УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА

В. В. КОРОЛЕВИЧ[1]**, *Д. Г. МЕДВЕДЕВ***[2]

[1]*Филиал Национального педагогического университета им. М. Драгоманова, ул. Язельская, 266/10, 16000, г. Прага, Чешская Республика*
[2]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода приводится в общем виде решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины. Предполагается, что температурное поле в диске известно и оно осесимметричное. Упругие постоянные – модули Юнга и модуль сдвига – линейно зависят от температуры, а коэффициенты Пуассона считаются постоянными величинами. С применением функции напряжений осесимметричная плоская задача термоупругости сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. На контурах диска задаются постоянные усилия. Полученное дифференциальное уравнение сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Общее решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Указаны условия, при которых интегральное уравнение имеет единственное непрерывное решение. Для расчета сплошных дисков рассматривается диск с малым центральным отверстием, радиус которого менее $\frac{1}{20}$ радиуса внешнего контура, и выполнением условия равенства радиального и тангенциального напряжений на внутреннем контуре. Приводятся расчетные формулы для компонент радиального, тангенциального напряжений и радиального перемещения.

Ключевые слова: полярно-ортотропный диск; неоднородное тепловое поле; температура; соотношения термоупругости; дифференциальные и интегральные уравнения; резольвента; радиальная и тангенциальная компоненты напряжений; радиальное перемещение.

Образец цитирования:
Королевич В. В., Медведев Д. Г. Решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для вращающегося в тепловом поле полярно-ортотропного диска переменной толщины методом интегрального уравнения Вольтерры второго рода // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 47–52.

For citation:
Karalevich U. V., Medvedev D. G. Solution of the axismmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disc of variable thickness in the rotating thermal field by Volterra integral equation of the second kind. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 47–52 (in Russ.).

Авторы:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:
Uladzimir Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

SOLUTION OF THE AXISMMETRIC PLANE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A POLAR-ORTHOTROPIC DISC OF VARIABLE THICKNESS IN THE ROTATING THERMAL FIELD BY VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

U. V. KARALEVICH [a]***, D. G. MEDVEDEV*** [b]

[a] *Branch office National Pedagogical University M. Dragomanov, Jaselska street, 266/10, 16000, Praha, Czech Republic*
[b] *Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

Corresponding author: medvedev@bsu.by

With the help of linear Volterra integral equation of the second kind the solution of the axisymmetric plane thermoelasticity problem for a polar-orthotropic disk of variable thickness in the rotating thermal field is generally given. It is assumed that the temperature field in the disk is known and it is axisymmetric. The elastic constants – Young's modulus and shear modulus – are linearly temperature dependent, and Poisson's coefficient are considered to be constant. With the stress function axisymmetric plane thermoelasticity problem is reduced to solving the differential equation of the second kind with variable coefficients. Constant efforts are set on the disc contours. The resulting differential equation is reduced to a linear integral Volterra equation of the second kind. The general solution of the integral equation is written down the resolvent is used. The conditions under which the integral equation has a unique continuous solution are given. To calculate the solid drives the disk with a small central hole the radius of which is less than $\frac{1}{20}$ of the radius of the outer contour and the implementation of the condition that the radial and tangential stresses in the domestic circuit is implemented. Calculation formulas are given for the component of the radial, tangential stress and radial displacement.

Key words: polar-orthotropic disc; inhomogeneous thermal field; temperature; ratio thermoelasticity; differential and integral equations; resolvent; radial and tangential stress components; radial displacement.

С помощью линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода приводится общее решение осесимметричной плоской задачи термоупругости для полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$, вращающегося вокруг нормальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0 в неоднородном тепловом поле. Диск при этом одновременно будет испытывать механическую деформацию от действия центробежных сил и температурную деформацию – от теплового поля [1]. Предполагается, что температурное поле в диске известно и оно осесимметричное, т. е. зависит только от радиуса r. Упругие постоянные – модули Юнга E_r, E_θ, модуль сдвига $G_{r\theta}$ – линейно зависят от температуры $T(r)$ [2]:

$$E_r(T) = E_r^{(0)}\left[1-\gamma T(r)\right],\ E_\theta(T) = E_\theta^{(0)}\left[1-\gamma T(r)\right],$$

$$G_{r\theta}(T) = G_{r\theta}^{(0)}\left[1-\gamma T(r)\right],$$

где $E_r^{(0)}$, $E_\theta^{(0)}$, $G_{r\theta}^{(0)}$ – значения упругих постоянных при начальной температуре T_0; γ – параметр. Коэффициенты Пуассона $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ будем считать постоянными величинами.

