ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS
AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.8

К НАХОЖДЕНИЮ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

Е. Д. ЖИВИЦА[1], ***К. Г. КУЗЬМИН***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Рассмотрена задача о нахождении минимального остовного дерева при условии, что вес ребер подвержен независимым изменениям. Изучена одна из количественных характеристик устойчивости оптимальных решений этой задачи, известная как радиус устойчивости и определяемая как предельный уровень изменений веса ребер, при котором выбранное наперед оптимальное решение все еще сохраняет свою оптимальность. Выведена точная формула радиуса устойчивости минимального остовного дерева, позволяющая вычислять этот радиус за время, близкое к линейному относительно числа ребер графа. Этот результат значительно улучшает формулу радиуса устойчивости оптимального решения линейной комбинаторной задачи в общей постановке, поскольку последняя формула требует полного перебора по множеству допустимых решений, мощность которого может расти экспоненциально.

Ключевые слова: задача о минимальном остовном дереве; второй оптимальный остов; анализ чувствительности решений; радиус устойчивости.

Образец цитирования:
Живица Е. Д., Кузьмин К. Г. К нахождению радиуса устойчивости минимального остовного дерева // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 34–38.

For citation:
Zhyvitsa Ya. D., Kuzmin K. G. On calculation of the stability radius for a minimum spanning tree. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 34–38 (in Russ.).

Авторы:
Евгений Дмитриевич Живица – магистрант кафедры математической кибернетики механико-математического факультета. Научный руководитель – К. Г. Кузьмин.
Кирилл Геннадьевич Кузьмин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

Authors:
Yauheni Zhyvitsa, master's degree student at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
j.zhivitsa@gmail.com
Kiril Kuzmin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
kuzminkg@mail.ru

ON CALCULATION OF THE STABILITY RADIUS FOR A MINIMUM SPANNING TREE

Ya. D. ZHYVITSA[a]***, K. G. KUZMIN***[a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*
Corresponding author: j.zhivitsa@gmail.com

We consider a minimum spanning tree problem in the situation where weights of edges are exposed to independent perturbations. We study a quantitative characteristic of stability for a given optimal solutions of the problem. The characteristic is called the stability radius and defined as the limit level of edges weights perturbations which preserve optimality of a particular solution. We present an exact formula for the stability radius that allows calculating the radius in time which is extremely close to linear with respect to number of graph edges. This improves upon a well-known formula of an optimal solution for a linear combinatorial problem which requires complete enumeration of feasible solutions set whose cardinality may grow exponentially.

Key words: minimum spanning tree problem; second-best spanning tree; sensitivity analysis of solutions; stability radius.

Рассмотрим хорошо известную задачу нахождения минимального остовного дерева в неориентированном связном взвешенном графе $G = G(V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть $|V| = n$ и $|E| = m$, причем $m \geq n$. Множество всевозможных остовов графа G обозначим через T, а сами остовы – t. Таким образом, каждый остов $t \in T$ представляет собой подмножество множества E, состоящее из $n - 1$ ребер.

Будем полагать, что все ребра $e \in E$ пронумерованы и каждому ребру с номером i приписан вес $a_i = a(e_i) \in \mathbf{R}$. Тем самым образуется весовой вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, и каждый остов $t \in T$ получает вес

$$f(t, a) = \sum_{e_i \in t} a_i.$$

Множество остовов с минимальным весом будем называть множеством оптимальных решений и обозначать $Opt(a)$, а саму задачу – $Z(a)$.

Исследуем количественную меру устойчивости оптимальных решений $t \in Opt(a)$ к возмущениям вектора a, которые традиционно [1–5] моделируются прибавлением к нему возмущающего вектора $a' \in \mathbf{R}^m$. В качестве количественной характеристики устойчивости оптимального решения $t \in Opt(a)$ выберем радиус его устойчивости (в чебышевской метрике), определяемый [2–5] по формуле

$$\rho(t, a) = \begin{cases} \sup \Xi, \text{ если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0, \text{ если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \left\{ \varepsilon > 0 : \forall a' \in \Omega(\varepsilon) \left(t \in Opt(a + a') \right) \right\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \left\{ a' \in \mathbf{R}^m : \|a'\|_\infty < \varepsilon \right\},$$

$$\|a'\|_\infty = \max_{i=1}^{m} |a_i|.$$

Известно [2; 3], что радиус устойчивости может быть найден по формуле

$$\rho(t, a) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{f(t', a) - f(t, a)}{\Delta(t, t')}, \tag{1}$$

где $\Delta(t, t')$ – число ребер в симметрической разности остовов t и t', иными словами, $\Delta(t, t') = |t \cup t'| - |t \cap t'|$.

