирования:
Цеховая Т. В. Свойства внутренне стационарных случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 28–33.

For citation:
Tsekhavaya T. V. Properties of the intrinsically stationary stochastic processes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 28–33 (in Russ.).

Автор:
Татьяна Вячеславовна Цеховая – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Tatsiana Tsekhavaya, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer sciences.
tsekhavaya@bsu.by

Цель настоящей статьи – исследование связи внутренне стационарных случайных процессов со стационарными в широком смысле случайными процессами и процессами со стационарными в широком смысле приращениями, а также определение необходимых и достаточных условий непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом внутренне стационарных случайных процессов.

Некоторые виды стационарности случайных процессов и связь между ними

Рассмотрим действительный случайный процесс $Y(t),\ t\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

Определение 1 [1; 4]. Случайный процесс $Y(t),\ t\in\mathbb{R}$, с математическим ожиданием $m(t)=E\{Y(t)\}$, ковариационной функцией

$$R(t,s)=\operatorname{cov}\{Y(t),Y(s)\}=E\{(Y(t)-m(t))(Y(s)-m(s))\}$$

называется стационарным в широком смысле, если момент второго порядка $E\{Y^2(t)\}<\infty$ при любом $t\in\mathbb{R}$ и выполняются следующие условия:

$$m(t)=m=\text{const},\ R(t,s)=R(t-s),\ t,s\in\mathbb{R}.$$

Определение 2 [4]. Вариограммой случайного процесса $Y(t),\ t\in\mathbb{R}$, называется функция вида

$$2\gamma(t,s)=D\{Y(t)-Y(s)\},\tag{1}$$

где $t,s\in\mathbb{R}$; D – символ дисперсии. Функция $\gamma(t,s)$ называется семивариограммой.

Основоположником вариограммного анализа временных рядов является Ж. Матерон (G. Matheron) [5]. Однако функцию вида (1) можно найти в научной литературе более раннего периода [2; 6].

Из определения вариограммы случайного процесса $Y(t)$ нетрудно заметить, что

$$\gamma(t,s)\ge 0,\ \gamma(t,t)=0,$$

$$2\gamma(t,s)=D(t)-2R(t,s)+D(s),\tag{2}$$

где $R(t,s)$ – ковариационная функция; $D(t)$ – дисперсия случайного процесса $Y(t),\ t,s\in\mathbb{R}$.

Нередко на практике оказывается, что процесс не обладает конечной дисперсией, но конечную дисперсию имеют его приращения. В таких ситуациях часто делается предположение о внутренней стационарности исследуемого процесса и применяются методы вариограммного анализа, что позволяет существенно расширить круг решаемых проблем.

Определение 3 [4]. Случайный процесс $Y(t),\ t\in\mathbb{R}$, называется внутренне стационарным, если

$$E\{Y(t)-Y(s)\}=0,\tag{3}$$

$$D\{Y(t)-Y(s)\}=2\gamma(t-s),\tag{4}$$

где функция $2\gamma(t)$ – вариограмма случайного процесса $Y(t),\ t,s\in\mathbb{R}$.

Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то он будет и внутренне стационарным. Из (4) легко получить, что ковариационная функция $R(t)$ и семивариограмма $\gamma(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса $Y(t)$ связаны соотношением

$$\gamma(t)=R(0)-R(t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Внутренне стационарный случайный процесс не является стационарным в широком смысле, поскольку для него могут не существовать моменты второго порядка. Однако внутренне стационарный случайный процесс $Y(t),\ t\in\mathbb{R}$, для которого имеет место условие

$$E\{Y^2(t)\}=\text{const}<+\infty\ \text{ при всех } t\in\mathbb{R},$$

является также и стационарным в широком смысле.

Для действительного гауссовского случайного процесса стационарность в узком смысле, стационарность в широком смысле и внутренняя стационарность эквивалентны, так как гауссовские распределения однозначно определяются своими первыми и вторыми моментами.

Определение 4 [4; 5]. Действительная функция $\gamma(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, называется условно отрицательно определенной, если для любого $n \geq 1$, произвольных моментов времени $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ и любого ненулевого действительного вектора $(z_1, \ldots, z_n)$ такого, что $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$, справедливо неравенство $\sum_{i,\, j=1}^{n} z_i z_j \gamma(t_i, t_j) \leq 0$.