Диск изготовлен из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Внутренний радиус кольцевого диска обозначим r_0, а внешний – R. Толщина диска $h(r)$ меняется вдоль радиуса r по заданному закону и на внутреннем контуре равна h_0.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска. Ось вращения диска совпадает с осью анизотропии.

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент диска. Запишем уравнение равновесия этого элемента в случае осесимметричной деформации [3]:

$$\frac{d\sigma_r(r)}{dr} + \frac{h'(r)}{h(r)}\cdot\sigma_r(r) + \frac{\left[\sigma_r(r) - \sigma_\theta(r)\right]}{r} + \rho\omega_0^2 r = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r)$ – радиальная и тангенциальная компоненты напряжений соответственно; ρ – плотность композитного материала диска. Касательные $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ напряжения в диске в этом случае отсутствуют.

Для первой основной задачи теории упругости граничные условия имеют вид

$$\sigma_r(r_0) = -p_0, \ \ \sigma_r(R) = p_1,$$

где p_0, p_1 – постоянные краевые нагрузки.

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений связаны с функцией напряжений $\psi_T(r)$ соотношениями [4]:

$$\sigma_r(r) = \frac{\psi_T(r)}{rh(r)}, \quad \sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)}\frac{d\psi_T}{dr} + \rho\omega_0^2 r^2. \tag{2}$$

Подстановка выражений (2) в уравнение равновесия (1) обращает его тождественно в нуль.

Соотношения термоупругости в полярных координатах для цилиндрически ортотропного тела в случае осесимметричного плоского напряженного состояния есть [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r) &= \frac{1}{E_r(T)}\sigma_r(r) - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta(T)}\sigma_\theta(r) + \Theta_r(r) = \frac{1}{E_\theta(T)}\left[k^2(T)\sigma_r(r) - \nu_{\theta r}\sigma_\theta(r)\right] + \Theta_r(r), \\ \varepsilon_\theta(r) &= -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r(T)}\sigma_r(r) + \frac{1}{E_\theta(T)}\sigma_\theta(r) + \Theta_\theta(r) = \frac{1}{E_\theta(T)}\left[-\nu_{\theta r}\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)\right] + \Theta_\theta(r), \end{aligned} \tag{3}$$

где $k^2(T) = \dfrac{E_\theta(T)}{E_r(T)}$; $\Theta_r(r) = \alpha_r(T)\big(T(r) - T_0\big) = \alpha_r(T)\cdot\Delta T(r)$ – радиальная температурная деформация; $\Theta_\theta(r) = \alpha_\theta(T)\big(T(r) - T_0\big) = \alpha_\theta(T)\cdot\Delta T(r)$ – тангенциальная температурная деформация; $\alpha_r(T)$, $\alpha_\theta(T)$ – радиальный и тангенциальный коэффициенты линейного температурного расширения материала соответственно, зависящие в общем случае от температуры $T(r)$; $\Delta T(r) = \big(T(r) - T_0\big)$ – перепад температур, T_0 – начальная температура (обычно $T_0 = 273$ K (0 °C) или $T_0 = 293$ K (20 °C)).

Для полярно-ортотропного тела справедливо соотношение $\dfrac{\nu_{r\theta}}{E_r(T)} = \dfrac{\nu_{\theta r}}{E_\theta(T)}$.

Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\frac{d\varepsilon_\theta(r)}{dr} + \frac{\left[\varepsilon_\theta(r) - \varepsilon_r(r)\right]}{r} = 0. \tag{4}$$

Подставляя выражения (2) в соотношения (3), а затем деформации, выраженные через функцию напряжений, в уравнение (4), получим *дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами для функции напряжений* $\psi_T(r)$, *описывающей осесимметричное термоупругое напряженное состояние полярно-ортотропного диска переменной толщины, вращающегося в неоднородном тепловом поле*:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\psi_T}{dr^2} - \left[\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\frac{dT}{dr} - \frac{1}{r}\right]\frac{d\psi_T}{dr} + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left(\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\frac{dT}{dr}\right) - \frac{k^2(T)}{r^2}\right]\psi_T(r) = \\ &= -\left[(3 + \nu_{\theta r}) + r\frac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\frac{dT}{dr}\right]h(r)\rho\omega_0^2 r - E_\theta(T)h(r)\left[\frac{d\Theta_\theta}{dr} + \frac{\big(\Theta_\theta(r) - \Theta_r(r)\big)}{r}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

где $\gamma^* = \gamma E_\theta^{(0)}$.