Эта формула имеет существенный недостаток: она требует полного перебора по всему множеству решений, что фактически делает ее неприменимой на практике. Докажем, что на самом деле для задачи о нахождении минимального остовного дерева такого перебора не требуется.

Пусть $t^{\mathrm{I}} \in Opt(a)$. Обозначим через t^{II} второй по величине минимальный остов задачи $Z(a)$. Таким образом, остов t^{II} удовлетворяет условию

$$f\left(t^{\mathrm{II}}, a\right) = \min_{t \in T \setminus \{t^{\mathrm{I}}\}} f(t, a).$$

Заметим, что t^{II} вполне может как принадлежать множеству $Opt(a)$ при $|Opt(a)| \geq 2,$ так и не принадлежать ему при $|Opt(a)| = 1.$

Кроме того, будем использовать символы + (–) для обозначения операций добавления ребра к подграфу или его удаления из подграфа. Тем самым для любых $e \in E$ и $G' \subseteq G$

$$G' + e = G' \cup \{e\},\ \ G' - e = G' \setminus \{e\}.$$

Лемма. *Пусть $t^{\mathrm{I}} \in Opt(a)$. Тогда существует второй по величине минимальный остов t_*^{II}, отличающийся от t^{I} ровно одной парой ребер e' и e'', т. е.*

$$t^{\mathrm{I}} - e' = t_*^{\mathrm{II}} - e'', \tag{2}$$

где $e' \in t^{\mathrm{I}};\ e'' \in t_*^{\mathrm{II}}$.

Доказательство. Среди множества всех вторых по величине остовов t^{II} выберем такой остов t_0^{II}, который отличается от t^{I} наименьшим числом ребер. Поскольку остовы t^{I} и t_0^{II} различны, то можно выбрать ребро $e_1 \in t^{\mathrm{I}} \setminus t_0^{\mathrm{II}}$. Добавив это ребро к остову t_0^{II}, получим единственный цикл C, на котором обязательно найдется ребро $e_2 \in t_0^{\mathrm{II}} \setminus t^{\mathrm{I}}$, так как в противном случае $C \subseteq t^{\mathrm{I}}$, что невозможно.

Далее, убедимся, что вес a_1 ребра e_1 меньше веса a_2 ребра e_2. Действительно, случай $a_1 > a_2$ невозможен, поскольку иначе мы предъявим остов $t^{\mathrm{I}} - e_1 + e_2$ с меньшим весом, чем остов t^{I}. Случай $a_1 = a_2$ также невозможен, поскольку иначе мы бы получили остов $t_0^{\mathrm{II}} + e_1 - e_2,$ который содержит больше общих ребер с t^{I}, чем остов t_0^{II}.

Таким образом, $a_1 < a_2$. Тогда верны соотношения

$$f\left(t_0^{\mathrm{II}} + e_1 - e_2, a\right) = f\left(t_0^{\mathrm{II}}, a\right) + a_1 - a_2 < f\left(t_0^{\mathrm{II}}, a\right),$$

свидетельствующие о том, что остов $t_0^{\mathrm{II}} + e_1 - e_2$ и есть остов t^{I}. Следовательно, выполняется равенство (2), где $e' = e_1$ и $e'' = e_2.$ Лемма доказана.

Теорема. *Пусть t^{I} – оптимальное решение задачи $Z(a)$ о нахождении минимального остовного дерева. Тогда радиус устойчивости $\rho\left(t^{\mathrm{I}}, a\right)$ решения t^{I} определяется формулой*

$$\rho\left(t^{\mathrm{I}}, a\right) = \frac{f\left(t^{\mathrm{II}}, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}}, a\right)}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Для краткости дальнейшего изложения правую часть формулы (3) обозначим через φ. Сначала покажем справедливость неравенства $\rho\left(t^{\mathrm{I}}, a\right) \leq \varphi$. Для этого достаточно доказать, что для всякого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такой возмущающий вектор $a^0 \in \Omega(\varepsilon),$ при котором выполняется неравенство

$$f\left(t^{\mathrm{II}}, a + a^0\right) < f\left(t^{\mathrm{I}}, a + a^0\right). \tag{4}$$