Теорема 1. *Пусть имеются произвольная действительная функция $m(t) = m$ и симметричная условно отрицательно определенная действительная функция $\gamma(t, s)$, где $t, s \in \mathbb{R}$. Тогда найдутся вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и заданный на нем действительный гауссовский случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что $E\{Y(t)\} = m$ и $D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t, s)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Используем свойства семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса [7] и рассуждаем аналогично [1, с. 52].

Следствие. *Класс симметричных условно отрицательно определенных действительных функций совпадает с классом семивариограмм действительных гауссовских случайных процессов.*

Определение 5 [2; 3]. Непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется процессом со стационарными в широком смысле приращениями, если функции

$$E\{Y(t+h) - Y(t)\} = ch, \tag{5}$$

$$\operatorname{cov}\{Y(t+h_1) - Y(t),\, Y(t+s+h_2) - Y(t+s)\} = K(s, h_1, h_2), \tag{6}$$

где $c = \mathrm{const}$, определены при любых $t, h, s, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ и не зависят от t.

Теорема 2. *Непрерывный в среднем квадратическом внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является процессом со стационарными в широком смысле приращениями.*

Доказательство. Проверим выполнение условий (5), (6) определения процесса со стационарными в широком смысле приращениями. Равенство (5) получается очевидным образом из (3) при $c = 0$.

Используя представление ковариации приращений внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$ [8] и свойства семивариограммы $\gamma(t)$, запишем равенство

$$\operatorname{cov}\{Y(t+h_1) - Y(t),\, Y(t+s+h_2) - Y(t+s)\} = \gamma(s+h_2) + \gamma(s-h_1) - \gamma(s) - \gamma(s+h_2-h_1).$$

Отсюда видно, что правая часть последнего равенства существует и не зависит от t. Теорема доказана.

Теорема 3. *Непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с постоянным математическим ожиданием и стационарными в широком смысле приращениями является внутренне стационарным.*

Доказательство. Учитывая, что $Y(t)$ – случайный процесс с постоянным математическим ожиданием, имеем (3).

Далее, покажем, что дисперсия приращений $Y(t+h) - Y(t)$, $t, h \in \mathbb{R}$, процесса $Y(t)$ является функцией от одной переменной h. Выражение для дисперсии приращений нетрудно получить из равенства (6), если положить $s = 0$, $h_1 = h_2 = h$. Тогда

$$\operatorname{cov}\{Y(t+h) - Y(t),\, Y(t+h) - Y(t)\} = D\{Y(t+h) - Y(t)\} = K(0, h, h),$$

что и требовалось доказать.

Элементы стохастического анализа

Рассмотрим действительный внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с конечным моментом второго порядка и семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Из (3) вытекает, что $E\{Y(t)\} = \mathrm{const} < \infty$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $m(t) = E\{Y(t)\} = 0$, $t \in \mathbb{R}$. В противном случае можно рассмотреть процесс $Y(t) - m(t)$.

Теорема 4. *Внутренне стационарный случайный процесс* $Y(t),\ t \in \mathbb{R}$, *непрерывен в среднем квадратическом на* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда его семивариограмма* $\gamma(t),\ t \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть случайный процесс $Y(t)$ непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$. Тогда из определения непрерывности в среднем квадратическом в произвольной точке $s \in \mathbb{R}$, учитывая представление (4) вариограммы действительного внутренне стационарного случайного процесса, запишем

$$\lim_{t \to 0} E\left\{\left(Y(s+t) - Y(s)\right)^2\right\} = \lim_{t \to 0} 2\gamma(t) = 0,$$

откуда вытекает (7).

Достаточность. Пусть семивариограмма $\gamma(t)$ действительного внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$ удовлетворяет условию (7). С учетом (4) получим

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = \lim_{t \to 0} 0{,}5D\left\{Y(s+t) - Y(s)\right\} = \lim_{t \to 0} 0{,}5E\left\{\left(Y(s+t) - Y(s)\right)^2\right\} = 0.$$