Приведем дифференциальное уравнение (5) к соответствующему линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода [5].

Полагаем

$$\frac{d^2\psi_T}{dr^2} = \varphi_T(r). \tag{6}$$

Последовательно интегрируя выражение (6), получим

$$\frac{d\psi_T}{dr} = \int_{r_0}^{r} \varphi_T(s)ds + \psi_T'(r_0) = \int_{r_0}^{r} \varphi_T(s)ds + h(r_0)\sigma_\theta(r_0) - h(r_0)\rho\omega_0^2 r_0^2,$$

$$\psi_T(r) = \int_{r_0}^{r} (r-s)\varphi_T(s)ds + \psi_T'(r_0)(r-r_0) + \psi_T(r_0) = \int_{r_0}^{r} (r-s)\varphi_T(s)ds +$$

$$+ h(r_0)\sigma_\theta(r_0)\cdot(r-r_0) + h(r_0)\sigma_r(r_0)\cdot r_0 - h(r_0)\rho\omega_0^2 r_0^2\cdot(r-r_0). \tag{7}$$

Здесь использовались соотношения (2) и формула Дирихле:

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} \varphi_T(r_n)dr_n}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1}\varphi_T(s)ds.$$

Подставляя в уравнение (5) вместо функции напряжений $\psi_T(r)$ и ее производных правые части выражений (6), (7), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\varphi_T^{(1)}(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K\varphi_T(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K^{(T)}(r, s)\varphi_T(s)ds + f_T(r), \tag{8}$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K^{(T)}(r, s) = \left\{\left[\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\frac{dT}{dr}\right] + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\left(\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\frac{dT}{dr}\right) - \frac{k^2(T)}{r^2}\right](r-s)\right\}$ – ядро интегрального уравнения; $f_T(r) = \frac{\partial K^{(T)}(r, s)}{\partial s}\cdot r_0 h(r_0)\sigma_r(r_0) - K^{(T)}(r, r_0)\times$ $\times h(r_0)\sigma_\theta(r_0) + K^{(T)}(r, r_0)\cdot h(r_0)\rho\omega_0^2 r_0^2 - \left[(3+\nu_{\theta r}) + r\frac{\gamma^*}{E_\theta(T)}\frac{dT}{dr}\right]h(r)\rho\omega_0^2 r - E_\theta(T)h(r)\left[\frac{d\Theta_\theta}{dr} + \frac{(\Theta_\theta(r) - \Theta_r(r))}{r}\right]$ – свободный член интегрального уравнения. Значения напряжений $\sigma_r(r_0)$, $\sigma_\theta(r_0)$ на внутреннем контуре диска определяются из граничных условий.

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры второго рода (8) записывается с помощью *резольвенты* $R^{(T)}(r, s; \lambda)$ в виде [5]

$$\varphi_T(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} R^{(T)}(r, s; \lambda)f_T(s)ds + f_T(r). \tag{9}$$

Здесь функция $R^{(T)}(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R^{(T)}(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}^{(T)}(r, s),$$

который для непрерывных ядер $K_m^{(T)}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или *итерированные*, *ядра* $K_m^{(T)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$K_1^{(T)}(r, s) = K^{(T)}(r, s),$$

$$K_2^{(T)}(r, s) = \int_s^r K^{(T)}(r, t) K_1^{(T)}(t, s) dt,$$

……………………………………..

$$K_m^{(T)}(r, s) = \int_s^r K^{(T)}(r, t) K_{m-1}^{(T)}(t, s) dt.$$

Если свободный член $f_T(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K^{(T)}(r, s)$ непрерывно при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода (8) имеет при любом параметре $\lambda(\lambda \ne 0)$ единственное непрерывное решение, определяемое формулой (9).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры второго рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [6].

При расчете сплошного полярно-ортотропного диска переменной толщины рассматривают диск с малым центральным отверстием $r_0 \cong \frac{1}{20} R$ и принимают на его внутреннем контуре $\sigma_r(r_0) = \sigma_\theta(r_0)$ [7].