Поскольку $t^{\mathrm{II}} \neq t^{\mathrm{I}}$, то множества $t^{\mathrm{I}} \setminus t^{\mathrm{II}}$ и $t^{\mathrm{II}} \setminus t^{\mathrm{I}}$ непусты и можно выбрать ребра $e^{\mathrm{I}} \in t^{\mathrm{I}} \setminus t^{\mathrm{II}}$ и $e^{\mathrm{II}} \in t^{\mathrm{II}} \setminus t^{\mathrm{I}}$. Поэтому возмущающий вектор $a^0 \in \Omega(\varepsilon)$ можно задать следующим образом:

$$a^0 = \begin{cases} \delta, \text{ если } e^i = e^{\mathrm{I}}, \\ -\delta, \text{ если } e^i = e^{\mathrm{II}}, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где число δ подчинено условиям $\varepsilon > \delta > \varphi$. Тогда верны соотношения

$$f\left(t^{\mathrm{II}},\, a + a^0\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a + a^0\right) = f\left(t^{\mathrm{II}},\, a\right) - \delta - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) - \delta < f\left(t^{\mathrm{II}},\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) - 2\varphi = 0,$$

которые убеждают нас в справедливости неравенства (4). Следовательно, $\rho\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) \le \varphi$.

Для завершения доказательства формулы (3) нужно показать, что $\rho\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) \ge \varphi$. Поскольку каждый из остовов $t \in T$ содержит ровно $n - 1$ ребер, то на основании (1) найдется такой остов $t' \in T \setminus \left\{t^{\mathrm{I}}\right\}$, что выполняется равенство

$$\rho\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) = \frac{f\left(t',\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right)}{2\kappa\left(t',\, t^{\mathrm{I}}\right)},$$

где $\kappa = \kappa\left(t',\, t^{\mathrm{I}}\right)$ – число пар ребер, отличающих остовы t' и t^{I}. Для доказательства нужного нам неравенства $\rho\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) \ge \varphi$ остается убедиться, что

$$f\left(t',\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) \ge 2\varphi\kappa\left(t',\, t^{\mathrm{I}}\right).$$

Остовы t' и t^{I} отличаются 2κ ребрами. Выберем некоторое ребро $e_1' \in t' \setminus t^{\mathrm{I}}$ и добавим его к остову t^{I}. При этом образуется единственный цикл, который обязательно содержит некоторое ребро $e_1^{\mathrm{I}} \in t^{\mathrm{I}} \setminus t'$, поскольку в противном случае остов t^{I} содержал бы этот цикл, что невозможно. Удалив ребро e_1^{I}, получим остов $t^{\mathrm{I}} + e_1' - e_1^{\mathrm{I}}$, после чего очередное ребро $e_2' \in t' \setminus t^{\mathrm{I}}$ добавим к остову t_1^{I}. Вновь образуется единственный цикл, из которого удалим ребро $e_2^{\mathrm{I}} \in t^{\mathrm{I}} \setminus t'$ и получим новый остов. Проделав эту процедуру κ раз, мы разобьем ребра $e_1', e_2', \ldots, e_\kappa' \in t' \setminus t^{\mathrm{I}}$ и $e_1^{\mathrm{I}}, e_2^{\mathrm{I}}, \ldots, e_\kappa^{\mathrm{I}} \in t^{\mathrm{I}} \setminus t'$ на пары так, что e_j' и e_j^{I}, $j \in \left\{1, 2, \ldots, \kappa\right\}$, лежат на одном цикле. Далее, оценим вес этих ребер.

На основании леммы найдется второй по величине остов t_*^{II}, отличающийся от остова t^{I} двумя ребрами. Поэтому для всякого $j \in \left\{1, 2, \ldots, \kappa\right\}$ выводим

$$a\left(e_j'\right) - a\left(e_j^{\mathrm{I}}\right) = f\left(t^{\mathrm{I}} + e_j' - e_j^{\mathrm{I}},\, a\right) - f\left(t_*^{\mathrm{II}},\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right).$$

Итак, имеет место формула

$$\forall j \in \left\{1, 2, \ldots, \kappa\right\},\ \left(a\left(e_j'\right) - a\left(e_j^{\mathrm{I}}\right) \ge f\left(t_*^{\mathrm{II}},\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right)\right),$$

откуда окончательно находим

$$f\left(t',\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) = \sum_{j=1}^{\kappa} a\left(e_j'\right) - \sum_{j=1}^{\kappa} a\left(e_j^{\mathrm{I}}\right) \ge \kappa\left(f\left(t_*^{\mathrm{II}},\, a\right) - f\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right)\right) = 2\varphi\kappa\left(t',\, t^{\mathrm{I}}\right).$$

Теорема доказана.

Оптимальное решение t^{I} называется [2; 3; 5] устойчивым, если $\rho\left(t^{\mathrm{I}},\, a\right) > 0$.