В силу определения непрерывности в среднем квадратическом заключаем, что случайный процесс $Y(t)$ непрерывен в среднем квадратическом в точке $s \in \mathbb{R}$. Следовательно, это утверждение справедливо и для любой точки множества $\mathbb{R}$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для того чтобы внутренне стационарный случайный процесс* $Y(t),\ t \in \mathbb{R}$, *был дифференцируем в среднем квадратическом на* $\mathbb{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы его семивариограмма* $\gamma(t),\ t \in \mathbb{R}$, *удовлетворяла условию*

$$\gamma''(0) < +\infty, \tag{8}$$

где $\gamma''(0)$ *– вторая производная семивариограммы в точке* $t = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть внутренне стационарный случайный процесс $Y(t)$ с конечным моментом второго порядка является дифференцируемым в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$. Тогда из критерия дифференцируемости в среднем квадратическом и [9, с. 493, следствие 1] заключаем, что ковариационная функция $R(t,\ s)$ процесса $Y(t)$ имеет конечную производную второго порядка $\dfrac{\partial^2 R(t,\ s)}{\partial t \partial s}$ в точках $t = s$. Таким образом, учитывая соотношение (2), запишем

$$2\gamma(t,\ s) = R(t,\ t) - 2R(t,\ s) + R(s,\ s),$$

$$\frac{\partial^2 \gamma(t,\ s)}{\partial t \partial s} = -\frac{\partial^2 R(t,\ s)}{\partial t \partial s}, \tag{9}$$

т. е. функция $-\gamma(t,\ s)$ также имеет конечную производную второго порядка в точках $t = s$.

Далее, в силу определения семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса получаем

$$-\left.\frac{\partial^2 \gamma(t,\ s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s} = \left.\frac{\partial^2 \gamma(t-s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s} = \gamma''(0) < +\infty, \tag{10}$$

что и требовалось показать.

Достаточность. Пусть семивариограмма действительного внутренне стационарного случайного процесса $Y(t)$ с конечным моментом второго порядка удовлетворяет условию (8). Принимая во внимание (9), (10) и (2), имеем

$$\left.\frac{\partial^2 R(t,\ s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s} = \gamma''(0) < +\infty,\ \ t,\ s \in \mathbb{R}.$$

Это и есть достаточное условие дифференцируемости в среднем квадратическом случайного процесса $Y(t)$ на множестве $\mathbb{R}$ [1; 9; 10]. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть* $Y(t),\ t \in \mathbb{R}$, *– дифференцируемый в среднем квадратическом внутренне стационарный случайный процесс с конечным вторым моментом. Тогда его производная в среднем квадратическом смысле* $Y'(t),\ t \in \mathbb{R}$, *является стационарным в широком смысле случайным процессом.*

Доказательство. Проверим условия определения 1. Из [10] и определения внутренне стационарного случайного процесса запишем

$$E\{Y'(t)\} = \left(E\{Y(t)\}\right)' = 0.$$

Вычислим ковариационную функцию процесса $Y'(t)$. Для этого воспользуемся [10], равенством (2) и определением внутренне стационарного случайного процесса. Тогда

$$R_{Y'}(t,\ s) = \frac{\partial^2 R(t,\ s)}{\partial t \partial s} = -\frac{\partial^2 \gamma(t,\ s)}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 \gamma(t - s)}{\partial t \partial s} = R_{Y'}(t - s).$$

Очевидно, что момент второго порядка процесса $Y'(t)$ конечен, т. е.

$$D\{Y'(t)\} = R_{Y'}(t,\ t) = \gamma''(0) < +\infty.$$

Таким образом, все условия определения стационарного в широком смысле случайного процесса выполнены. Теорема доказана.

Перейдем к интегрированию в среднем квадратическом смысле внутренне стационарных случайных процессов с конечным моментом второго порядка.

Теорема 7. *Интеграл в среднем квадратическом* $I = \int\limits_a^b Y(t)dt$ *существует тогда и только тогда, когда*

$$(b - a)\int\limits_a^b D(t)dt - 2\int\limits_0^{b-a}(b - a - t)\gamma(t)dt < \infty,$$

где $-\infty \le a < b \le \infty$; $D(t)$ *– дисперсия;* $\gamma(t)$ *– семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса* $Y(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из [1] следует, что существование интеграла Римана $\int\limits_a^b\int\limits_a^b R(t,\ s)dtds$ является необходимым и достаточным условием существования интеграла в среднем квадратическом смысле $I = \int\limits_a^b Y(t)dt$. Из соотношения (2), определения семивариограммы внутренне стационарного процесса (4) запишем

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b R(t,\ s)dtds = \frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b D(t)dtds + \frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b D(s)dtds - \int\limits_a^b\int\limits_a^b \gamma(t,\ s)dtds =$$

$$= (b - a)\int\limits_a^b D(t)dt - \int\limits_a^b\int\limits_a^b \gamma(t - s)dtds.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных интегрирования: $t = t$, $t - s = u$. Тогда, учитывая свойства семивариограммы [7], имеем

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b R(t,\ s)dtds = (b - a)\int\limits_a^b D(t)dt - \int\limits_{-(b-a)}^0 \gamma(u)du \int\limits_a^{u+b} dt - \int\limits_0^{b-a}\gamma(u)du \int\limits_{u+a}^b dt =$$

$$= (b - a)\int\limits_a^b D(t)dt - \int\limits_{-(b-a)}^{b-a}(b - a - |u|)\gamma(u)du = (b - a)\int\limits_a^b D(t)dt - 2\int\limits_0^{b-a}(b - a - u)\gamma(u)du,$$

что и требовалось доказать.