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений и радиальное перемещение $u(r)$ во вращающемся в неоднородном тепловом поле полярно-ортотропном диске переменной толщины рассчитываются по следующим формулам:

$$\sigma_r(r) = \frac{1}{rh(r)} \left\{ \int_{r_0}^r (r - s) \varphi_T(s) ds + h_0 \sigma_\theta(r_0) \cdot (r - r_0) + h_0 \sigma_r(r_0) r_0 - h_0 \rho \omega_0^2 r_0^2 (r - r_0) \right\}; \tag{10}$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)} \left[\int_{r_0}^r \varphi_T(s) ds + h_0 \sigma_\theta(r_0) + h(r) \rho \omega_0^2 r^2 - h_0 \rho \omega_0^2 r_0^2 \right]; \tag{11}$$

$$u(r) = \frac{1}{E_\theta(T) h(r)} \left\{ \int_{r_0}^r \left[(1 - \nu_{\theta r}) r + \nu_{\theta r} s \right] \varphi_T(s) ds + (1 - \nu_{\theta r}) h_0 \sigma_\theta(r_0) r + \nu_{\theta r} h_0 r_0 \left[\sigma_\theta(r_0) - \sigma_r(r_0) \right] + \right.$$

$$\left. + h(r) \rho \omega_0^2 r^3 - \left[(1 - \nu_{\theta r}) r + \nu_{\theta r} r_0 \right] h_0 \rho \omega_0^2 r_0^2 \right\} + r \cdot \alpha_\theta(T) \left(T(r) - T_0 \right). \tag{12}$$

В этих формулах уже используется первое граничное условие $\sigma_r(r_0) = -p_0$. Неизвестная постоянная $\sigma_\theta(r_0)$ находится из второго граничного условия $\sigma_r(R) = p_1$.

Приведенные формулы (10)−(12) полностью определяют напряженно-деформированное состояние вращающегося в неоднородном тепловом поле профилированного анизотропного кольцевого диска.

Библиографические ссылки

1. *Воробей В. В., Морозов Е. В., Татарников О. В.* Расчет термонапряженных конструкций из композиционных материалов. М., 1992.
2. *Дургарьян С. М.* Температурный расчет ортотропной слоистой пластинки при упругих постоянных и коэффициенте температурного расширения, зависящих от температуры // Изв. Акад. наук Арм. ССР. Физ.-матем. науки. 1960. Т. XIII, № 2. С. 73–87.
3. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., 1979.
4. *Бурмистров Е. Ф., Маслов Н. М.* Напряжения в ортотропных вращающихся дисках переменной толщины // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел : сб. науч. ст. Сарат. гос. ун-та им. Н. Г. Чернышевского. Саратов, 1970. Вып. 5. С. 80−86.
5. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
6. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, 1986.
7. *Бояршинов С. В.* Основы строительной механики машин. М., 1973.

References

1. Vorobei V. V., Morozov E. V., Tatarnikov O. V. Raschet termonapryazhennykh konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov. Moscow, 1992 (in Russ.).

2. Durgar'yan S. M. Temperaturnyi raschet ortotropnoi sloistoi plastinki pri uprugikh postoyannykh i koeffitsiente temperaturnogo rasshireniya, zavisyashchikh ot temperatury [Temperature calculation of the orthotropic layered plate with depending on the temperature the elastic constants and thermal expansion coefficient]. *Izv. Akad. nauk Arm. SSR. Fiz.-mat. nauki.* 1960. Vol. XIII, No. 2. P. 73–87 (in Russ.).

3. Timoshenko S. P., Gud'er Dzh. Teoriya uprugosti. Moscow, 1979 (in Russ.).

4. Burmistrov E. F., Maslov N. M. Napryazheniya v ortotropnykh vrashchayushchikhsya diskakh peremennoi tolshchiny [Stresses in the orthotropic rotating disks of variable thickness]. *Nekotorye zadachi teorii uprugosti o kontsentratsii napryazhenii i deformatsii uprugikh tel* : collect. of sci. articles of the Saratov State Univ. named after N. G. Chernyshevsky. Saratov, 1970. Issue 5. P. 80−86 (in Russ.).

5. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami. Moscow, 2007 (in Russ.).

6. Verlan' A. F., Sizikov V. S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy. Kiev, 1986 (in Russ.).

7. Boyarshinov S. V. Osnovy stroitel'noi mekhaniki mashin. Moscow, 1973 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 12.05.2016.
Received by editorial board 12.05.2016.