Следствие 1. *Оптимальное решение* t^{I} *задачи* $Z\left(a\right)$ *устойчиво тогда и только тогда, когда оно единственно.*

Следствие 2. *Если все ребра графа G имеют разный вес, то оптимальное решение* t^{I} *задачи* $Z\left(a\right)$ *устойчиво.*

Следствие 3. *Если* $Opt\left(a\right) = \left\{t^{\mathrm{I}}\right\}$*, то все вторые по величине остовы отличаются от* t^{I} *ровно одной парой ребер.*

Известно [6; 7], что два лучших решения задачи о минимальном остове могут быть найдены за $O\left(m \log \beta\left(m,\, n\right)\right)$, где

$$\beta\left(m,\, n\right) = \left\{j \in \mathbf{N} : \log^{(j)} n \le \frac{m}{n}\right\},$$

а $\log^{(j)} n$ обозначает взятый j раз логарифм от числа n. Таким образом, функция $\log\beta(m, n)$ очень близка к константе.

Следствие 4. *Радиус устойчивости* $\rho(t^{\mathrm{I}}, a)$ *оптимального решения* t^{I} *задачи* $Z(a)$ *может быть найден за время* $O(m\log\beta(m, n))$.

Отметим, что количественная мера устойчивости оптимальных решений в ряде исследований определяется не как радиус устойчивости, а как допуск ребер (дуг), т. е. для каждого ребра (дуги) находится наибольший уровень возмущений, сохраняющих оптимальность выбранного решения задачи. Наилучший результат в этом направлении получен в работе [8], где доказано, что допуски ребер для задачи о минимальном остове могут быть вычислены за время $O(m\log\alpha(m, n))$, где $\alpha(m, n)$ – обратная функция Аккермана.

Библиографические ссылки

1. *Гордеев Э. Н.* Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остовном дереве в метрике l_1 // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1999. Т. 39, № 5. С. 770–778.
2. *Сергиенко И. В., Шило В. П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.
3. *Emelichev V., Podkopaev D.* Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming // Discret. Optim. 2010. Vol. 7, № 1/2. P. 48–63.
4. *Roland J., Smet Y. De, Figueira J. R.* On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization // 4OR. 2012. Vol. 10, № 4. P. 379–389.
5. *Кузьмин К. Г.* Единый подход к нахождению радиусов устойчивости в многокритериальной задаче о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 30–51.
6. *Eppstein D.* Finding the *k* smallest spanning trees // BIT Numer. Math. 1992. Vol. 32, № 2. P. 237–248.
7. *Frederickson G. N.* Ambivalent Data Structures for Dynamic 2-Edge-Connectivity and Smallest Spanning Trees Time // SIAM J. Comput. 1997. Vol. 26, № 2. P. 484–538.
8. *Pettie S.* Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees in Sub-Inverse-Ackermann Time // J. Graph Algorithms Appl. 2015. Vol. 19, № 1. P. 375–391.

References

1. Gordeev Je. N. Issledovanie ustojchivosti zadachi o kratchajshem ostovnom dereve v metrike l_1 [Stability analysis of the minimum spanning tree problem]. *Zh. vychislitel. mat. mat. fiz.* 1999. Vol. 39, No. 5. P. 770–778 (in Russ.).
2. Sergienko I. V., Shilo V. P. Zadachi diskretnoj optimizacii. Problemy, metody reshenija, issledovanija [Discrete Optimization Problems. Challenges, Solution Techniques, and Analysis]. Kiev, 2003 (in Russ.).
3. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming. *Discret. Optim.* 2010. Vol. 7, No. 1/2. P. 48–63.
4. Roland J., Smet Y. De, Figueira J. R. On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization. *4OR.* 2012. Vol. 10, No. 4. P. 379–389.
5. Kuz'min K. G. Edinyj podhod k nahozhdeniju radiusov ustojchivosti v mnogokriterial'noj zadache o maksimal'nom razreze grafa [A general approach to the calculation of stability radii for the max-cut problem with multiple criteria]. *Diskretn. anal. issled. oper.* 2015. Vol. 22, No. 5. P. 30–51 (in Russ.).
6. Eppstein D. Finding the *k* smallest spanning trees. *BIT Numer. Math.* 1992. Vol. 32, No. 2. P. 237–248.
7. Frederickson G. N. Ambivalent Data Structures for Dynamic 2-Edge-Connectivity and Smallest Spanning Trees Time. *SIAM J. Comput.* 1997. Vol. 26, No. 2. P. 484–538.
8. Pettie S. Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees in Sub-Inverse-Ackermann Time. *J. Graph Algorithms Appl.* 2015. Vol. 19, No. 1. P. 375–391.

Статья поступила в редколлегию 15.10.2016.
Received by editorial board 15.10.2016.