Исследование непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов в среднем квадратическом смысле сводится, как правило, к изучению соответствующих свойств их математических ожиданий и ковариационных функций. В настоящей статье сформулированы критерии непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратическом внутренне стационарного случайного процесса в терминах его семивариограммы. Полученные результаты будут использованы в дальнейшем для поиска спектральных представлений внутренне стационарных случайных процессов и их семивариограмм.

Библиографические ссылки

1. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М., 2005.
2. *Яглом А. М.* Корреляционная теория процессов со случайными стационарными *n*-ми приращениями // Матем. сб. 1955. Т. 37 (79), № 1. С. 141–196.
3. *Колмогоров А. Н.* Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений // Докл. Акад. наук СССР. 1940. Т. 26, № 1. С. 6–9.
4. *Cressie N.* Statistics for Spatial Data. New York, 1991.
5. *Matheron G.* Principles of Geostatistics // Econ. Geol. 1963. Vol. 58. P. 1246–1266.
6. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. Акад. наук СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
7. *Цеховая Т. В.* Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 22 апр. 2004 г.). Минск, 2004. С. 181–186.
8. *Цеховая Т. В.* Первые два момента оценки вариограммы гауссовского случайного процесса // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры : материалы Междунар. матем. конф. (Брест, 5–8 окт. 2005 г.) : в 2 ч. Брест, 2005. Ч. 2. С. 78–82.
9. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., 1962.
10. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М., 1975.

References

1. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. Teoriya sluchainykh protsessov [The theory of stochastic processes]. Moscow, 2005 (in Russ.).
2. Yaglom A. M. Korrelyatsionnaya teoriya protsessov so sluchainymi statsionarnymi *n*-mi prirashcheniyami. *Mat. sb.* 1955. Vol. 37 (79), No. 1. P. 141–196 (in Russ.).
3. Kolmogorov A. N. Krivye v gil'bertovom prostranstve, invariantnye po otnosheniyu k odnoparametricheskoi gruppe dvizhenii [Curves in Hilbert space that are invariant with respect to the one-parameter group of motions]. *Dokl. Akad. nauk SSSR*. 1940. Vol. 26, No. 1. P. 6–9 (in Russ.).
4. Cressie N. Statistics for Spatial Data. New York, 1991.
5. Matheron G. Principles of Geostatistics. *Econ. Geol.* 1963. Vol. 58. P. 1246–1266.
6. Kolmogorov A. N. Lokal'naya struktura turbulentnosti v neszhimaemoi vyazkoi zhidkosti pri ochen' bol'shikh chislakh Reinol'dsa [The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers]. *Dokl. Akad. nauk SSSR*. 1941. Vol. 30, No. 4. P. 299–303 (in Russ.).
7. Tsekhovaya T. V. Svoistva variogrammy vnutrenne statsionarnykh sluchainykh protsessov [The properties of the variogram of intrinsically stationary random processes]. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya* : proc. of Int. Sci. Conf. (Minsk, 22 April, 2004). Minsk, 2004. P. 181–186 (in Russ.).
8. Tsekhovaya T. V. Pervye dva momenta otsenki variogrammy gaussovskogo sluchainogo protsessa [The first two moments of the variogram estimator of a Gaussian stochastic process]. *Differentsial'nye uravneniya i sistemy komp'yuternoi algebry* : proc. of Int. Math. Conf. (Brest, 5–8 Oct., 2005) : in 2 parts. Brest, 2005. Part 2. P. 78–82 (in Russ.).
9. Loev M. Teoriya veroyatnostei [Probability theory]. Moscow, 1962 (in Russ.).
10. Venttsel' A. D. Kurs teorii sluchainykh protsessov [The course of the theory of random processes]. Moscow, 1975 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 28.03.2016.
Received by editorial board 28.03.2016.